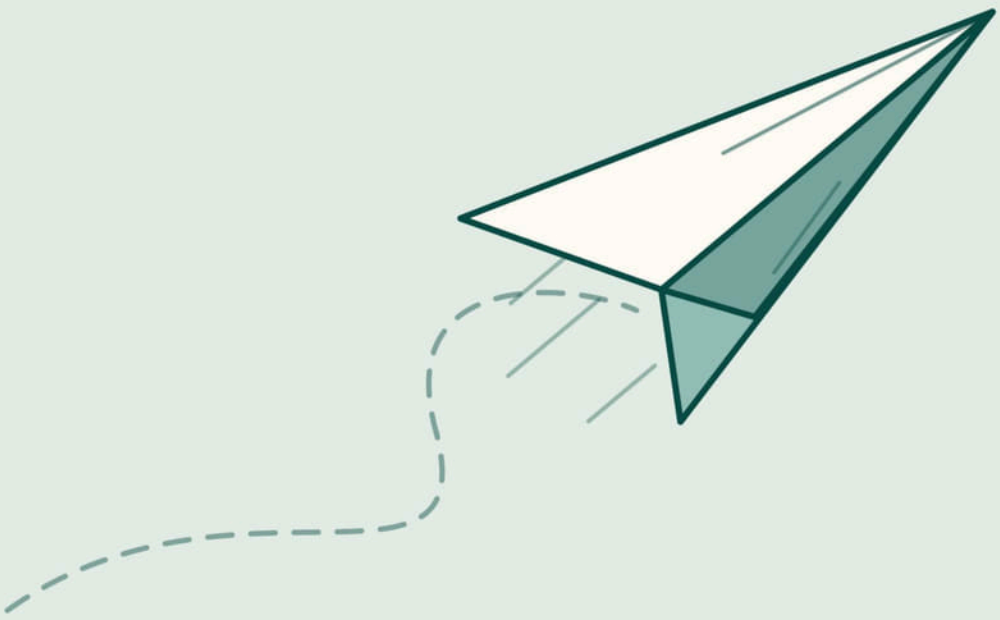
SERI PERSIAPAN TKA SMA

TKA SMA

MATEMATIKA

Tingkat Lanjut

Materi, Strategi, dan Simulasi



Handaka Lumu

by Next Level Study Indonesia

2026/2027 · MATTL

TKA MATEMATIKA TINGKAT LANJUT

Materi, Strategi, dan Simulasi

Handaka Lumu

by Next Level Study Indonesia

The Dancer of the Silent Stage

"Semakin kau mengenalku, semakin banyak yang kamu tidak tahu"



KETERANGAN BUKU

TKA Matematika Tingkat Lanjut: Materi, Strategi, dan Simulasi

Penulis: Handaka Lumu

Penyusun soal: Tim Next Level Study Indonesia

Penerbit: Next Level Study Indonesia

Edisi: Edisi 1 · Gratis untuk pelajar Indonesia · 2026/2027 · Kode buku MATTL

© 2026 Next Level Study Indonesia. Hak cipta dilindungi undang-undang.

GRATIS · TIDAK UNTUK DIPERJUALBELIKAN

Buku ini dibagikan gratis sebagai dedikasi Next Level Study Indonesia untuk bangsa. Boleh diperbanyak dan dibagikan untuk belajar, tetapi tidak untuk diperjualbelikan.

Sumber soal asli: Soal Asli TKA SMA 2025 Matematika Tingkat Lanjut (Pusmendik Kemendikdasmen), disalin ulang tanpa perubahan isi; persentase siswa menjawab benar dari dokumen soal asli yang memuat indikator resmi.

Acuan kisi-kisi: https://pusmendik.kemendikdasmen.go.id/tka/tka/view/mata-pelajaran-pilihan/sma/matematika-tingkat-lanjut

Kata Pengantar

Untukmu yang sedang bersiap,

Matematika Tingkat Lanjut sering terasa seperti jalan yang menanjak. Matriks, polinomial, vektor, lingkaran, transformasi, dan limit datang silih berganti. Soal-soalnya tidak lagi bertanya "berapa hasilnya", tetapi "apa artinya". Kalau saat ini kamu merasa ragu, ketahuilah bahwa rasa itu wajar. Banyak soal TKA 2025 dijawab benar oleh kurang dari sepertiga peserta. Yang membedakan bukanlah bakat, melainkan cara belajar.

Buku ini lahir dari keyakinan sederhana: setiap siswa berhak mendapat penjelasan yang utuh, bukan sekadar kumpulan rumus. Karena itu setiap sub bab dimulai dari apa yang benar-benar diuji, lalu menjelaskan konsepnya dari dasar, memberi contoh yang dikerjakan langkah demi langkah, dan menunjukkan jebakan yang paling sering menipu. Soal asli TKA 2025 dibedah satu per satu, termasuk alasan mengapa begitu banyak peserta keliru. Di akhir setiap bab ada kuis, dan di akhir buku ada simulasi TKA dengan waktu yang sama seperti ujian sesungguhnya. Semua soal dilengkapi kunci dan pembahasan.

Buku ini tidak menjanjikan nilai tertentu. Buku ini hanya berjanji menemanimu dengan jujur: menjelaskan selengkap yang kami mampu dan tidak menyembunyikan bagian yang sulit. Selebihnya adalah ketekunanmu. Kerjakan latihan sebelum membaca kunci. Ulangi sub bab yang skornya masih rendah. Bila ingin berlatih secara interaktif, pindai kode QR di setiap bab untuk membuka latihan yang sama di LMS Next Level Study.

Belajarlah dengan sepenuh hati. Setiap rumus yang akhirnya kamu pahami adalah janji kecil yang kamu tepati kepada dirimu sendiri. Setiap malam yang kamu pakai untuk berlatih adalah baktimu kepada orang tua dan guru yang menunggumu berhasil. Kelak, ilmu yang kamu kuasai akan kamu abdikan untuk orang-orang di sekitarmu dan untuk negeri ini. Berikan jiwa dan ragamu pada proses ini. Hasil yang baik biasanya datang kepada mereka yang tidak berhenti melangkah.

Selamat belajar. Kami percaya kamu bisa.

Oktober 2026

Handaka Lumu

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Panduan Memakai Buku

Buku ini dipakai berurutan: kenali ujiannya (Bagian A), pelajari 3 bab materi (Bagian B), uji kesiapanmu dengan simulasi TKA berwaktu (Bagian C), lalu cocokkan jawaban dan pelajari pembahasannya (Bagian D).

Peta belajar

Langkah	Kamu mengerjakan	Hasil
1	Bagian A: kenali bentuk soal dan peta kisi-kisi	Tahu apa yang diuji
2	Bab demi bab: baca sub bab, kerjakan latihan, lalu Kuis Akhir Bab	Skor kuis per bab
3	Ulangi sub bab yang ditunjuk tabel anjuran di akhir kuis	Titik lemah berkurang
4	Bagian C: 4 simulasi TKA berwaktu	Skor simulasi
5	Bagian D: kunci dan pembahasan semua soal	Paham alasan, bukan hanya jawaban

Tanda di dalam buku

Tanda	Artinya
◎ APA YANG DIUJI	Tujuan belajar sub bab dan indikator resmi yang diuji
◆ KONSEP INTI	Materi lengkap: penjelasan runtut, gambar, dan contoh terselesaikan
▲ STRATEGI DAN JEBAKAN	Langkah menjawab dan pola pengecoh yang sering dipasang
● BEDAH SOAL	Soal dibahas langkah demi langkah
✎ LATIHAN	Soal untuk dikerjakan sendiri; kunci singkat di bawahnya
✔ PERIKSA DIRI	Pertanyaan refleksi dan hal yang perlu diingat
Kotak QR	Membuka latihan dan kuis yang sama di LMS NLS

Kode

MATTL-1.2 = sub bab 1.2; MATTL-KB1 = kuis akhir bab 1; MATTL-FIN1 = simulasi 1. Kode yang sama dipakai di LMS.

Belajar lewat PDF atau LMS

Semua latihan, kunci, dan pembahasan sudah ada di buku ini, jadi kamu bisa belajar hanya dengan PDF atau cetakan. LMS menambahkan latihan dan kuis interaktif, serta menyimpan skormu.

Buka buku ini di LMS NLS

Pindai untuk membuka course buku ini.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Daftar Isi

Kata Pengantar ii
Panduan Memakai Buku iii
Bagian A · Mengenal TKA Matematika Tingkat Lanjut 1
Bagian B · Materi 7
Bab 1 · Aljabar 7
Sub bab 1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks 8
Sub bab 1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3 25
Sub bab 1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks 39
Sub bab 1.4 · Program linear 55
Sub bab 1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa 77
Sub bab 1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial 94
Sub bab 1.7 · Domain, range, dan grafik fungsi polinom, rasional, dan akar 112
Sub bab 1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks 128
Sub bab 1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri 147
Kuis Akhir Bab 1 165
Bab 2 · Geometri dan Pengukuran 179
Sub bab 2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan 180
Sub bab 2.2 · Hasil kali skalar dan sudut dua vektor 201
Sub bab 2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis 214
Sub bab 2.4 · Garis singgung lingkaran 229
Sub bab 2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran 248
Sub bab 2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi 268
Sub bab 2.7 · Matriks transformasi dan komposisi 288
Kuis Akhir Bab 2 303
Bab 3 · Kalkulus: Limit 317
Sub bab 3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik 318
Sub bab 3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks 333
Sub bab 3.3 · Limit fungsi trigonometri 348
Kuis Akhir Bab 3 367
Bagian C · Simulasi TKA 380
Simulasi 1 — Soal Asli TKA 2025 381
Simulasi 2 — Prediksi TKA 2026 399
Simulasi 3 — Prediksi TKA 2026 413
Simulasi 4 — Prediksi TKA 2026 429
Bagian D · Kunci dan Pembahasan 443
Penutup 514
Lampiran 515

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bagian A · Mengenal TKA Matematika Tingkat Lanjut

1. Apa itu TKA Matematika Tingkat Lanjut

Tes Kemampuan Akademik (TKA) diselenggarakan oleh Pusat Asesmen Pendidikan (Pusmendik) Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah. Di jenjang SMA/MA/SMK/MAK, peserta mengerjakan mata pelajaran wajib dan mata pelajaran pilihan. **Matematika Tingkat Lanjut adalah salah satu mata pelajaran pilihan.**

Menurut kerangka resmi Pusmendik, TKA Matematika Tingkat Lanjut mengukur pemahaman fakta, konsep, prinsip, dan prosedur matematika, serta kemampuan memakainya untuk memecahkan masalah. Soalnya dapat berupa matematika murni atau berkonteks kehidupan sehari-hari, mulai dari lingkup pribadi, keluarga, hingga lokal dan global. Logika matematika tidak diuji sebagai bab tersendiri, tetapi **menyatu** di semua soal: kamu diminta menilai apakah sebuah pernyataan benar, mungkin, atau memenuhi syarat.

Ketentuan teknis seperti jadwal, cara pendaftaran, dan pemanfaatan hasil TKA dapat berubah setiap tahun. Selalu ikuti pengumuman resmi Pusmendik dan sekolahmu. Buku ini memakai data yang sudah pasti: kisi-kisi resmi dan soal asli TKA 2025.

Jumlah soal dan waktu. Soal asli TKA 2025 Matematika Tingkat Lanjut berisi **25 soal**. Jadwal TKA 2025 yang dimuat media memberikan waktu **60 menit** untuk setiap mata pelajaran pilihan. Jadi rata-rata kamu punya **2,4 menit per soal**. Semua kuis bab dan simulasi TKA di buku ini memakai ukuran yang sama: 25 soal dalam 60 menit.

2. Tiga tingkat berpikir yang diuji

Kerangka resmi membagi soal ke dalam tiga level kognitif:

Level	Nama	Yang dilakukan	Contoh dalam buku ini
1	Pengetahuan dan pemahaman	menghitung, memahami informasi, mengelompokkan, mengidentifikasi	menentukan invers matriks 2×2 (SA-1)
2	Aplikasi	memodelkan, menerapkan, menginterpretasi	menyusun matriks pesanan × bahan, lalu mencari unsur yang hilang (SA-3)
3	Penalaran	menganalisis, memecahkan masalah, mengevaluasi	menilai pernyataan tentang limit rasio luas dua bangun (SA-24)

Sebagian besar soal asli 2025 berada di level 2 dan 3. Artinya, hafal rumus saja tidak cukup. Kamu harus tahu **kapan** sebuah rumus dipakai dan **apa arti** hasilnya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Bentuk soal dan cara menjawabnya

TKA memakai tiga bentuk soal. Dari 25 soal asli 2025: **14 pilihan ganda, 8 pilihan ganda kompleks, dan 3 pilihan ganda kompleks kategori.**

3.1 Pilihan ganda (PG)

Ada lima pilihan (A–E) dan **tepat satu** yang benar.

Cara menjawab: hitung dulu tanpa melihat pilihan, lalu cocokkan. Bila hasilmu tidak ada di pilihan, jangan memilih yang "paling dekat". Periksa ulang langkahmu, karena pengecoh PG matematika biasanya adalah **hasil dari satu langkah yang keliru**: salah tanda, urutan perkalian terbalik, atau lupa satu syarat.

Contoh singkat. "Nilai x yang memenuhi $2^{x+1} = 32$ adalah ..." Kamu menuliskan $32 = 2^5$, jadi $x + 1 = 5$ dan $x = 4$. Pengecoh yang mungkin dipasang: 5 (lupa mengurangi 1) dan 16 (membagi 32 dengan 2).

3.2 Pilihan ganda kompleks (PGK, "jawaban benar lebih dari satu")

Ada lima pernyataan atau pilihan, dan **lebih dari satu** yang benar. Kamu harus memilih **semua** yang benar.

Cara menjawab: perlakukan setiap pilihan sebagai soal Benar/Salah yang berdiri sendiri. Beri tanda ✓ atau ✗ pada setiap pilihan beserta alasan singkat, misalnya angka hasil hitunganmu. Jangan berhenti setelah menemukan dua pilihan benar, karena bisa saja ada tiga. Jangan pula memilih semuanya.

Contoh singkat. "Titik potong grafik $y = x^2 - x - 6$ dengan sumbu X adalah ... (pilih semua yang benar): (−3, 0), (−2, 0), (2, 0), (3, 0), (6, 0)." Pemfaktoran $(x - 3)(x + 2) = 0$ memberikan $x = 3$ atau $x = -2$. Jadi yang benar adalah (−2, 0) dan (3, 0). Pengecoh (−3, 0) dan (2, 0) muncul bila tanda akar tertukar dengan tanda dalam faktor.

3.3 Pilihan ganda kompleks kategori (Benar/Salah dan sejenisnya)

Ada beberapa pernyataan (biasanya tiga), dan **setiap** pernyataan dinilai dengan dua kategori. Di soal asli 2025, kategorinya tidak selalu "Benar/Salah". Ada juga "Mungkin/Tidak Mungkin" (SA-8) dan "Pas/Tidak Pas" (SA-18).

Cara menjawab: baca dengan teliti **arti kategorinya**. Pada SA-18, "pas" didefinisikan khusus oleh soal: cukup untuk membuat kerangka dan sisanya tidak lebih dari 1 m. Definisi seperti itu adalah bagian terpenting soal. Lalu nilai setiap pernyataan secara terpisah, dengan hitungan, bukan dengan perasaan.

4. Peta kisi-kisi dan isi buku

Kisi-kisi resmi Pusmendik membagi materi ke dalam tiga elemen. Buku ini mengikutinya: **satu elemen = satu bab.**

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Elemen kisi-kisi	Materi resmi	Sub bab di buku ini	Soal asli 2025
Aljabar	Matriks: operasi, determinan, invers (ordo ≤ 3), program linear	1.1 Operasi matriks · 1.2 Determinan dan invers · 1.3 SPL dengan matriks · 1.4 Program linear	4
Aljabar	Polinomial (orde ≤ 4): operasi, pemfaktoran, suku sisa	1.5 Pembagian dan teorema sisa · 1.6 Faktor dan akar	4
Aljabar	Fungsi: domain, kodomain, range, grafik polinom, rasional, akar, eksponen, logaritma, nilai mutlak, trigonometri	1.7 Domain, range, grafik · 1.8 Eksponen dan logaritma · 1.9 Nilai mutlak dan trigonometri	3
Geometri dan Pengukuran	Vektor di bidang dan ruang (≤ 3 komponen)	2.1 Vektor: panjang, operasi, perbandingan · 2.2 Hasil kali skalar	3
Geometri dan Pengukuran	Lingkaran: persamaan, garis singgung, luas dan keliling bagian lingkaran	2.3 Persamaan lingkaran · 2.4 Garis singgung · 2.5 Luas dan keliling bagian lingkaran	4
Geometri dan Pengukuran	Transformasi geometri dan matriksnya, komposisi	2.6 Translasi, refleksi, rotasi, dilatasi · 2.7 Matriks transformasi dan komposisi	3
Kalkulus	Limit fungsi aljabar dan trigonometri (tanpa aturan L'Hôpital)	3.1 Limit di suatu titik · 3.2 Limit di tak hingga · 3.3 Limit trigonometri	4

Perhatikan dua hal. Pertama, **Aljabar paling besar porsinya** (11 dari 25 soal asli), disusul Geometri dan Pengukuran (10) dan Kalkulus (4). Kedua, **program linear tercantum di kisi-kisi resmi tetapi tidak muncul di soal asli 2025**. Buku ini tetap membahasnya (sub bab 1.4) karena kisi-kisi adalah acuan resmi, dan soal tahun berikutnya dapat memuatnya.

5. Ciri soal TKA Matematika Tingkat Lanjut

1. **Berkonteks.** Sekitar separuh soal asli 2025 (13 dari 25) memakai cerita sehari-hari: pabrik minuman, hotel, ternak, drum logam, saham, populasi kelinci, eceng gondok, pasang surut air laut, kereta api, rambu, pintu kaca patri, penjual nasi goreng, dan "kerucut es krim". Matematikanya standar, tetapi kamu harus **menerjemahkan** cerita menjadi model.
2. **Bergambar.** Sepuluh soal asli memuat gambar: tabel data, grafik, diagram, atau bangun. Informasi penting sering hanya ada di gambar, misalnya harga kamar hotel atau waktu tempuh kereta.
3. **Banyak pernyataan yang harus dinilai.** 11 dari 25 soal berbentuk PGK atau kategori. Satu soal bisa memuat lima "mini-soal" sekaligus.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. **Parameter.** Banyak soal tidak meminta angka langsung, tetapi nilai parameter (a, b, m, k) yang membuat suatu syarat terpenuhi, misalnya panjang vektor 9 atau sisa pembagian tertentu.
5. **Tahan jebakan "kelihatannya".** Pengecoh dirancang dari kesalahan berpikir yang umum: banyak barang dianggap besar nilai, rumus "menuju nol" dipakai untuk limit menuju 3, arah rotasi tertukar. Setiap sub bab buku ini memuat tabel **Jebakan khas** untuk melatihmu mengenalinya.

6. Tingkat kesulitan nasional soal asli 2025

Tabel berikut mengurutkan ke-25 soal asli dari yang **paling sedikit** dijawab benar. Persentase diambil dari dokumen soal asli yang memuat indikator resmi dan persentase siswa yang menjawab benar. Rata-ratanya hanya sekitar **29 %**. Dua belas soal dijawab benar oleh kurang dari seperempat peserta.

Soal	Yang diuji	Menjawab benar	Dibahas di sub bab
SA-24	Limit rasio luas segitiga dan setengah lingkaran	5,95 %	3.3
SA-16	Titik singgung garis yang tegak lurus garis tertentu	9,74 %	2.4
SA-21	Titik pada bayangan garis hasil rotasi	11,68 %	2.6
SA-2	SPL dengan invers matriks (pakan ternak)	14,29 %	1.3
SA-19	Parameter garis setelah dua transformasi	18,98 %	2.7
SA-6	Dua parameter polinomial dari pembagi dan sisa	20,37 %	1.5
SA-4	Menafsirkan operasi matriks (pendapatan hotel)	20,79 %	1.1
SA-12	Panjang vektor dengan parameter	22,38 %	2.1
SA-17	Luas gabungan bangun (rambu)	22,51 %	2.5
SA-5	Pembuat nol polinomial berderajat tiga	23,14 %	1.6
SA-25	Parameter limit fungsi trigonometri	23,78 %	3.3
SA-23	Limit di tak hingga (keuntungan penjual)	24,58 %	3.2
SA-15	Persamaan lingkaran sepusat	26,92 %	2.3
SA-14	Perbandingan vektor (lintasan kereta)	27,14 %	2.1
SA-10	Grafik fungsi eksponensial (eceng gondok)	30,60 %	1.8
SA-13	Vektor pada trapesium sama kaki	31,71 %	2.1
SA-1	Invers matriks 2×2	32,96 %	1.2
SA-22	Limit fungsi rasional	33,59 %	3.1
SA-20	Translasi dan dilatasi lingkaran	35,13 %	2.6
SA-3	Perkalian dua matriks (bahan minuman)	40,93 %	1.1

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

SA-7	Perkalian skalar polinomial (drum logam)	44,16 %	1.5
SA-11	Model fungsi trigonometri (kedalaman air laut)	47,98 %	1.9
SA-8	Akar polinomial dalam konteks (modal saham)	52,56 %	1.6
SA-18	Ukuran benda berbentuk lingkaran (kaca patri)	53,82 %	2.5
SA-9	Menafsirkan model eksponensial (populasi kelinci)	57,95 %	1.8

Nomor SA mengikuti dokumen soal asli. Di Simulasi 1, urutan soalnya bisa berbeda.

Cara membaca tabel ini. Persentase rendah bukan berarti materinya asing. SA-1 (invers matriks 2×2) adalah materi dasar, tetapi hanya sepertiga peserta yang benar. Soal-soal terendah punya pola yang sama: **beberapa langkah berantai** (misalnya rotasi dengan pusat bukan titik asal, lalu menguji lima titik) atau **membaca syarat yang tersembunyi** (tegak lurus terhadap garis tertentu, sudut yang didekati). Sub bab yang memuat soal-soal ini ditandai sebagai prioritas dan dibahas lebih panjang.

7. Strategi waktu: 25 soal dalam 60 menit

1. **Putaran pertama (±35 menit):** kerjakan soal yang langsung kamu kenali caranya. Bila setelah sekitar 3 menit belum menemukan jalan, tandai dan lewati.
2. **Putaran kedua (±20 menit):** kembali ke soal yang ditandai. Untuk PGK dan kategori, nilai pernyataan satu per satu. Pernyataan yang bisa kamu pastikan tetap bernilai, jadi jangan dibiarkan kosong semuanya.
3. **Lima menit terakhir:** periksa soal yang jawabannya bergantung pada tanda (positif/negatif), satuan (ribu, juta, meter, sentimeter), atau arah (searah/berlawanan arah jarum jam).
4. **Tulis coretan yang rapi.** Matriks berlabel, sketsa lingkaran, dan tabel titik pojok membantumu memeriksa ulang dengan cepat.
5. **Jangan mengandalkan menebak pola pilihan.** Pengecoh di TKA dibuat dari kesalahan hitung yang masuk akal. Satu-satunya cara yang aman adalah menghitung.

8. Cara memakai buku ini untuk Matematika Tingkat Lanjut

- **Kerjakan berurutan.** Bab 1 menjadi dasar Bab 2: matriks dipakai lagi di transformasi geometri (2.7), dan SPL dipakai lagi untuk mencari titik pojok di program linear (1.4). Bab 3 memakai pemfaktoran (1.6) dan trigonometri (1.9).
- **Di setiap sub bab:** baca *Apa yang diuji* → pelajari *Konsep, rumus, dan contoh* sambil menulis ulang contohnya tanpa melihat → baca *Strategi dan jebakan* → coba soal di *Bedah soal* **sebelum** membaca pembahasannya → kerjakan *Latihan* → cocokkan kunci singkat → jawab *Periksa diri*.
- **Kuis akhir bab** dikerjakan dalam 60 menit tanpa melihat materi. Pakai tabel skor di bawah kuis untuk menemukan sub bab yang perlu diulang.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- **Simulasi TKA** dikerjakan setelah ketiga bab selesai, satu paket sekali duduk, dengan waktu 60 menit.
- **Bagian D** memuat pembahasan lengkap setiap soal: konsep, langkah, analisis setiap pilihan, dan jebakannya. Baca pembahasan untuk soal yang **benar** juga. Kadang kamu benar dengan alasan yang keliru.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bagian B · Materi

Bagian ini memuat 3 bab. Tiap bab diakhiri kuis; kerjakan berurutan.

Bab 1 · Aljabar

MATTL-B1

Setelah mempelajari bab ini, kamu dapat:

- membaca dan mengolah data dalam bentuk matriks
- memakai determinan dan invers untuk menyelesaikan sistem persamaan linear
- menyusun dan menyelesaikan model program linear
- memakai teorema sisa, teorema faktor, dan akar polinomial
- membaca dan menafsirkan grafik berbagai fungsi dalam konteks

Peta bab

Sub bab	Judul
1.1	Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks
1.2	Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3
1.3	Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks
1.4	Program linear
1.5	Pembagian polinomial dan teorema sisa
1.6	Faktor, akar, dan titik potong polinomial
1.7	Domain, range, dan grafik fungsi polinom, rasional, dan akar
1.8	Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks
1.9	Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri

Bab 1 di LMS

Buka seluruh latihan bab ini di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-B1

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks

MATTL-1.1

◎ APA YANG DIUJI

Di TKA, matriks hampir tidak pernah muncul sebagai "hitunglah $A + B$". Matriks dipakai sebagai **cara menyimpan data** (pesanan, bahan, harga, kapasitas), lalu kamu diminta **mengoperasikan** dan **menafsirkan** hasilnya.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-3	Menganalisis hasil operasi perkalian dua matriks	40,93 %
SA-4	Menginterpretasi solusi permasalahan kontekstual yang dihasilkan menggunakan operasi matriks	20,79 %

Angka 20,79 % berarti hanya sekitar 1 dari 5 peserta yang menjawab SA-4 dengan benar. Kesulitannya bukan pada menghitung, melainkan pada **menyusun** matriks dengan benar dan **membaca arti** setiap angka hasil kalinya.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

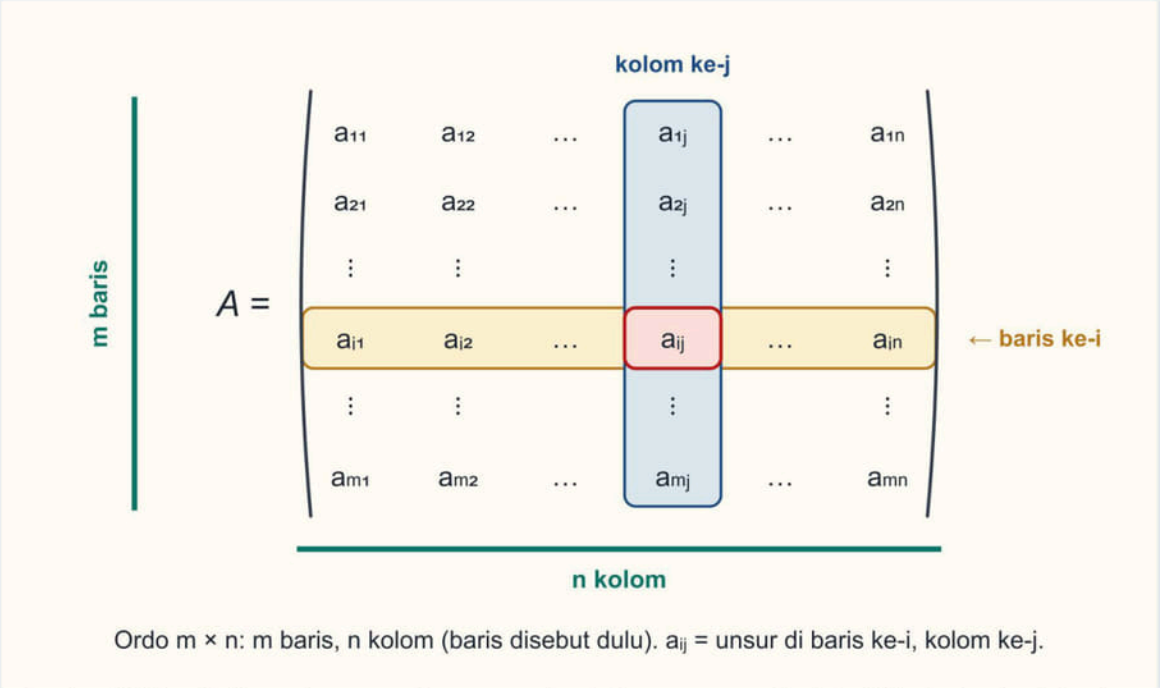
- menyusun data tabel menjadi matriks dengan label baris dan kolom yang tepat;
- menentukan apakah dua matriks dapat dikalikan dan berapa ordo hasilnya;
- menghitung hasil kali matriks dan menyebutkan arti setiap unsurnya dalam konteks soal;
- mencari unsur yang belum diketahui dari informasi hasil kali;
- menilai beberapa pernyataan sekaligus (PG kompleks atau Benar/Salah) berdasarkan hasil operasi matriks.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Matriks adalah tabel yang diberi nama

Matriks adalah susunan bilangan dalam baris dan kolom. **Ordo** matriks ditulis $m \times n$: m baris dan n kolom. Unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j ditulis a_{ij}. Baris selalu disebut lebih dulu, baru kolom (lihat Gambar 1.1). Matriks berordo $1 \times n$ disebut **matriks baris**, matriks berordo $m \times 1$ disebut **matriks kolom**, dan matriks yang banyak baris dan kolomnya sama disebut **matriks persegi**.



Gambar 1.1 Matriks berordo $m \times n$. Unsur a_{ij} terletak di perpotongan baris ke-i dan kolom ke-j. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Next Level Study
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

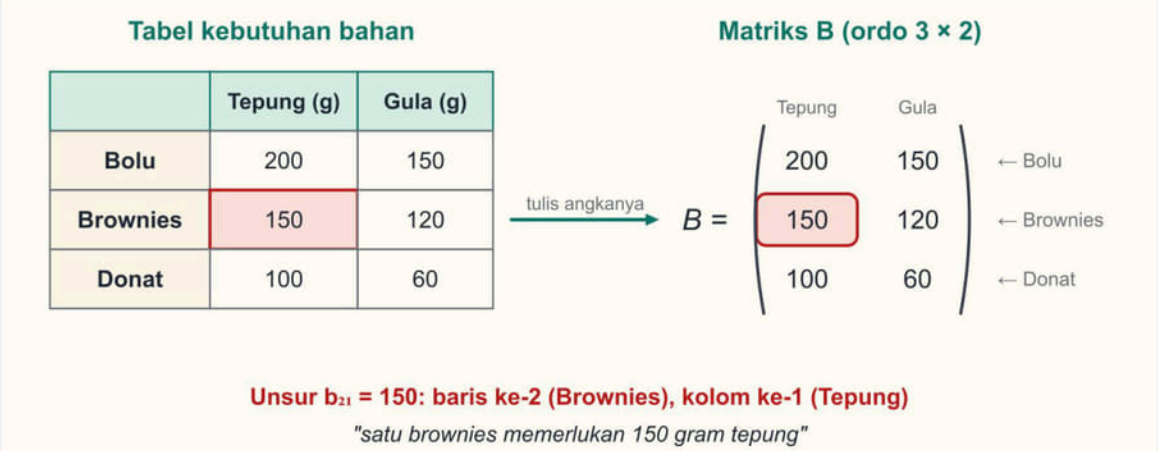
Dalam soal TKA, setiap baris dan setiap kolom selalu **mewakili sesuatu**. Biasakan menulis labelnya di pinggir matriks, misalnya:

	Tepung (g)	Gula (g)
Bolu	200	150
Brownies	150	120
Donat	100	60

Tabel di atas adalah matriks berordo 3×2:

$$B = \begin{pmatrix} 200 & 150 \\ 150 & 120 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$$

Unsur $b_{21} = 150$ artinya "satu brownies memerlukan 150 gram tepung". Bila kamu tidak bisa mengucapkan arti sebuah unsur dalam satu kalimat seperti itu, berarti label matriksmu belum jelas. Gambar 1.2 memperlihatkan perpindahan dari tabel ke matriks: angka disalin apa adanya, sedangkan label baris dan kolom tetap kamu simpan di kepala (atau tulis kecil di pinggir).



Gambar 1.2 Tabel kebutuhan bahan disalin menjadi matriks B berordo 3×2. Unsur yang disorot, $b_{21} = 150$, dibaca "satu brownies memerlukan 150 gram tepung". Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Kesamaan dua matriks. Dua matriks sama jika ordonya sama **dan** setiap unsur yang seletak sama. Dari

$$\begin{pmatrix} 2a & 3 \\ 4 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

diperoleh $2a = 6$ dan $b - 1 = 5$, jadi $a = 3$ dan $b = 6$.

Transpos. Transpos A^T diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom. Transpos berguna ketika data di soal ditulis "terbalik" dari yang kamu perlukan untuk perkalian.

2. Penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar

- $A + B$ dan $A - B$ hanya dapat dilakukan bila **ordonya sama**. Jumlahkan atau kurangkan unsur yang seletak.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- Perkalian skalar kA: setiap unsur dikalikan k.

Dalam konteks, penjumlahan berarti **menggabungkan data yang artinya sama**, misalnya pesanan pekan pertama ditambah pesanan pekan kedua (baris dan kolomnya harus berlabel sama). Pengurangan berarti **perubahan** dari satu keadaan ke keadaan lain. Perkalian skalar berarti **memperbesar semua data dengan faktor yang sama**, misalnya semua resep dibuat 3 kali lipat.

Contoh terselesaikan 1: menggabungkan dan membandingkan data

Sebuah toko kue mencatat pesanan hari Senin dan Selasa untuk tiga jenis kue (kolom: bolu, brownies, donat) selama dua pekan.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix} \text{ (pekan 1)}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix} \text{ (pekan 2)}$$

Baris pertama adalah Senin dan baris kedua Selasa. Kedua matriks berordo 2×3 dengan label yang sama, jadi boleh dijumlahkan dan dikurangkan:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 22 & 11 & 10 \\ 17 & 22 & 12 \end{pmatrix}, \qquad P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$P_1 + P_2$ adalah total pesanan dua pekan. Contohnya, unsur baris 2 kolom 2 bernilai 22: dalam dua pekan ada 22 brownies dipesan pada hari Selasa. $P_2 - P_1$ menunjukkan perubahan. Unsur negatif berarti pesanan **turun**. Pesanan brownies turun 1 pada hari Senin dan turun 2 pada hari Selasa, sedangkan pesanan bolu dan donat naik.

Bila toko itu ingin menyiapkan stok untuk pekan ketiga sebesar 1,5 kali pesanan pekan kedua, matriksnya adalah $1{,}5\,P_2$. Setiap unsur dikali 1,5, misalnya 12 bolu menjadi 18 bolu.

3. Perkalian dua matriks: "baris kali kolom"

Matriks A berordo $m \times n$ dapat dikalikan dengan B berordo $n \times p$, dan hasilnya berordo $m \times p$:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Angka **dalam** (n) harus sama. Angka **luar** (m dan p) menjadi ordo hasil. Unsur c_{ij} adalah baris ke-i dari A dikalikan kolom ke-j dari B, lalu dijumlahkan:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

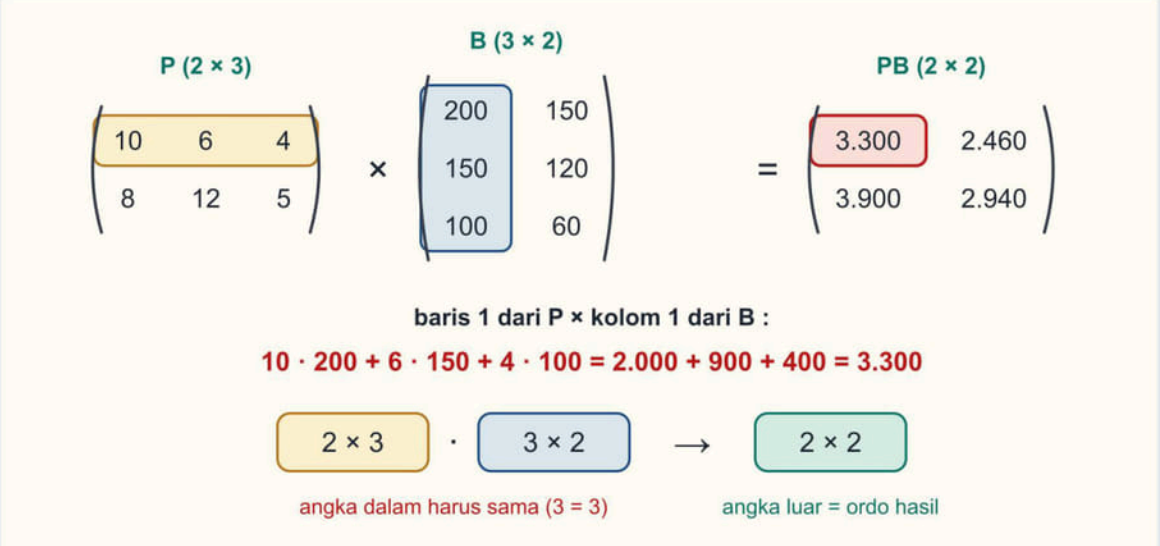
Mengapa "baris kali kolom"? Aturan ini bukan kesepakatan sembarangan. Bayangkan kamu ingin tahu berapa gram tepung yang dipakai pada hari Senin, bila Senin dipesan 10 bolu, 6 brownies, dan 4 donat. Setiap jenis kue menyumbang "banyak kue × tepung per kue":

$$\underbrace{10 \cdot 200}_{\text{bolu}} + \underbrace{6 \cdot 150}_{\text{brownies}} + \underbrace{4 \cdot 100}_{\text{donat}} = 3.300 \text{ gram}$$

Bilangan 10, 6, 4 adalah **baris** Senin pada matriks pesanan, sedangkan 200, 150, 100 adalah **kolom** tepung pada matriks bahan. Jadi satu unsur hasil kali selalu berarti "total satu hal (tepung) untuk satu pihak (Senin)". Itulah sebabnya kita memasangkan unsur ke-1 dengan ke-1, ke-2 dengan ke-2, dan seterusnya, lalu menjumlahkan. Bila baris punya tiga bilangan tetapi

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

kolom hanya dua, ada satu jenis kue yang tidak punya pasangan resep. Perkalian tidak bisa diselesaikan. Inilah alasan **angka dalam ordo harus sama** (Gambar 1.3).



Gambar 1.3 Unsur baris 1 kolom 1 dari PB adalah baris 1 dari P dikalikan kolom 1 dari B (unsur demi unsur), lalu dijumlahkan. Angka dalam ordo (3 dan 3) harus sama; angka luar (2 dan 2) menjadi ordo hasil. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Makna dalam konteks. Syarat "angka dalam sama" bukan sekadar aturan hitung. Syarat itu berarti **label kolom A harus sama dengan label baris B**. Label itulah yang "habis" saat dikalikan. Label baris A dan label kolom B menjadi label hasil.

Matriks	Baris	Kolom
Pesanan P	hari	jenis kue
Bahan B	jenis kue	bahan
Hasil PB	hari	bahan

Jadi PB menjawab pertanyaan "berapa gram setiap bahan yang diperlukan pada setiap hari?". Satuannya juga ikut "berkalian": buah dikali gram per buah menghasilkan gram (Gambar 1.4). Bila satuan hasil yang kamu peroleh aneh, misalnya "buah kuadrat", hampir pasti urutan perkalianmu terbalik.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.4 Label kolom matriks kiri harus sama dengan label baris matriks kanan; label itu "habis", dan label luar menjadi label hasil. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 2: dapatkah dikalikan?

Diketahui matriks A berordo 2×3, B berordo 3×2, C berordo 3×3, dan D berordo 1×3. Tentukan perkalian mana yang dapat dihitung dan berapa ordo hasilnya.

Perkalian	Ordo kiri × ordo kanan	Angka dalam sama?	Ordo hasil
AB	$(2 \times 3)(3 \times 2)$	ya, 3 = 3	2×2
BA	$(3 \times 2)(2 \times 3)$	ya, 2 = 2	3×3
AC	$(2 \times 3)(3 \times 3)$	ya	2×3
CA	$(3 \times 3)(2 \times 3)$	tidak, $3 \neq 2$	tidak dapat dihitung
DC	$(1 \times 3)(3 \times 3)$	ya	1×3
CD	$(3 \times 3)(1 \times 3)$	tidak, $3 \neq 1$	tidak dapat dihitung

Perhatikan AB dan BA: keduanya dapat dihitung, tetapi ordonya pun berbeda. Ini bukti cepat bahwa urutan perkalian matriks tidak boleh ditukar. Di soal berkonteks, periksa juga **makna** labelnya. Perkalian yang ordonya cocok belum tentu bermakna bila labelnya tidak cocok.

Contoh terselesaikan 3: total bahan

Pesanan pekan 1 dari Contoh 1 ditulis lagi sebagai tabel berikut.

	Bolu	Brownies	Donat
Senin	10	6	4
Selasa	8	12	5

Kebutuhan bahan setiap kue memakai matriks B di atas. Tentukan kebutuhan tepung dan gula setiap hari.

Penyelesaian. P berordo 2×3 dan B berordo 3×2. Angka dalam sama (3, yaitu jenis kue), jadi hasilnya berordo 2×2 (hari × bahan).

$$PB = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 & 150 \\ 150 & 120 \\ 100 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 + 900 + 400 & 1.500 + 720 + 240 \\ 1.600 + 1.800 + 500 & 1.200 + 1.440 + 300 \end{pmatrix} =$$

Artinya: Senin memerlukan 3.300 g tepung dan 2.460 g gula; Selasa memerlukan 3.900 g tepung dan 2.940 g gula.

Lanjutan. Kebutuhan bahan untuk pekan 2 adalah P_2B, dan kebutuhan dua pekan sekaligus adalah $(P_1 + P_2)B$. Kamu tidak perlu menghitung $(P_1 + P_2)B$ dari awal, karena sifat distributif (bagian 4) menjamin $(P_1 + P_2)B = P_1B + P_2B$:

$$P_2B = \begin{pmatrix} 3.750 & 2.760 \\ 4.000 & 2.970 \end{pmatrix}, \qquad P_1B + P_2B = \begin{pmatrix} 7.050 & 5.220 \\ 7.900 & 5.910 \end{pmatrix}$$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Hitung sendiri $(P_1 + P_2)B$ memakai $P_1 + P_2$ dari Contoh 1. Hasilnya harus sama persis. Cek seperti ini berguna untuk memastikan hitunganmu tidak keliru.

Contoh terselesaikan 4: mencari unsur yang hilang

Pada suatu hari toko itu menerima pesanan 12 bolu, 9 brownies, dan 6 donat jenis baru. Kebutuhan gula per kue berturut-turut 15 g, 20 g, dan k g. Total gula yang dipakai 630 g. Tentukan k.

Penyelesaian. Kamu tidak perlu menghitung seluruh hasil kali, cukup **satu unsur** yang memuat k, yaitu baris pesanan dikali kolom gula:

$$12 \cdot 15 + 9 \cdot 20 + 6 \cdot k = 630 \;\Rightarrow\; 180 + 180 + 6k = 630 \;\Rightarrow\; k = 45$$

Satu donat jenis baru memerlukan 45 g gula. Inilah pola SA-3: soal memberikan hasil kali, lalu menanyakan satu unsur yang hilang.

4. Sifat-sifat yang sering diuji

1. **Umumnya $AB \neq BA$.** Contohnya ada di bawah daftar ini. Dalam konteks, BP bahkan sering **tidak dapat** dihitung atau tidak bermakna. Urutan perkalian mengikuti label, bukan kebiasaan.
2. **Asosiatif dan distributif:** $(AB)C = A(BC)$ dan $A(B + C) = AB + AC$. Sifat distributif berguna untuk menghitung **perubahan**. Bila harga naik sebesar matriks ΔH, tagihan naik sebesar $P\,\Delta H$, jadi kamu tidak perlu menghitung ulang semuanya.
3. **Mengalikan dengan matriks kolom yang semua unsurnya 1** menjumlahkan setiap baris, jadi hasilnya adalah total tiap baris. Ini cara cepat menghitung "total barang" tanpa bobot.
4. **Matriks identitas** I (1 pada diagonal utama, 0 di tempat lain) bersifat seperti angka 1: $AI = IA = A$.

Contoh untuk sifat 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad CA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad AC \neq CA$$

Perhatikan apa yang terjadi: mengalikan C di **kanan** menukar kedua kolom A, sedangkan mengalikan C di **kiri** menukar kedua baris A. Dua pekerjaan yang berbeda, jadi hasilnya berbeda. Dalam konteks, perbedaannya bahkan lebih jelas: "pesanan × resep" bermakna total bahan, sedangkan "resep × pesanan" memasangkan bahan dengan hari, yang tidak bermakna apa pun.

5. Menafsirkan hasil operasi matriks

Soal tipe SA-4 memberi beberapa pernyataan, lalu kamu menilai mana yang benar. Pernyataannya hampir selalu berupa **perbandingan** (lebih besar, sama besar, terbesar), **selisih**, **total**, atau **perubahan** bila satu data berubah.

Contoh terselesaikan 5: menilai pernyataan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tiga agen perjalanan X, Y, dan Z menjual kursi kelas ekonomi, bisnis, dan eksekutif untuk satu keberangkatan. Banyak kursi yang terjual dan harga per kursi (dalam ribu rupiah) adalah sebagai berikut.

$$K = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 2 \\ 20 & 20 & 4 \\ 25 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X \\ \leftarrow Y, \\ \leftarrow Z \end{matrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. Hasil kalinya dalam ribu rupiah:

$$KH = \begin{pmatrix} 4.500 + 2.500 + 800 \\ 3.000 + 5.000 + 1.600 \\ 3.750 + 3.750 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.800 \\ 9.600 \\ 7.500 \end{pmatrix}$$

Pernyataan	Nilai	Alasan
Pendapatan Y terbesar	Benar	9.600 adalah yang terbesar
Pendapatan X lebih besar daripada Z	Benar	7.800 > 7.500
Z menjual kursi paling banyak, jadi pendapatannya terbesar kedua	Salah	Z menjual 40 kursi, paling sedikit (X: 42, Y: 44), dan pendapatannya justru terkecil
Total pendapatan lebih dari Rp25.000.000	Salah	$7.800 + 9.600 + 7.500 = 24.900$ ribu
Jika harga eksekutif naik Rp100.000, pendapatan Y naik Rp400.000	Benar	perubahan = $4 \times 100 = 400$ ribu (sifat distributif)

Perhatikan pernyataan ketiga. Pernyataan itu memadukan data yang benar (banyak kursi) dengan kesimpulan yang tidak mengikuti. Pola pengecoh seperti ini sangat sering muncul.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal matriks berkonteks

1. **Labeli dulu.** Tulis label baris dan kolom setiap matriks (atau tabel di gambar) sebelum menghitung apa pun.
2. **Cocokkan label tengah.** Susun perkalian sehingga label kolom matriks kiri sama dengan label baris matriks kanan. Tentukan ordo hasil dan arti setiap unsurnya.
3. **Hitung secukupnya.** Bila yang ditanya satu unsur (misalnya kebutuhan air), hitung **satu baris × satu kolom** saja. Bila yang ditanya perbandingan, hitung semua unsur yang dibandingkan.
4. **Tulis hasil lengkap dengan satuan** (ribu rupiah, gram, mililiter). Banyak pengecoh hanya bermain di satuan.
5. **Untuk PG kompleks atau Benar/Salah, nilai setiap pernyataan secara terpisah.** Jangan berhenti setelah menemukan satu pernyataan benar.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

6. **Cek ulang dengan kolom lain.** Bila soal memberikan total untuk beberapa kolom, pakai kolom yang tidak ditanya untuk memastikan susunan matriksmu benar (lihat pembahasan SA-3).

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Urutan perkalian terbalik	Menghitung bahan × pesanan sehingga labelnya tidak cocok	Cocokkan label tengah sebelum mengalikan
Baris dibaca sebagai kolom	Data "per jenis minuman" ditulis per kolom padahal soal menuliskannya per baris	Baca keterangan "baris: ..., kolom: ..." di soal
"Paling banyak barang" dianggap "paling besar nilainya"	Hotel dengan kamar terbanyak dianggap berpendapatan terbesar (pengecoh SA-4)	Hitung nilai uangnya. Banyak barang ≠ besar pendapatan
Selisih yang "terasa" sama	Menganggap selisih antarhotel sama karena angkanya berdekatan	Hitung ketiga selisih satu per satu
Satuan dan ribuan	Hasil dalam ribu rupiah dibandingkan dengan Rp20.000.000 tanpa dikonversi	Tulis satuan di setiap hasil
Perubahan dihitung ulang dari awal	Membuang waktu dan rawan salah	Pakai $P\,\Delta H$ (sifat distributif)
Unsur hilang disamakan dengan baris lain	Mengira kebutuhan bahan KA sama dengan WJ (pengecoh 50 ml di SA-3)	Susun persamaan dari satu baris × satu kolom

BEDAH SOAL ASLI

Soal pertama di bawah (SA-3) dijawab benar oleh 40,93 % peserta. Polanya persis Contoh terselesaikan 4: satu unsur matriks bahan tidak diketahui, sedangkan hasil kalinya diketahui. Kunci keberhasilannya adalah memilih **kolom air saja**, bukan menghitung semua kolom.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah pabrik minuman tradisional memproduksi tiga jenis minuman, yaitu wedang jahe (WJ), beras kencur (BK), dan kunir asem (KA). Dalam proses produksinya digunakan tiga bahan utama, yaitu jahe (J) dalam gram, gula merah (GM) dalam gram, dan air (A) dalam mililiter. Setiap botol minuman memerlukan bahan sebagai berikut (baris: WJ, BK, KA; kolom: J, GM, A).

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 50 \\ 10 & 25 & 40 \\ 12 & 8 & k \end{bmatrix}$$

Pada suatu hari pabrik tersebut menerima pesanan WJ, BK, dan KA berturut-turut 100, 120, dan 80 botol, ditulis $P = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 80 \end{bmatrix}$.

Jumlah bahan baku yang digunakan untuk seluruh pesanan adalah J $= 4.160$ gram, GM $= 5.140$ gram, dan A $= 13.000$ ml.

Banyak air yang dibutuhkan untuk memproduksi satu botol kunir asem adalah ....

A. 30 ml
B. 35 ml
C. 40 ml
D. 45 ml
E. 50 ml

Pembahasan **Kunci: C**

Konsep: total bahan $= P \cdot B$ (matriks 1×3 dikali 3×3 menghasilkan 1×3). Unsur ke-j hasil kali = baris P dikali kolom ke-j matriks B.

Langkah 1 – Kolom air (kolom ke-3).

$100 \cdot 50 + 120 \cdot 40 + 80 \cdot k = 13.000$

Langkah 2 – Hitung. $5.000 + 4.800 + 80k = 13.000 \Rightarrow 80k = 3.200 \Rightarrow k = 40$.

Cek ulang kolom lain: J: $100 \cdot 20 + 120 \cdot 10 + 80 \cdot 12 = 2.000 + 1.200 + 960 = 4.160$ ✓; GM: $1.500 + 3.000 + 640 = 5.140$ ✓.

Catatan: pada naskah sumber, total J dan GM tertulis 4.360 dan 4.960; angka itu tidak cocok dengan data matriks sehingga diperbaiki menjadi 4.160 dan 5.140. Kunci tidak berubah karena hanya kolom air yang diperlukan.

Analisis pilihan:

- 30 ml ✗ → total air menjadi $9.800 + 2.400 = 12.200$.
- 35 ml ✗ → 12.600.
- 40 ml ✓ → 13.000.
- 45 ml ✗ → 13.400.
- 50 ml ✗ → 13.800; pengecoh ini muncul bila mengira KA sama dengan WJ.

Jawaban: C.

Soal berikutnya (SA-4) dijawab benar hanya oleh 20,79 % peserta. Penyebab utamanya: (1) peserta tidak menyusun data gambar menjadi matriks **hotel × tipe kamar** dikali **tipe kamar × harga**; (2) peserta tergoda pernyataan yang "terasa benar", misalnya hotel dengan kamar

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

terbanyak berpendapatan terbesar; (3) peserta lupa bahwa total pendapatan ditulis dalam ribu rupiah. Kerjakan dulu sebelum membaca pembahasannya.

►. Seorang pemilik hotel mengelola 3 hotel yang berada di kota yang berbeda. Ketiga hotel memiliki konsep dan tipe kamar yang sama, yaitu *Standard Room*, *Deluxe Room*, dan *Suite Room*, dengan kapasitas dan harga per malam seperti pada gambar.
Pemilik hotel akan menghitung pendapatan ketiga hotel tersebut. Bagaimana kondisi pendapatan ketiga hotel dalam 1 hari jika semua tipe kamar terisi penuh?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



KAPASITAS KAMAR HOTEL

TIPE KAMAR	HOTEL A	HOTEL B	HOTEL C	Harga (per malam)
Standard Room	9	6	7	Rp 150.000
Deluxe Room	6	7	5	Rp 500.000
Suite Room	3	2	4	Rp 1.000.000

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Pendapatan Hotel A dan Hotel C sama besar.
☐ B. Pendapatan Hotel B lebih besar daripada Hotel A.
☐ C. Pendapatan paling besar diperoleh dari Hotel C.
☐ D. Masing-masing hotel memiliki selisih pendapatan yang sama besar.
☐ E. Pendapatan yang diperoleh dari ketiga hotel tersebut lebih dari Rp20.000.000,00.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: C, E**

Konsep: susun matriks kapasitas (baris = hotel, kolom = tipe kamar) lalu kalikan dengan matriks harga (kolom), dalam ribu rupiah.

$$\begin{bmatrix}9 & 6 & 3\\ 6 & 7 & 2\\ 7 & 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}150\\ 500\\ 1.000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.350+3.000+3.000\\ 900+3.500+2.000\\ 1.050+2.500+4.000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.350\\ 6.400\\ 7.550\end{bmatrix}$$

Jadi pendapatan Hotel A = Rp7.350.000, Hotel B = Rp6.400.000, Hotel C = Rp7.550.000.

Analisis tiap pernyataan:

1. ✗ A (7.350) ≠ C (7.550).
2. ✗ B (6.400) lebih **kecil** daripada A.
3. ✓ Hotel C paling besar.
4. ✗ Selisih A–B $= 950$, C–A $= 200$, C–B $= 1.150$; tidak sama.
5. ✓ Total $7.350 + 6.400 + 7.550 = 21.300$ ribu = Rp21.300.000 > Rp20.000.000.

Jebakan: Hotel A punya kamar terbanyak (18 kamar), tetapi Hotel C punya *Suite* terbanyak (harga tertinggi), sehingga pendapatannya paling besar. Banyak kamar ≠ besar pendapatan.

Jawaban: pernyataan 3 dan 5.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memadukan dua operasi yang diuji: selisih dua matriks penjualan ($F - J$) dan hasil kali matriks penjualan dengan vektor harga (Jh dan Fh). Ikuti langkah 1–6 di atas: beri label baris (cabang) dan kolom (barang) pada setiap matriks, lalu nilai kelima pernyataan satu per satu.

►. Penjualan dua cabang toko alat tulis (dalam lusin) pada bulan Januari dan Februari dicatat sebagai berikut.

Januari	Buku tulis	Pulpen	Pensil
Cabang 1	30	24	18
Cabang 2	26	20	22

Februari	Buku tulis	Pulpen	Pensil
Cabang 1	34	20	24
Cabang 2	26	25	18

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kedua tabel ditulis sebagai matriks J dan F (baris = cabang, kolom = barang). Harga per lusin dinyatakan $h = \begin{bmatrix} 60 \\ 36 \\ 24 \end{bmatrix}$ (ribu rupiah), berturut-turut buku tulis, pulpen, dan pensil.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Unsur baris ke-2 kolom ke-2 matriks $F - J$ bernilai 5, artinya penjualan pulpen cabang 2 naik 5 lusin.

☐ B. Total pendapatan kedua cabang pada bulan Januari lebih besar daripada pada bulan Februari.

☐ C. Unsur baris ke-1 matriks Fh adalah 3.336, yaitu pendapatan cabang 1 bulan Februari Rp3.336.000.

☐ D. Matriks $J + F$ menunjukkan penjualan pensil cabang 1 dan cabang 2 selama dua bulan sama banyak.

☐ E. Matriks $F - J$ memuat tepat dua unsur negatif, yaitu pulpen cabang 1 dan pensil cabang 2.

Pembahasan **Kunci: A, C, E**

Konsep: selisih $F - J$ menyatakan perubahan penjualan tiap cabang dan barang; hasil kali matriks penjualan dengan vektor harga h menyatakan pendapatan tiap cabang.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓ — $25 - 20 = 5$.

• B ✗ — $Jh = \begin{bmatrix} 3.096 \\ 2.808 \end{bmatrix}$ (jumlah 5.904) dan $Fh = \begin{bmatrix} 3.336 \\ 2.892 \end{bmatrix}$ (jumlah 6.228); Februari lebih besar. *Jebakan:* hanya membandingkan pulpen yang turun.

• C ✓ — $34 \cdot 60 + 20 \cdot 36 + 24 \cdot 24 = 2.040 + 720 + 576 = 3.336$.

• D ✗ — kolom pensil $J + F$ adalah 42 (cabang 1) dan 40 (cabang 2). *Jebakan:* menjumlah per bulan, bukan per cabang.

• E ✓ — $F - J = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$; unsur negatifnya tepat dua.

Jawaban: A, C, dan E.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: pernyataan 2 tidak dapat dinilai dari kesan angka. Penjualan pulpen memang turun di cabang 1, tetapi buku tulis dan pensil naik, sehingga total pendapatan Februari tetap lebih besar. Pernyataan 4 menguji arti penjumlahan: $J + F$ menjumlahkan **dua bulan** untuk setiap cabang, jadi kolom pensilnya 42 dan 40, tidak sama. Setiap unsur hasil operasi harus dibaca menurut label baris dan kolomnya.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu label baris dan kolom matriksnya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Sebuah usaha katering mencatat pesanan nasi kotak dan rincian per kotak (dalam ribu rupiah) sebagai berikut.

Pesanan (kotak)	Menu A	Menu B
Sabtu	40	60
Minggu	50	30

Per kotak	Biaya bahan	Harga jual
Menu A	18	25
Menu B	15	20

Kedua tabel ditulis sebagai matriks $P = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 30 \end{bmatrix}$ dan $H = \begin{bmatrix} 18 & 25 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$, lalu dihitung $K = PH$ dengan unsur k_{ij}.

Nilai $k_{22} - k_{21}$ beserta artinya adalah ....

A. Rp500.000, yaitu keuntungan hari Minggu

B. Rp580.000, yaitu keuntungan hari Sabtu

C. Rp270.000, yaitu selisih biaya bahan hari Sabtu dan hari Minggu

D. Rp350.000, yaitu selisih pendapatan hari Sabtu dan hari Minggu

E. Rp500.000, yaitu selisih harga jual dan biaya bahan satu kotak

2. Dua petani, Ani dan Budi, memanen jeruk dan mangga. Hasil panen (kg) dan harga beli (ribu rupiah per kg) di dua pasar ditulis dalam matriks

$$Q = \begin{bmatrix} 120 & 80 \\ 90 & 150 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}.$$

Baris Q: Ani, Budi; kolom Q: jeruk, mangga. Baris H: jeruk, mangga; kolom H: pasar X, pasar Y. Setiap petani menjual seluruh panennya di satu pasar.

Agar pendapatannya sebesar-besarnya, Budi sebaiknya menjual ....

A. di pasar Y, dengan pendapatan Rp3.510.000

B. di pasar X atau Y sama saja, dengan pendapatan Rp2.880.000

C. di pasar X, dengan pendapatan Rp3.780.000

D. di pasar X, dengan pendapatan Rp2.700.000

E. di pasar Y, dengan pendapatan Rp7.290.000

3. Nilai tiga siswa pada komponen tugas, UTS, dan UAS ditulis dalam matriks N, dan bobot penilaian dalam vektor b:

$$N = \begin{bmatrix} 80 & 70 & 90 \\ 90 & 80 & 60 \\ 70 & 90 & 80 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Baris N berturut-turut Dina, Eko, dan Fani. Nilai akhir ketiga siswa adalah unsur-unsur

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Nb.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Nilai akhir Fani lebih tinggi daripada nilai akhir Dina.

☐ B. Nilai akhir Dina adalah 82.

☐ C. Perkalian $b^T N$ juga menghasilkan nilai akhir ketiga siswa.

☐ D. Bila bobotnya diubah menjadi $0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}4$, nilai akhir Eko menjadi 75.

☐ E. Rata-rata nilai akhir ketiga siswa adalah $78\frac{1}{3}$.

4. Penjualan tiket sebuah perusahaan bus pada bulan Juli dicatat dalam matriks T, dan harga tiket (ribu rupiah) dalam vektor h:

$$T = \begin{bmatrix} 120 & 40 \\ 80 & 70 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 150 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Baris T: rute A, rute B; kolom T: kelas ekonomi, kelas eksekutif (sesuai urutan h). Pada bulan Agustus banyak tiket setiap kelas di setiap rute naik 25%, sedangkan harga tetap. Pendapatan rute B pada bulan Agustus adalah ....

A. Rp33.000.000

B. Rp41.250.000

C. Rp37.500.000

D. Rp36.000.000

E. Rp78.750.000

5. Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ dengan a dan b bilangan real, dan $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $a + b = 3$.

☐ B. Nilai $a = -1$ juga memenuhi persamaan itu.

☐ C. $\det\left(A^2\right) = 16$.

☐ D. $A^2 - 4A = I$, dengan I matriks identitas.

☐ E. $A^2 - 3A = 4I$.

Kunci singkat: 1. A 2. C 3. B, D, E 4. B 5. A, C, E

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Dapatkah kamu menyebutkan arti satu unsur hasil kali PB dalam satu kalimat lengkap dengan satuannya?
- Bila soal hanya menanyakan satu nilai (misalnya kebutuhan air), baris dan kolom mana saja yang perlu kamu kalikan?
- Pada soal Benar/Salah, apakah kamu sudah memeriksa **setiap** pernyataan dengan hitungan, bukan dengan perasaan "kelihatannya benar"?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.1: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.1

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3

MATTL-1.2

◎ APA YANG DIUJI

Determinan dan invers adalah "alat kerja" matriks. Di TKA, keduanya muncul dalam dua cara. Pertama, sebagai soal langsung: hitung invers sebuah matriks, satu unsur invers, atau determinan suatu bentuk seperti $\det(2A)$. Kedua, sebagai alat untuk soal lain: membuka sandi, menyelesaikan sistem persamaan (sub bab 1.3), dan menghitung luas bayangan (sub bab 2.7).

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-1	Menentukan invers matriks berordo 2x2	32,96 %

Soal SA-1 hanya meminta invers sebuah matriks 2×2 yang sederhana, tetapi hanya sekitar 1 dari 3 peserta yang menjawab benar. Artinya, rumus invers sering **diingat setengah-setengah**: tanda yang diubah salah, letak unsur tidak ditukar, atau pembagian dengan determinan terlupa. Sub bab ini membangun rumusnya dari alasannya, agar kamu tidak bergantung pada hafalan.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menghitung determinan matriks 2×2 dan 3×3 (aturan Sarrus atau ekspansi kofaktor);
- menentukan kapan sebuah matriks tidak memiliki invers (matriks singular);
- menghitung invers matriks 2×2 dan memeriksanya dengan $AA^{-1} = I$;
- menghitung satu unsur invers matriks 3×3 tanpa menghitung seluruh inversnya;
- memakai sifat $\det(AB)$, $\det(kA)$, dan $\det(A^{-1})$ untuk menilai pernyataan Benar/Salah;
- menyelesaikan persamaan matriks $AX = C$ dan $XA = C$ dengan urutan perkalian yang benar.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

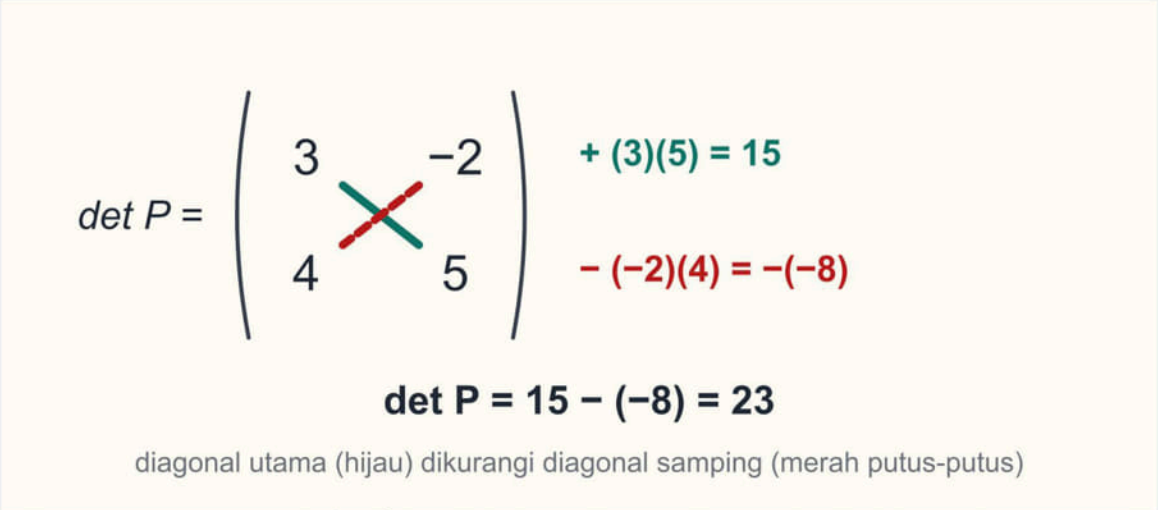
◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Determinan matriks 2×2

Determinan adalah satu bilangan yang dihitung dari matriks persegi (banyak baris sama dengan banyak kolom). Untuk matriks 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Cara mengingatnya: hasil kali diagonal utama (kiri atas ke kanan bawah) **dikurangi** hasil kali diagonal samping. Determinan ditulis $\det A$ atau $|A|$. Gambar 1.5 memperlihatkan langkahnya pada sebuah matriks yang memuat bilangan negatif. Tanda kurung pada hasil kali diagonal samping penting: bila salah satu unsurnya negatif, "dikurangi" berubah menjadi "ditambah".



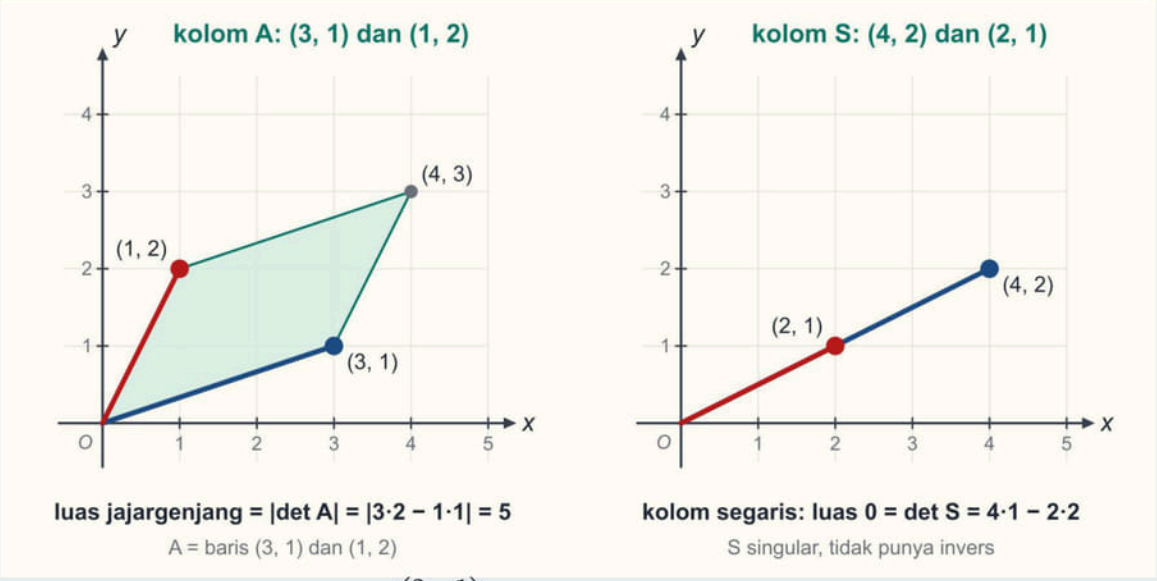
Gambar 1.5 Determinan matriks 2×2: hasil kali diagonal utama dikurangi hasil kali diagonal samping. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Determinan sebagai luas. Determinan bukan sekadar hasil hitung. Pandang kedua kolom matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sebagai dua anak panah dari titik asal, yaitu ke titik (a, c) dan ke titik (b, d). Kedua anak panah itu membentuk sebuah jajargenjang. Luas jajargenjang itu **tepat sama dengan** $|ad - bc|$ (Gambar 1.6, kiri). Alasannya (untuk unsur positif seperti pada gambar): persegi panjang pembungkus berukuran $(a + b) \times (c + d)$; buang empat segitiga siku-siku (dua berluas $\frac{1}{2}ac$, dua berluas $\frac{1}{2}bd$) dan dua persegi panjang kecil berluas bc di pojoknya. Sisanya $(a + b)(c + d) - ac - bd - 2bc = ad - bc$. Tanda determinan hanya menunjukkan arah putaran dari kolom pertama ke kolom kedua; luasnya adalah nilai mutlaknya.

Makna ini menjelaskan dua hal sekaligus. Pertama, bila kedua kolom **segaris** (yang satu kelipatan yang lain), jajargenjangnya gepeng menjadi sebuah ruas garis dan luasnya 0 (Gambar 1.6, kanan). Matriks seperti ini "meremukkan" bidang menjadi garis, sehingga tidak ada cara mengembalikannya: itulah sebabnya matriks berdeterminan 0 tidak punya invers. Kedua, bila setiap unsur dikali k, setiap sisi jajargenjang menjadi k kali, sehingga luasnya menjadi k^2 kali. Itulah asal sifat $\det(kA) = k^2 \det A$ untuk matriks 2×2 (bagian 5). Makna luas ini dipakai

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

lagi di sub bab 2.7. Untuk sub bab ini, yang terpenting adalah: **determinan menentukan apakah invers ada.**



Gambar 1.6 Kiri: kolom-kolom $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *membentuk jajargenjang berluas* $|\det A| = 5$*. Kanan: kolom-kolom* $S = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *segaris, luasnya 0, dan* $\det S = 0$*. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.*

Matriks singular. Matriks dengan determinan 0 disebut **singular** dan **tidak memiliki invers**. Matriks dengan determinan bukan 0 disebut **nonsingular**.

Contoh terselesaikan 1: determinan dan syarat singular

(a) Hitung determinan matriks berikut.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Tentukan semua nilai k agar matriks berikut tidak memiliki invers.

$$Q = \begin{pmatrix} k & 6 \\ 2 & k-1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. (a) $\det P = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23$. Perhatikan tanda: mengurangi bilangan negatif berarti menambah.

(b) Q tidak memiliki invers bila $\det Q = 0$:

$$k(k-1) - 6 \cdot 2 = 0 \;\Rightarrow\; k^2 - k - 12 = 0 \;\Rightarrow\; (k-4)(k+3) = 0$$

Jadi $k = 4$ atau $k = -3$. Cek: untuk $k = 4$, $\det Q = 4 \cdot 3 - 12 = 0$; untuk $k = -3$, $\det Q = (-3)(-4) - 12 = 0$. Soal "tentukan k agar tidak punya invers" hampir selalu berujung pada persamaan kuadrat. Bila diskriminannya negatif, berarti **tidak ada** k real yang membuat matriks singular.

2. Determinan matriks 3×3

Ada dua cara. Pakai yang paling cepat untuk soal yang dihadapi.

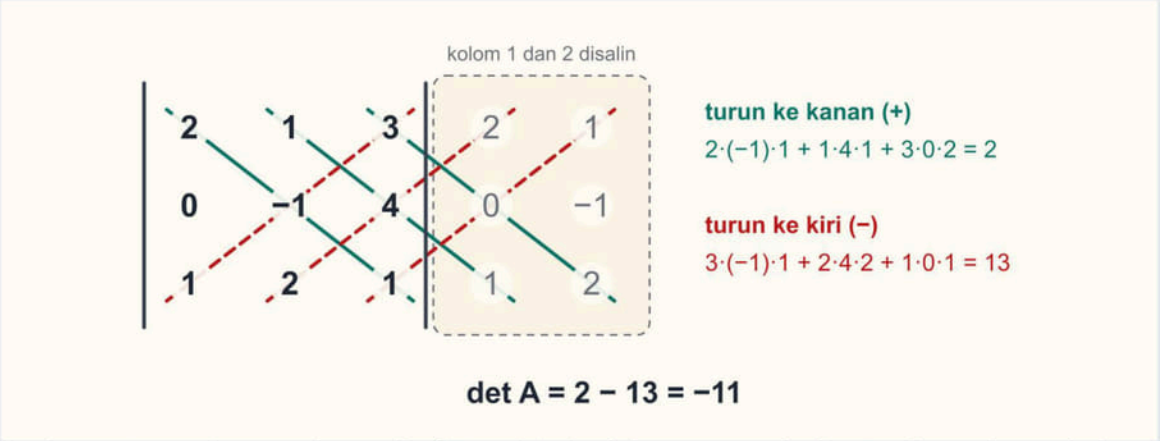
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cara 1 — aturan Sarrus. Salin kolom pertama dan kedua di sebelah kanan matriks, lalu jumlahkan tiga hasil kali diagonal ke kanan bawah dan kurangkan tiga hasil kali diagonal ke kiri bawah.

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

$$\det A = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Gambar 1.7 memperlihatkan keenam diagonal itu pada matriks Contoh 2. Aturan Sarrus **hanya** berlaku untuk matriks 3×3. Untuk matriks 2×2, "aturan Sarrus" sama saja dengan rumus $ad - bc$; untuk matriks 4×4, pola diagonal ini memberi jawaban yang salah.



Gambar 1.7 Aturan Sarrus pada matriks A Contoh 2: dua kolom pertama disalin, tiga diagonal turun ke kanan dijumlahkan (hijau), lalu dikurangi jumlah tiga diagonal turun ke kiri (merah). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Cara 2 — ekspansi kofaktor. Minor M_{ij} adalah determinan 2×2 yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus. **Kofaktor** adalah minor yang diberi tanda:

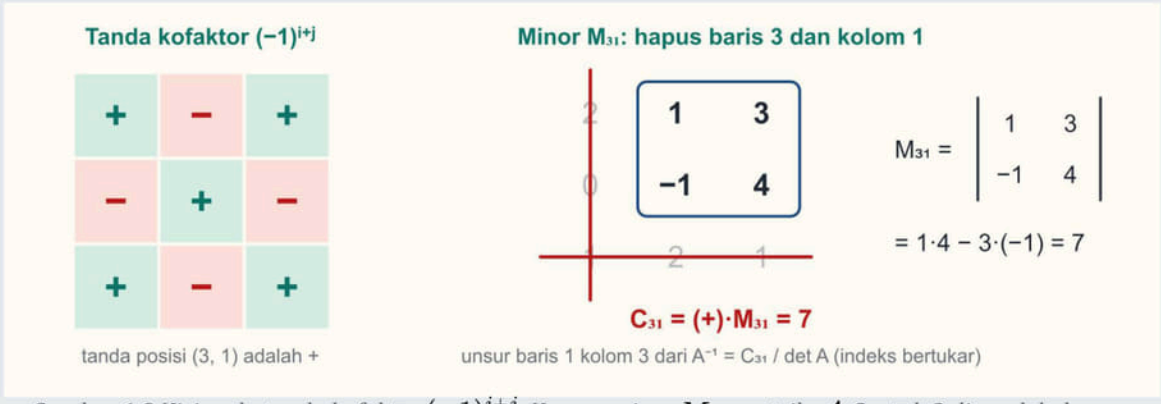
$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Tanda $(-1)^{i+j}$ membentuk pola papan catur:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Determinan = jumlah setiap unsur pada **satu** baris (atau satu kolom) dikali kofaktornya. Pilih baris atau kolom yang memuat angka 0 agar hitungan lebih pendek. Gambar 1.8 memperlihatkan cara mencari satu kofaktor: coret baris dan kolom unsur itu, hitung determinan 2×2 yang tersisa, lalu beri tanda menurut papan catur. Kesalahan paling sering bukan pada hitungan, tetapi pada **tanda**: posisi $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$, dan $(3,2)$ bertanda negatif.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.8 Kiri: pola tanda kofaktor $(-1)^{i+j}$. Kanan: minor M_{31} matriks A Contoh 2 diperoleh dengan menghapus baris ke-3 dan kolom ke-1; karena tanda posisi $(3,1)$ positif, $C_{31} = M_{31} = 7$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 2: dua cara, satu jawaban

Hitung determinan matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian dengan Sarrus. Diagonal ke kanan bawah: $2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$, $1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$, $3 \cdot 0 \cdot 2 = 0$. Jumlahnya 2. Diagonal ke kiri bawah: $3 \cdot (-1) \cdot 1 = -3$, $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$, $1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Jumlahnya 13. Jadi $\det A = 2 - 13 = -11$.

Penyelesaian dengan kofaktor kolom pertama (kolom ini memuat angka 0):

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9, \qquad C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$$

$$\det A = 2 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 1 \cdot C_{31} = 2(-9) + 0 + 7 = -11$$

Kedua cara memberi -11. Kofaktor C_{21} tidak perlu dihitung karena dikalikan 0.

3. Invers matriks 2×2

Invers matriks A, ditulis A^{-1}, adalah matriks yang memenuhi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Perannya seperti "kebalikan" sebuah bilangan: $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.

Mengapa rumusnya begitu. Coba kalikan A dengan matriks yang diperoleh dari menukar a dan d serta mengubah tanda b dan c:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (\det A)\, I$$

Hasilnya hampir I, hanya kelebihan faktor $\det A$. Jadi cukup dibagi $\det A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0$$

Dari alasan ini terlihat juga mengapa matriks singular tidak punya invers: membagi dengan 0 tidak mungkin.

Ringkasnya ada **tiga langkah**: (1) hitung $\det A$; (2) **tukar letak** a dan d, **ubah tanda** b dan c (unsur diagonal utama tidak diubah tandanya); (3) kalikan dengan $\frac{1}{\det A}$.

Matriks diagonal. Bila $b = c = 0$, invers cukup diperoleh dengan **membalik setiap unsur diagonal**:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{pmatrix}$$

Contoh terselesaikan 3: invers dan cek ulang

(a) Tentukan invers matriks berikut.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Tentukan invers matriks diagonal berikut.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. (a) $\det A = 4 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 2$. Tukar 4 dan 2, ubah tanda 6 dan 1, lalu bagi 2:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Cek ulang (selalu lakukan, hanya perlu 30 detik):

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4-3 & -12+12 \\ 1-1 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Balik setiap unsur diagonal: $\frac{1}{4}$ dan $\frac{1}{-1/3} = -3$.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Tanda negatif pada $-\frac{1}{3}$ tetap ikut, karena unsur diagonal utama tidak pernah diubah tandanya.

4. Invers matriks 3×3 dan "satu unsur saja"

Untuk matriks 3×3, alasannya sama dengan matriks 2×2: ada matriks yang bila dikalikan dengan A menghasilkan $(\det A)\, I$. Matriks itu disebut **adjoin**, yaitu **transpos** matriks kofaktor:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^{T}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$$

Karena ada transpos, **indeksnya bertukar**:

$$\text{unsur baris ke-}i\text{ kolom ke-}j\text{ dari } A^{-1} = \frac{C_{ji}}{\det A}$$

Menghitung seluruh invers 3×3 memerlukan sembilan kofaktor. Soal TKA biasanya hanya menanyakan **satu unsur**. Cukup hitung $\det A$ dan **satu** kofaktor.

Contoh terselesaikan 4: satu unsur invers

Dengan matriks A pada Contoh 2, tentukan unsur baris ke-1 kolom ke-3 dari A^{-1}.

Penyelesaian. Unsur itu adalah $\frac{C_{31}}{\det A}$, bukan $\frac{C_{13}}{\det A}$. Dari Contoh 2, $\det A = -11$ dan $C_{31} = 7$ (hapus baris 3 dan kolom 1; tanda posisi $(3,1)$ adalah $+$). Jadi unsurnya $\frac{7}{-11} = -\frac{7}{11}$.

Cek ulang tanpa menghitung semua invers: baris pertama A^{-1} adalah $\frac{1}{-11}(C_{11}, C_{21}, C_{31}) = \frac{1}{-11}(-9, 5, 7)$, yaitu $(\frac{9}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{7}{11})$. Baris ini dikali kolom pertama A, yaitu $(2, 0, 1)$, harus menghasilkan 1: $\frac{18}{11} + 0 - \frac{7}{11} = 1$. Benar. Dikali kolom ketiga A, yaitu

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$(3, 4, 1)$, harus menghasilkan 0: $\frac{27}{11} - \frac{20}{11} - \frac{7}{11} = 0$. Benar.

Seandainya kamu memakai C_{13}, hasilnya $\frac{1}{-11} = -\frac{1}{11}$. Itu adalah unsur baris ke-3 kolom ke-1, bukan yang ditanya. Pengecoh seperti ini selalu tersedia di pilihan jawaban.

5. Sifat-sifat determinan dan invers

Untuk matriks persegi A dan B berordo $n \times n$ dan bilangan k:

Sifat	Alasan singkat
$\det(AB) = \det A \cdot \det B$	sifat dasar determinan (bisa dicek dengan contoh)
$\det(A^T) = \det A$	menukar baris dan kolom tidak mengubah determinan
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$	dari $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det I = 1$
$\det(kA) = k^n \det A$	setiap baris dikali k; ada n baris, jadi faktor k muncul n kali
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	urutannya **terbalik**: kaus kaki dipakai sebelum sepatu, tetapi sepatu dilepas lebih dulu
$\det(A + B) \neq \det A + \det B$ (umumnya)	tidak ada sifat penjumlahan; hitung $A + B$ dulu

Sifat $\det(kA) = k^n \det A$ paling sering dijadikan jebakan. Untuk matriks 2×2, $\det(2A) = 4 \det A$. Untuk matriks 3×3, $\det(2A) = 8 \det A$.

Contoh terselesaikan 5: menilai pernyataan

Diketahui matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tentukan Benar atau Salah setiap pernyataan.

Penyelesaian. Hitung dulu $\det A = 12 - 2 = 10$ dan $\det B = 3 + 2 = 5$. Kemudian nilai setiap pernyataan dengan sifat, dan cek dengan hitungan langsung bila ragu.

Pernyataan	Nilai	Alasan
$\det(3A) = 90$	Benar	$3^2 \cdot 10 = 90$
$\det(2A) = 20$	Salah	$2^2 \cdot 10 = 40$; nilai 20 muncul dari jebakan $k \det A$
$\det(AB) = 50$	Benar	$10 \cdot 5 = 50$; cek: AB memiliki baris $(5, 0)$ dan $(10, 10)$, determinannya $50 - 0 = 50$
$\det(A + B) = 15$	Salah	$A + B$ memiliki baris $(4, 0)$ dan $(4, 7)$, determinannya 28
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{10}$	Benar	$\frac{1}{\det A}$
$\det(2B^T) = 20$	Benar	$2^2 \cdot \det B^T = 4 \cdot 5 = 20$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Perhatikan bahwa satu soal dapat memadukan beberapa sifat sekaligus, seperti pernyataan terakhir (transpos dan perkalian skalar).

6. Persamaan matriks: kalikan dari sisi yang benar

Invers dipakai untuk "membuka" persamaan matriks. Karena umumnya $AB \neq BA$ (sub bab 1.1), invers harus dikalikan dari **sisi tempat A berada**.

- $AX = C$ (A di kiri X): kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari **kiri**, sehingga $X = A^{-1}C$.
- $XA = C$ (A di kanan X): kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari **kanan**, sehingga $X = CA^{-1}$.

Alasannya: pada $XA = C$, kalikan kanan dengan A^{-1} menjadi $XAA^{-1} = CA^{-1}$. Karena $AA^{-1} = I$ dan $XI = X$, diperoleh $X = CA^{-1}$.

Contoh terselesaikan 6: membuka persamaan $XA = C$

Tentukan X yang memenuhi persamaan berikut.

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. Matriks A ada di kanan X, jadi $X = CA^{-1}$. $\det A = 3 - 2 = 1$, sehingga

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cek: XA memiliki baris $(3+1,\ 2+1) = (4, 3)$ dan $(6+1,\ 4+1) = (7, 5)$, sama dengan C. Bila kamu keliru menghitung $A^{-1}C$, hasilnya matriks dengan baris $(-10, -7)$ dan $(17, 12)$. Matriks ini tidak memenuhi persamaan, tetapi bisa saja dipasang sebagai pilihan jawaban.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal determinan dan invers

1. **Kenali ordo.** Matriks 2×2 memakai rumus cepat. Matriks 3×3 memakai Sarrus atau kofaktor.
2. **Hitung determinan dulu.** Bila hasilnya 0, matriks tidak punya invers, jadi jangan memaksakan rumus. Bila bukan 0, nilainya dipakai lagi pada langkah terakhir rumus invers.
3. **Untuk invers 2×2, ucapkan tiga langkahnya:** tukar a dan d, ubah tanda b dan c, bagi $\det A$.
4. **Untuk satu unsur invers 3×3, pakai C_{ji}** (indeks ditukar) dan tanda papan catur.
5. **Untuk bentuk seperti $\det(2A)$ atau $\det(AB^T)$, pakai sifat**, bukan menghitung matriksnya dulu. Hitungan langsung dipakai untuk cek bila waktu cukup.
6. **Cek ulang dengan $AA^{-1} = I$.** Cukup satu baris dikali satu kolom untuk memastikan unsur yang ditanya benar.

Soal kecukupan data. Sebagian soal TKA tidak meminta nilai, tetapi menanyakan apakah

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

informasi yang diberikan **cukup** untuk menjawab sebuah pertanyaan ya/tidak, misalnya "apakah matriks M memiliki invers?". Sebuah pernyataan disebut **cukup** bila dengan pernyataan itu jawabannya **pasti**: selalu "ya" atau selalu "tidak". Jawaban "pasti tidak" juga termasuk cukup.

Contoh terselesaikan 7 — cukup atau tidak cukup. Diketahui matriks berikut, dengan p dan q bilangan real.

$$N = \begin{pmatrix} p & 3 \\ 2 & q \end{pmatrix}$$

Pertanyaan: apakah N memiliki invers? Pernyataan (1): $pq = 6$. Pernyataan (2): $p = q$.

Penyelesaian. $\det N = pq - 6$.

- Pernyataan (1) saja: $\det N = 6 - 6 = 0$ untuk setiap p dan q yang memenuhi. Jawabannya pasti "tidak", jadi **cukup**.
- Pernyataan (2) saja: $\det N = p^2 - 6$. Untuk $p = 1$, determinannya -5 (punya invers). Untuk $p = \sqrt{6}$, determinannya 0 (tidak punya invers). Jawabannya tidak pasti, jadi **tidak cukup**.

Kesimpulan: pernyataan (1) saja cukup, pernyataan (2) saja tidak cukup. Cara kerjanya: cari **satu contoh "ya" dan satu contoh "tidak"**. Bila keduanya ada, pernyataan itu tidak cukup.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Tanda unsur diagonal utama ikut diubah	Invers matriks diagonal berunsur 4 dan $-\frac{1}{3}$ ditulis berunsur $-\frac{1}{4}$ dan 3	Yang diubah tandanya hanya b dan c; diagonal utama hanya ditukar letaknya
Letak a dan d tidak ditukar	Menulis $\frac{1}{\det A}$ dikali matriks dengan a tetap di kiri atas	Ucapkan "tukar, ubah tanda, bagi" setiap kali
Lupa membagi dengan determinan	Adjoin dianggap sebagai invers	Cek $AA^{-1} = I$; bila diagonalnya $\det A$, berarti belum dibagi
$\det(kA) = k \det A$	$\det(2A) = 20$ untuk $\det A = 10$ pada matriks 2×2	Faktor k dipangkatkan ordo: k^n
Tanda kofaktor terlupa	C_{32} ditulis sama dengan minornya	Pakai pola papan catur $(-1)^{i+j}$
Adjoin tanpa transpos	Unsur baris 1 kolom 3 dari A^{-1} dihitung dengan C_{13}	Unsur baris i kolom j invers memakai C_{ji}
Sifat penjumlahan yang tidak ada	$\det(A + B) = \det A + \det B$	Hitung $A + B$ dulu, baru determinannya
Urutan perkalian terbalik	Dari $XA = C$ menulis $X = A^{-1}C$	Invers dikalikan dari sisi tempat A berada

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kecukupan data dinilai dari "nilainya diketahui atau tidak"	Pernyataan dianggap tidak cukup karena a dan b tidak diketahui	Yang ditanya hanya ya/tidak; cukup bila jawabannya pasti

BEDAH SOAL ASLI

Soal SA-1 dijawab benar oleh 32,96 % peserta. Matriksnya diagonal, jadi hitungannya sangat pendek. Kesulitannya ada pada pilihan jawaban: hampir semua pengecoh adalah hasil **salah menerapkan rumus invers**, misalnya mengubah tanda unsur diagonal utama atau hanya menukar letak tanpa membalik nilai. Kerjakan dengan tiga langkah di atas, lalu cek dengan $FF^{-1} = I$.

►. Perhatikan matriks berikut!

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks F adalah ....

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: E**

Rumus invers matriks 2×2: jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $\det A = ad - bc \neq 0$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Langkah 1 – Determinan. $\det F = 2 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot 0 = 1$.

Langkah 2 – Tukar letak a dan d, ubah tanda b dan c. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Langkah 3 – Kalikan dengan $\frac{1}{\det F} = 1$. $F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Cek ulang: $F \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ✓. (Untuk matriks diagonal, inversnya cukup membalik setiap unsur diagonal.)

Analisis pilihan:

- A ✗: $F \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I$.
- B ✗ dan D ✗: tanda negatif muncul karena salah menerapkan "ubah tanda" pada unsur diagonal utama; yang diubah tandanya hanya b dan c.
- C ✗: hanya menukar letak tanpa membalik nilai.
- E ✓.

Jawaban: E.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memakai invers untuk menyelesaikan persamaan matriks $AX = B$. Kuncinya adalah sisi perkalian: karena X berada di **kanan** A, invers dikalikan dari **kiri**, sehingga $X = A^{-1}B$.

►. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Matriks X memenuhi $AX = B$.

Jumlah semua unsur matriks X adalah ....

A. -10
B. 65
C. -13
D. -11
E. 2

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: D**

Konsep: dari $AX = B$, kalikan kedua ruas dari **kiri** dengan A^{-1}: $X = A^{-1}B$. Untuk $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Langkah 1. $\det A = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1$, jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Langkah 2. $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 - 20 & 2 - 15 \\ -2 + 12 & -1 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -13 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$.

Langkah 3. Jumlah unsur: $-16 - 13 + 10 + 8 = -11$.

Cek ulang: $AX = \begin{bmatrix} -48 + 50 & -39 + 40 \\ -16 + 20 & -13 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = B$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: menghitung $BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -11 \end{bmatrix}$; dari $AX = B$ diperoleh $X = A^{-1}B$, urutannya tidak boleh ditukar.
- B: memakai "invers" $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ tanpa mengganti tanda unsur diagonal samping.
- C: hanya unsur baris ke-1 kolom ke-2.
- E: itu $\det X = \det B : \det A = 2 : 1$, bukan jumlah unsur.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: pengecoh -10 berasal dari BA^{-1}, yaitu mengalikan dari sisi yang salah, dan pengecoh 65 berasal dari "invers" yang tanda unsur diagonal sampingnya tidak diganti. Pengecoh 2 adalah $\det X = \frac{\det B}{\det A}$, besaran lain yang juga muncul dalam perhitungan. Cara tercepat memastikan jawaban adalah **cek balik**: kalikan A dengan X yang kamu peroleh dan lihat apakah hasilnya kembali menjadi B.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, hitung determinan lebih dulu dan tulis sifat yang kamu pakai.

1. Matriks $A = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tidak mempunyai invers (singular).

Jumlah semua nilai k yang memenuhi adalah ....

A. -1
B. 1
C. -4
D. 4
E. 2

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
Unsur baris ke-2 kolom ke-1 matriks $(AB)^{-1}$ adalah ....

A. 8
B. -17
C. 19
D. -7
E. -8

Kunci singkat: 1. B 2. E

✔ PERIKSA DIRI

- Dapatkah kamu menjelaskan, tanpa melihat buku, mengapa rumus invers 2×2 memuat "tukar a dan d, ubah tanda b dan c, bagi $\det A$"?
- Untuk menghitung unsur baris ke-2 kolom ke-3 dari invers matriks 3×3, kofaktor mana yang kamu perlukan, dan apa tandanya?
- Berapa $\det(3A)$ bila A berordo 3×3 dan $\det A = 2$? Bila jawabanmu 6, baca ulang bagian 5.

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.2: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.
next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.2

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks

MATTL-1.3

◎ APA YANG DIUJI

Sistem persamaan linear (SPL) sudah kamu kenal sejak SMP: dua atau tiga persamaan dengan variabel yang sama, diselesaikan dengan eliminasi atau substitusi. Di TKA Matematika Tingkat Lanjut, SPL diuji **dalam bentuk matriks**. Kamu diminta menyusun cerita menjadi persamaan $AX = B$, lalu menyelesaikannya dengan invers ($X = A^{-1}B$) atau aturan Cramer. Sering kali yang ditanya bukan nilai x dan y, melainkan **bentuk matriks yang benar** untuk mendapatkannya.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-2	Menentukan solusi dari persamaan linear dua variabel menggunakan konsep invers matriks	14,29 %

Angka 14,29 % berarti hanya sekitar 1 dari 7 peserta yang menjawab benar. Soal ini termasuk empat soal tersulit di seluruh paket. Padahal SPL-nya sendiri mudah diselesaikan dengan eliminasi. Kesulitannya ada pada tiga hal: **menyusun** data gambar menjadi matriks dengan susunan yang tepat, **memeriksa** apakah sebuah persamaan matriks benar-benar bernilai benar, dan **mengenali** bentuk yang setara (persamaan yang sudah disederhanakan). Sub bab ini melatih ketiganya satu per satu.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menyusun SPL dari tabel atau gambar konteks, termasuk tabel yang harus dibaca per kolom;
- menulis SPL sebagai $AX = B$ dan menjelaskan arti setiap baris dan kolom A;
- menyelesaikan SPL dengan $X = A^{-1}B$ dan menjelaskan mengapa BA^{-1} keliru;
- memakai aturan Cramer untuk SPL dua dan tiga variabel, termasuk bila hanya satu variabel yang ditanya;
- menentukan kapan SPL tidak memiliki penyelesaian tunggal ($\det A = 0$) dan membedakan "tidak ada" dengan "tak hingga banyaknya";
- menilai pernyataan Benar/Salah tentang persamaan matriks, determinan pengganti, dan kombinasi nilai variabel.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Dari cerita ke sistem persamaan

Setiap soal SPL berkonteks mempunyai pola yang sama: ada beberapa **jenis benda** yang banyaknya (atau harganya) dicari, dan ada beberapa **sumber daya atau total** yang diketahui (bahan, waktu, uang). Langkah menyusunnya:

1. **Tetapkan variabel dan urutannya.** Bila soal menulis "banyak sapi dan kambing berturut-turut x dan y", maka x = sapi dan y = kambing, tidak boleh ditukar. Urutan ini menentukan urutan kolom matriks dan urutan unsur jawaban.
2. **Satu sumber daya = satu persamaan.** Untuk setiap sumber daya, jumlahkan "kebutuhan per benda × banyak benda", lalu samakan dengan total yang tersedia.
3. **Periksa satuan.** Semua suku dalam satu persamaan harus bersatuan sama (semuanya kg, atau semuanya menit).

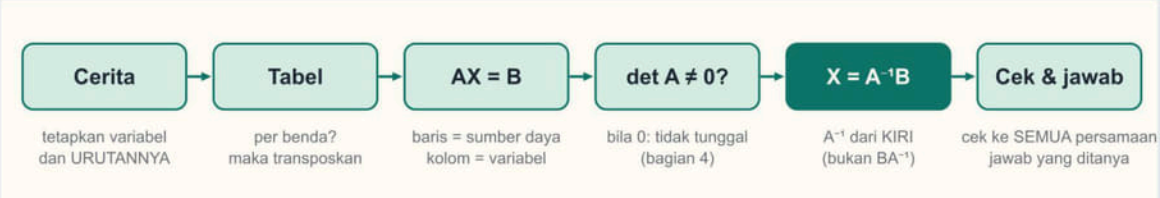
Kunci penyusunan matriks. Dalam $AX = B$:

- **setiap baris A = satu persamaan** (satu sumber daya atau satu total);
- **setiap kolom A = satu variabel**, dengan urutan yang sama seperti urutan unsur X;
- **setiap unsur B = total sumber daya** pada baris yang sama.

Tabel di soal tidak selalu tersusun seperti itu. Ada dua kemungkinan:

Bentuk tabel di soal	Contoh	Matriks A
Baris = sumber daya, kolom = benda	baris "pencantingan" dan "pewarnaan", kolom "batik tulis" dan "batik cap"	**sama** dengan tabel
Baris = benda, kolom = sumber daya (data "per benda")	"setiap ekor sapi butuh …, setiap ekor kambing butuh …"	**transpos** tabel: data satu benda menjadi satu **kolom** A

Gambar yang menuliskan kebutuhan "per ekor" atau "per bungkus" hampir selalu termasuk bentuk kedua. Inilah sumber kesalahan terbesar pada soal SPL berkonteks. Seluruh alur dari cerita sampai jawaban diringkas pada Gambar 1.9; setiap kotaknya dibahas di bagian-bagian berikut.



Gambar 1.9 Enam langkah menyelesaikan SPL berkonteks dengan matriks. Dua langkah yang paling sering salah: susunan tabel (transpos atau tidak) dan letak invers. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 1: menyusun model dari tabel per benda

Koperasi siswa sebuah SMA pada 2026 membuat keripik singkong dan keripik pisang (data disusun untuk contoh). Waktu kerja untuk setiap bungkus:

Produk (per bungkus)	Menggoreng (menit)	Mengemas (menit)
Keripik singkong	4	2
Keripik pisang	3	3

Setiap hari tersedia 240 menit menggoreng dan 180 menit mengemas, dan semuanya habis terpakai. Misalkan banyak bungkus keripik singkong dan keripik pisang berturut-turut x dan y. Susunlah persamaan matriksnya.

Penyelesaian. Sumber dayanya adalah waktu menggoreng dan waktu mengemas, jadi ada dua persamaan:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 240 & (\text{menggoreng}) \\ 2x + 3y = 180 & (\text{mengemas}) \end{cases}$$

Baris A = jenis pekerjaan, kolom A = jenis keripik:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Perhatikan: baris pertama tabel (keripik singkong: 4 dan 2) menjadi **kolom pertama** A. Matriks A adalah transpos tabel. Bila tabel disalin apa adanya, kamu mendapat sistem $4x + 2y = 240$ dan $3x + 3y = 180$. Sistem itu menghitung hal yang tidak ada artinya: pada $4x + 2y$, angka 2 adalah waktu **mengemas keripik singkong**, tetapi dikalikan dengan banyak **keripik pisang** dan dijumlahkan dengan waktu menggoreng.

2. Bentuk $AX = B$ dan penyelesaian $X = A^{-1}B$

Secara umum, SPL dua variabel dapat ditulis sebagai perkalian matriks:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Kesetaraan ini dapat kamu cek sendiri: baris pertama A dikali kolom X menghasilkan $ax + by$, sesuai aturan "baris × kolom" di sub bab 1.1. Matriks A disebut **matriks koefisien**, X **matriks variabel**, dan B **matriks konstanta**.

Bila $\det A \neq 0$, kalikan kedua ruas dengan A^{-1} **dari kiri** (aturan sub bab 1.2, bagian 6):

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; IX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Mengapa bukan BA^{-1}? Ada dua alasan. Pertama, aljabar: A terletak di **kiri** X, jadi A^{-1} harus dikalikan dari kiri. Kedua, ordo: B berordo 2×1 dan A^{-1} berordo 2×2. Perkalian BA^{-1} memerlukan angka dalam yang sama, padahal $1 \neq 2$, jadi perkalian itu **tidak terdefinisi**. Pilihan jawaban berbentuk BA^{-1} dengan B matriks kolom pasti salah.

Bentuk baris: $XA = B$. Kadang variabel ditulis sebagai matriks **baris** $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. Persamaannya

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

menjadi $XA = B$ dengan B juga matriks baris, dan penyelesaiannya $X = BA^{-1}$. Bentuk ini sah, tetapi matriks A-nya adalah **transpos** dari matriks pada bentuk kolom. Jadi yang menentukan bukan hafalan "$A^{-1}B$" atau "BA^{-1}", melainkan **letak A terhadap X** dan **susunan A** yang cocok dengan letak itu.

Persamaan setara. Sebuah persamaan boleh dikali atau dibagi dengan bilangan bukan nol tanpa mengubah penyelesaiannya. Misalnya $6x + 4y = 52$ setara dengan $3x + 2y = 26$. Akibatnya, satu SPL dapat ditulis dengan **beberapa** pasangan A dan B yang berbeda, dan semuanya benar. Bila sebuah pilihan jawaban memakai angka yang "tidak ada di soal", jangan langsung menolaknya. Periksa apakah angka itu berasal dari persamaan yang disederhanakan.

Contoh terselesaikan 2: invers, cek ulang, dan dua susunan

Selesaikan sistem pada Contoh 1.

Penyelesaian. $\det A = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6$, sehingga

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 720 - 540 \\ -480 + 720 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 180 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

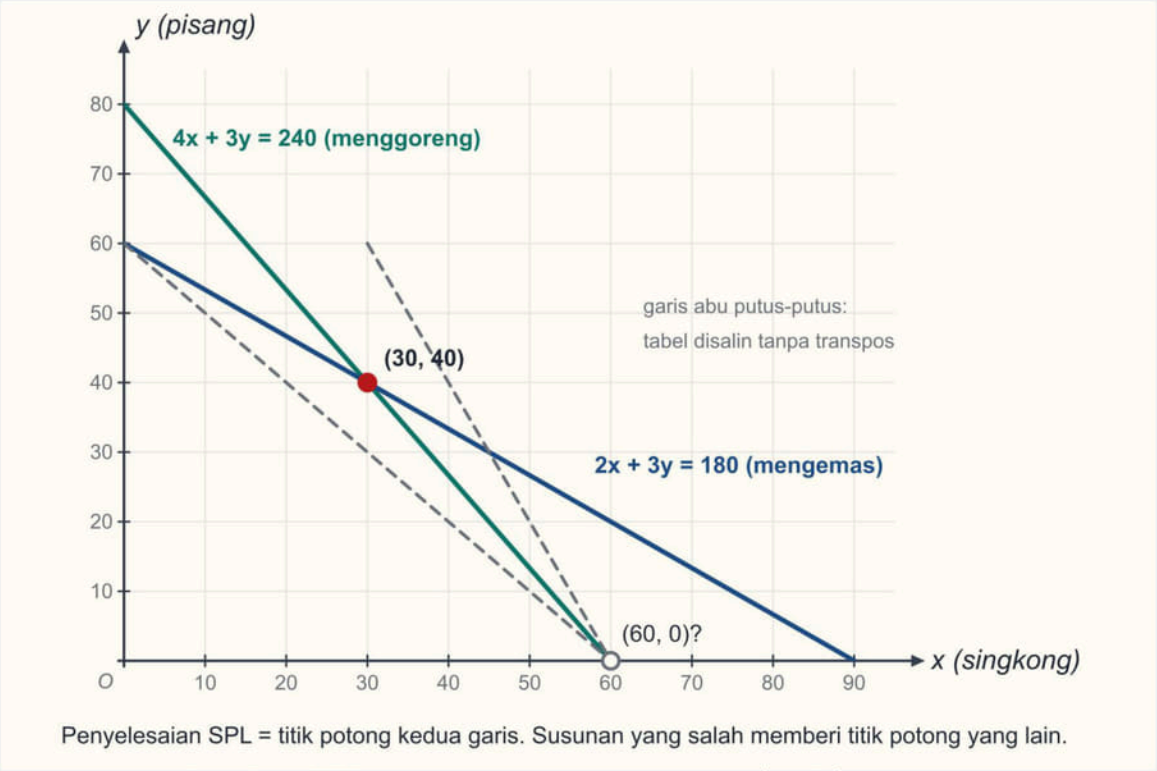
Jadi koperasi membuat 30 bungkus keripik singkong dan 40 bungkus keripik pisang setiap hari.

Cek ulang ke soal asli, bukan ke matriks buatanmu: menggoreng $4 \cdot 30 + 3 \cdot 40 = 240$ menit dan mengemas $2 \cdot 30 + 3 \cdot 40 = 180$ menit. Keduanya tepat habis.

Bila tabel disalin apa adanya (susunan salah), penyelesaiannya menjadi $x = 60$ dan $y = 0$. Hasil ini memenuhi waktu menggoreng ($4 \cdot 60 = 240$), tetapi waktu mengemasnya hanya $2 \cdot 60 = 120$ menit, bukan 180 menit. Pelajarannya: cek ulang harus ke **kedua** persamaan asli. Satu persamaan yang cocok belum membuktikan apa-apa.

Gambar 1.10 memperlihatkan hal yang sama secara geometris. Setiap persamaan adalah sebuah garis, dan penyelesaian adalah titik potongnya. Garis menggoreng dan garis mengemas berpotongan di $(30, 40)$. Dua garis dari susunan yang salah (abu-abu) berpotongan di titik lain, $(60, 0)$, yang hanya kebetulan terletak pada garis menggoreng.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.10 Garis $4x + 3y = 240$ dan $2x + 3y = 180$ berpotongan di $(30, 40)$. Garis putus-putus berasal dari tabel yang disalin tanpa transpos; titik potongnya $(60, 0)$ tidak memenuhi waktu mengemas. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Dengan bentuk baris, tabel boleh dipakai apa adanya, karena $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ dikali tabel menghasilkan $(4x + 3y,\ 2x + 3y)$:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 & 180 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 & 180 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 40 \end{pmatrix}$$

Hasilnya sama. Kedua cara benar karena susunan matriksnya cocok dengan letak X.

3. Aturan Cramer

Aturan Cramer menyelesaikan SPL hanya dengan determinan. Untuk SPL dua variabel di atas, definisikan:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

D_x adalah determinan A yang **kolom x-nya** (kolom pertama) diganti kolom konstanta. D_y adalah determinan A yang **kolom y-nya** (kolom kedua) diganti kolom konstanta. Penyelesaiannya:

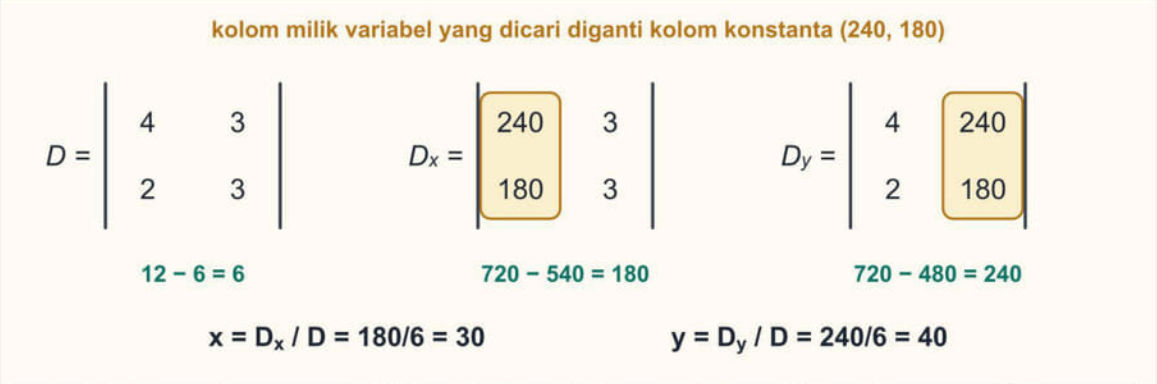
$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad D \neq 0$$

Mengapa rumusnya begitu. Hitung $X = A^{-1}B$ secara umum:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} pd - bq \\ aq - pc \end{pmatrix}$$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembilang x, yaitu $pd - bq$, tepat sama dengan D_x. Pembilang y, yaitu $aq - pc$, tepat sama dengan D_y. Jadi aturan Cramer adalah rumus invers yang ditulis ulang. Gambar 1.11 menunjukkan ketiga determinan untuk SPL keripik pada Contoh 1: kolom yang diwarnai adalah kolom konstanta yang menggantikan kolom variabel yang dicari.



Gambar 1.11 Aturan Cramer untuk SPL keripik: $D = 6$, $D_x = 180$, $D_y = 240$, sehingga $x = 30$ dan $y = 40$, sama dengan hasil invers pada Contoh 2. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Untuk SPL **tiga variabel**, aturannya sama: D adalah determinan matriks koefisien 3×3, dan D_x, D_y, D_z diperoleh dengan mengganti kolom variabel yang bersangkutan dengan kolom konstanta. Determinan 3×3 dihitung dengan Sarrus atau kofaktor (sub bab 1.2).

Kapan memakai Cramer? Saat soal hanya menanyakan **satu** variabel (cukup dua determinan), saat soal menyebut D, D_x, atau D_y secara langsung, atau saat SPL-nya tiga variabel dan invers 3×3 terlalu panjang.

Contoh terselesaikan 3: Cramer tiga variabel, satu yang ditanya

Sebuah toko alat tulis pada 2027 menjual tiga paket (data disusun untuk contoh). Harga setiap barang sama di semua paket.

Paket	Buku tulis	Pulpen	Pensil	Harga (ribu rupiah)
I	2	3	1	25
II	1	2	3	22
III	3	2	2	29

Misalkan harga satu buku tulis, satu pulpen, dan satu pensil berturut-turut x, y, dan z (ribu rupiah). Tentukan harga satu pulpen dengan aturan Cramer.

Penyelesaian. Tabel ini sudah berbentuk "baris = persamaan (paket), kolom = variabel (barang)", jadi A sama dengan tabelnya:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 22 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Hitung D dengan Sarrus. Diagonal ke kanan bawah:
$2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 8 + 27 + 2 = 37$. Diagonal ke kiri bawah:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6 + 12 + 6 = 24$. Jadi $D = 37 - 24 = 13$.

Pulpen adalah variabel **kedua**, jadi kolom **kedua** diganti konstanta:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 25 & 1 \\ 1 & 22 & 3 \\ 3 & 29 & 2 \end{vmatrix}$$

Diagonal ke kanan bawah: $2 \cdot 22 \cdot 2 + 25 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 29 = 88 + 225 + 29 = 342$. Diagonal ke kiri bawah: $1 \cdot 22 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 29 + 25 \cdot 1 \cdot 2 = 66 + 174 + 50 = 290$. Jadi $D_y = 342 - 290 = 52$ dan $y = \frac{52}{13} = 4$. Harga satu pulpen Rp4.000.

Cek ulang. Dengan cara yang sama, $D_x = 65$ dan $D_z = 39$, sehingga $x = 5$ dan $z = 3$. Paket I: $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 = 25$. Paket II: $5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 22$. Paket III: $3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 29$. Semuanya cocok.

Pengecoh yang biasa dipasang: $D_x = 65$ atau $D_z = 39$ (kolom yang diganti salah) dan harga barang lain. Sebelum mengganti kolom, tunjuk dulu kolom milik variabel yang ditanya.

4. Bila $\det A = 0$: tidak ada atau tak hingga banyaknya penyelesaian

Setiap persamaan linear dua variabel adalah sebuah **garis**. Penyelesaian SPL adalah **titik potong** garis-garis itu.

- $\det A \neq 0$: kedua garis berpotongan di tepat satu titik, jadi penyelesaiannya **tunggal**.
- $\det A = 0$ dan konstantanya **tidak** ikut sebanding: koefisien kedua persamaan sebanding, jadi kedua garis sejajar berlainan. **Tidak ada** penyelesaian (data saling bertentangan).
- $\det A = 0$ dan konstantanya **ikut** sebanding: kedua garis berimpit. Penyelesaiannya **tak hingga banyaknya** (satu persamaan hanya mengulang persamaan lain).

Dalam kedua kasus, invers A tidak ada dan aturan Cramer tidak dapat dipakai ($D = 0$). Dalam konteks, $\det A = 0$ berarti "data tidak cukup untuk menentukan nilai secara tunggal". Hati-hati: $\det A = 0$ **tidak** berarti penyelesaiannya 0, dan **tidak selalu** berarti tidak ada penyelesaian. Mengapa $\det A = 0$ sama dengan "garis sejajar"? Untuk $ax + by = p$ dan $cx + dy = q$, gradien kedua garis adalah $-\frac{a}{b}$ dan $-\frac{c}{d}$. Kedua gradien sama tepat ketika $ad = bc$, yaitu ketika $ad - bc = 0$. Ketiga keadaan itu digambar pada Gambar 1.12 memakai SPL pada Contoh 4 di bawah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.12 SPL Contoh 4 untuk tiga nilai a. Kiri: $a = 1$, $\det A \neq 0$, satu titik potong. Tengah: $a = -3$, garis sejajar berlainan, tidak ada penyelesaian. Kanan: $a = 2$, garis berimpit, tak hingga banyak penyelesaian. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 4: mencari parameter

Diketahui SPL berikut.

$$\begin{cases} ax + 2y = 4 \\ 3x + (a+1)y = 6 \end{cases}$$

Tentukan nilai a agar SPL tidak memiliki penyelesaian tunggal, lalu tentukan jenis penyelesaiannya untuk setiap nilai a itu.

Penyelesaian. Penyelesaian tidak tunggal bila $\det A = 0$:

$$a(a+1) - 2 \cdot 3 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 + a - 6 = 0 \;\Rightarrow\; (a-2)(a+3) = 0$$

Jadi $a = 2$ atau $a = -3$.

- $a = 2$: sistemnya $2x + 2y = 4$ dan $3x + 3y = 6$. Keduanya setara dengan $x + y = 2$. Garisnya berimpit, jadi penyelesaiannya **tak hingga banyaknya**.
- $a = -3$: sistemnya $-3x + 2y = 4$ dan $3x - 2y = 6$. Persamaan kedua dikali -1 menjadi $-3x + 2y = -6$. Ruas kiri sama, tetapi ruas kanannya 4 dan -6. Garisnya sejajar berlainan, jadi **tidak ada** penyelesaian.

Contoh ini menunjukkan bahwa nilai a yang membuat $\det A = 0$ dapat menghasilkan dua jenis keadaan yang berbeda. Soal B/S sering menguji perbedaan ini.

5. Menjawab yang ditanya, bukan hanya nilai variabel

Banyak soal tidak berhenti pada "$x = \ldots$ dan $y = \ldots$". Yang ditanya bisa berupa **kombinasi** (harga satu paket baru, $2x + y$, selisih), **unsur perantara** (D_y, matriks invers, bentuk persamaan matriks), atau **penilaian** beberapa pernyataan. Setelah mendapatkan nilai variabel, baca ulang kalimat pertanyaan dan hitung tepat hal itu.

Contoh terselesaikan 5: menilai pernyataan

Sebuah kafe pada 2026 menjual dua paket (data disusun untuk contoh). Paket Pagi berisi 2 kopi susu dan 1 roti bakar seharga Rp46.000. Paket Siang berisi 3 kopi susu dan 4 roti bakar seharga Rp104.000. Harga satuan sama di kedua paket. Misalkan harga satu kopi susu k dan satu roti bakar r (ribu rupiah), dan SPL-nya ditulis $AX = B$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 46 \\ 104 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. $\det A = 8 - 3 = 5$, sehingga

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 184 - 104 \\ -138 + 208 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 80 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Satu kopi susu Rp16.000 dan satu roti bakar Rp14.000. Cek: $2 \cdot 16 + 14 = 46$ dan $3 \cdot 16 + 4 \cdot 14 = 104$.

Pernyataan	Nilai	Alasan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

A^{-1} sama dengan $\frac{1}{5}$ dikali matriks berbaris $(4, -1)$ dan $(-3, 2)$	Benar	$\det A = 5$; tukar 2 dan 4, ubah tanda 1 dan 3
Pada aturan Cramer, $D_r = 70$	Benar	kolom kedua diganti konstanta: $2 \cdot 104 - 46 \cdot 3 = 208 - 138 = 70$, dan $r = \frac{70}{5} = 14$
Harga kopi dan roti dapat dihitung dengan $(46 \;\; 104) \cdot A^{-1}$	Salah	hasilnya $(-25{,}6;\; 32{,}4)$, bukan harga; bentuk baris memerlukan transpos A
Harga satu kopi susu dan satu roti bakar bersama-sama Rp30.000	Benar	$16 + 14 = 30$ ribu
Paket berisi 5 kopi susu dan 5 roti bakar seharga Rp140.000	Salah	$5 \cdot 16 + 5 \cdot 14 = 150$ ribu
Bila Paket Siang diganti 4 kopi susu dan 2 roti bakar seharga Rp92.000, harga satuan tidak dapat ditentukan secara tunggal	Benar	determinan baru $2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$, dan $92 = 2 \cdot 46$: persamaan kedua hanya kelipatan persamaan pertama

Perhatikan pernyataan ketiga. Bentuknya terlihat seperti rumus yang sah, tetapi susunan matriksnya tidak cocok dengan letak X. Pernyataan kelima adalah pola "kombinasi": cukup $5(k + r) = 5 \cdot 30$, tanpa menghitung ulang.

6. Jembatan ke program linear (sub bab 1.4)

Di sub bab berikutnya kamu akan mencari nilai maksimum atau minimum, misalnya keuntungan terbesar sebuah usaha. Nilai itu dicari pada **titik pojok** daerah penyelesaian. Titik pojok adalah **perpotongan dua garis batas**, dan perpotongan dua garis adalah penyelesaian SPL dua variabel. Jadi semua alat di sub bab ini (eliminasi, invers, atau Cramer) langsung dipakai lagi.

Contoh singkat: tentukan titik potong dua garis batas $x + 2y = 16$ dan $3x + y = 18$. Dengan aturan Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_x = \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = -20, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = -30$$

sehingga $x = \frac{-20}{-5} = 4$ dan $y = \frac{-30}{-5} = 6$. Titik pojoknya $(4, 6)$. Cek: $4 + 12 = 16$ dan $12 + 6 = 18$. Bila $\det = 0$, kedua garis batas sejajar dan tidak membentuk titik pojok. Di sub bab 1.4, langkah ini akan kamu lakukan untuk setiap pasang garis batas.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal SPL dengan matriks

1. **Tulis variabel dan urutannya** persis seperti kalimat soal ("berturut-turut x dan y").
2. **Tentukan bentuk tabel.** Data "per benda" (per ekor, per bungkus, per helai) masuk ke **kolom** A. Data "per sumber daya" masuk ke **baris** A.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. **Tulis SPL biasa dulu**, satu persamaan per sumber daya, lalu ubah menjadi $AX = B$. Langkah ini mencegah salah susun.
4. **Hitung** $\det A$**.** Bila 0, periksa apakah penyelesaiannya tidak ada atau tak hingga banyaknya. Bila bukan 0, lanjutkan.
5. **Pilih alat:** $X = A^{-1}B$ untuk mencari semua variabel atau memeriksa bentuk persamaan matriks; Cramer bila hanya satu variabel yang ditanya atau soal menyebut D_x, D_y, D_z.
6. **Cek ke soal asli.** Masukkan jawaban ke **setiap** persamaan semula, bukan ke matriks buatanmu.
7. **Untuk pilihan berupa persamaan matriks, hitung sendiri ruas kirinya.** Sebuah pilihan bisa menuliskan hasil yang benar di ruas kanan, padahal perkalian di ruas kirinya tidak menghasilkan angka itu. Ingat juga bahwa persamaan yang disederhanakan tetap sah.
8. **Jawab yang ditanya:** nilai variabel, kombinasi, D_y, atau bentuk matriks.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Tabel per benda disalin apa adanya	Kebutuhan pakan "per ekor sapi" ditulis sebagai baris A	Data satu benda = satu kolom A; tulis SPL biasa dulu
Urutan perkalian terbalik	Menulis $X = BA^{-1}$ dengan B matriks kolom	A di kiri X, jadi $X = A^{-1}B$; cek ordo 2×1 kali 2×2 tidak terdefinisi
Urutan variabel tertukar	Pada Contoh 1, menjawab $(40, 30)$ padahal (banyak keripik singkong, banyak keripik pisang) $= (30, 40)$	Urutan unsur X mengikuti kata "berturut-turut"
Urutan konstanta tertukar	Total rumput gamal ditaruh di baris rumput gajah	Unsur B harus sebaris dengan persamaan sumber dayanya
Lupa membagi dengan determinan	Memakai adjoin sebagai invers, hasilnya menjadi $\det A$ kali lipat	Ingat "tukar, ubah tanda, **bagi**"; cek $AA^{-1} = I$
Hanya mencocokkan ruas kanan	Memilih persamaan yang ruas kanannya sama dengan hasil eliminasimu tanpa menghitung ruas kirinya	Hitung sendiri hasil kali setiap pilihan
Menolak bentuk yang disederhanakan	Mengira pilihan salah karena konstantanya bukan angka di soal	Persamaan boleh dibagi atau dikali bilangan bukan nol; cek kesetaraannya
Kolom Cramer salah	Mengganti kolom pertama padahal yang ditanya variabel kedua	Tunjuk kolom variabel yang ditanya sebelum mengganti
$\det A = 0$ dianggap "solusinya 0" atau "pasti tidak ada solusi"	Pernyataan "SPL tidak punya penyelesaian" dinilai benar padahal persamaannya berimpit	Bandingkan konstanta: sebanding berarti tak hingga banyaknya, tidak sebanding berarti tidak ada
Menjawab nilai variabel padahal ditanya kombinasi	Menjawab harga kopi saja, padahal ditanya harga paket	Baca ulang pertanyaan setelah selesai menghitung

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

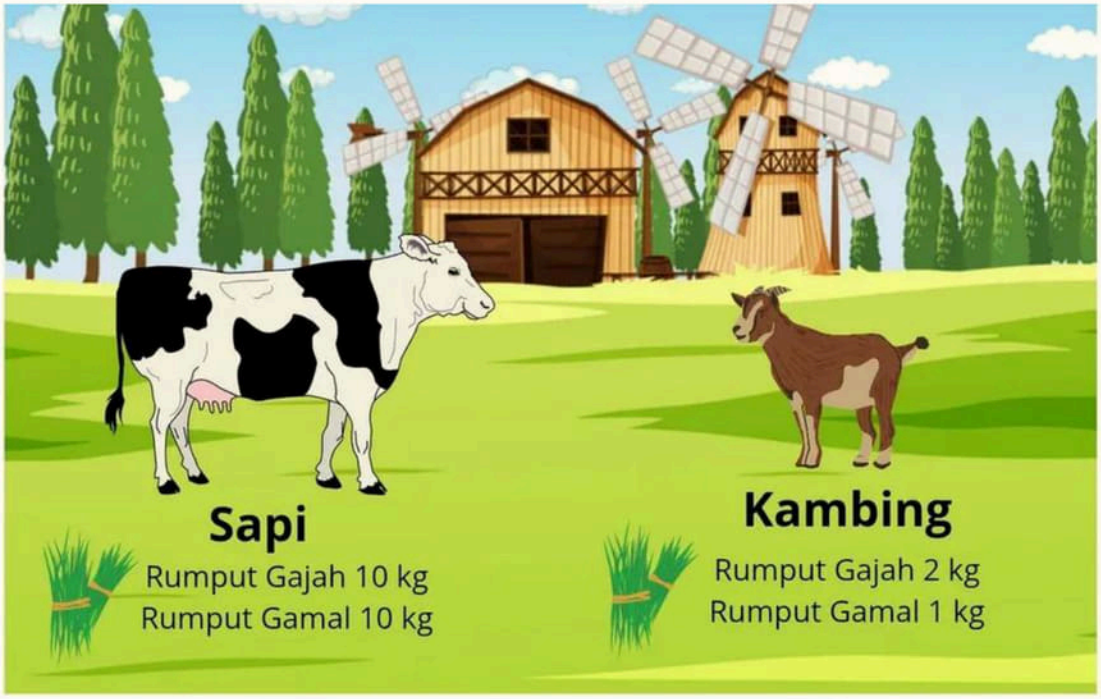
BEDAH SOAL ASLI

Soal SA-2 dijawab benar hanya oleh 14,29 % peserta. Ada tiga hal yang membuatnya sulit. Pertama, kebutuhan pakan diberikan **per ekor** (per variabel), jadi data seekor sapi harus menjadi **kolom** matriks koefisien, bukan baris. Kedua, setiap pilihan jawaban berupa persamaan lengkap "matriks × matriks = hasil". Ruas kanan sebuah pilihan bisa saja tampak benar walaupun perkalian di ruas kirinya tidak menghasilkan angka itu, jadi kamu harus menghitung sendiri. Ketiga, persamaan boleh disederhanakan lebih dulu, sehingga matriks dan konstanta pada pilihan yang benar bisa berbeda dari angka di gambar. Selesaikan dulu SPL-nya dengan cara apa pun untuk mengetahui jawabannya, lalu periksa setiap pilihan dengan langkah 7.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Pak Andi memiliki beberapa sapi dan kambing. Semua hewan ternaknya selalu diberi pakan berupa campuran rumput gajah dan rumput gamal. Setiap hari, ia selalu menyediakan 38 kg rumput gajah dan 34 kg rumput gamal untuk seluruh kambing dan sapi miliknya (tanpa sisa). Kebutuhan pakan setiap ekor ternak milik Pak Andi per hari ditunjukkan pada gambar.

Jika banyak sapi dan kambing yang dipelihara Pak Andi berturut-turut adalah x dan y, maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \ldots$



A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: E**

Langkah 1 – Model SPLDV dari gambar. Seekor sapi butuh 10 kg rumput gajah dan 10 kg rumput gamal; seekor kambing butuh 2 kg rumput gajah dan 1 kg rumput gamal.

- Rumput gajah: $10x + 2y = 38 \rightarrow$ dibagi $2 \rightarrow 5x + y = 19$
- Rumput gamal: $10x + y = 34$

Langkah 2 – Bentuk matriks. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix}$.

Langkah 3 – Invers matriks koefisien. $\det = 5 \cdot 1 - 1 \cdot 10 = -5$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Langkah 4 – Kalikan. $x = -\frac{19}{5} + \frac{34}{5} = 3$ dan $y = 2 \cdot 19 - 34 = 4$. Jadi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: 3 sapi dan 4 kambing.

Cek ulang: gajah $10 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 38$ ✓; gamal $10 \cdot 3 + 4 = 34$ ✓.

Analisis pilihan:

- A ✗: hasil $(15, 20)$ tidak memenuhi kebutuhan pakan.
- B ✗: perkaliannya sebenarnya menghasilkan $(40, 30)$, bukan $(4, 3)$, dan urutannya terbalik.
- C ✗: konstanta ditukar $(34, 38)$; hasil sebenarnya $(4{,}2;\ -4)$.
- D ✗: matriks $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$ belum dikalikan $\frac{1}{\det}$, sehingga hasilnya $(30, 40)$, bukan $(3, 4)$.
- E ✓: invers yang benar dan hasil yang benar.

Jawaban: E.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut menyusun SPL tiga variabel dari tabel harga tiket, seperti Contoh terselesaikan 1. Yang ditanya bukan satu harga, melainkan biaya gabungan 2 orang dewasa dan 6 pelajar, jadi kamu memerlukan dua nilai yang benar.

►. Harga tiket masuk sebuah museum berbeda untuk pengunjung dewasa, pelajar, dan anak. Tiga rombongan membayar sebagai berikut.

Rombongan	Dewasa	Pelajar	Anak	Total bayar
I	2	5	3	Rp225.000
II	1	8	2	Rp230.000
III	3	2	6	Rp250.000

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Biaya tiket untuk 2 orang dewasa dan 6 pelajar adalah ....

A. Rp170.000
B. Rp280.000
C. Rp200.000
D. Rp230.000
E. Rp120.000

Pembahasan **Kunci: C**

Konsep: misalkan harga tiket dewasa x, pelajar y, anak z (ribu rupiah); tabel memberi SPL tiga variabel $2x + 5y + 3z = 225, x + 8y + 2z = 230, 3x + 2y + 6z = 250$.

Langkah 1. Dari persamaan II: $x = 230 - 8y - 2z$.

Langkah 2. Substitusi ke III:
$3(230 - 8y - 2z) + 2y + 6z = 250 \Rightarrow 690 - 22y = 250 \Rightarrow y = 20$.

Langkah 3. Substitusi ke I:
$2(230 - 8y - 2z) + 5y + 3z = 225 \Rightarrow 460 - 11y - z = 225 \Rightarrow z = 235 - 220 = 15$; lalu $x = 230 - 160 - 30 = 40$.

Langkah 4. $2x + 6y = 80 + 120 = 200$ ribu rupiah.

Cek ulang: rombongan I: $80 + 100 + 45 = 225$ ✓; III: $120 + 40 + 90 = 250$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: harga tiket pelajar dan anak tertukar ($2 \cdot 40 + 6 \cdot 15$).
- B: harga tiket dewasa dan pelajar tertukar ($2 \cdot 20 + 6 \cdot 40$).
- D: menebak sama dengan total rombongan II tanpa menyelesaikan sistem.
- E: hanya menghitung 6 tiket pelajar.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: pengecoh A dan B adalah biaya yang "benar untuk variabel yang tertukar", yaitu harga pelajar dan anak, atau dewasa dan pelajar, dipertukarkan. Pengecoh semacam ini hanya dapat dihindari bila kamu menulis arti setiap variabel sebelum menyusun persamaan. Pembahasan juga memilih substitusi yang membuat satu variabel langsung hilang (persamaan III setelah x disubstitusikan). Cek akhir yang paling aman adalah memasukkan ketiga harga ke **ketiga** rombongan.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu arti setiap variabel dan SPL biasanya sebelum memilih cara penyelesaian.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Sebuah kedai kopi meracik tiga paket biji kopi dari arabika, robusta, dan liberika.

Paket	Arabika (kg)	Robusta (kg)	Liberika (kg)	Harga paket
I	2	1	1	Rp600.000
II	1	3	1	Rp620.000
III	1	1	2	Rp560.000

Harga per kg setiap jenis biji kopi sama di ketiga paket. Harga paket berisi 1 kg dari setiap jenis adalah ....

A. Rp593.333,33
B. Rp280.000
C. Rp320.000
D. Rp240.000
E. Rp420.000

2. Di sebuah tempat parkir terdapat motor (2 roda), mobil (4 roda), dan bus kecil (6 roda), seluruhnya 100 kendaraan dengan 300 roda. Tarif parkir motor Rp3.000, mobil Rp5.000, dan bus kecil Rp8.000; total tarif yang terkumpul Rp420.000.
Banyak mobil di tempat parkir itu adalah ....

A. 10 mobil
B. 20 mobil
C. 70 mobil
D. 50 mobil
E. tidak dapat ditentukan

Kunci singkat: 1. E 2. A

✔ PERIKSA DIRI

- Bila soal memberi data "setiap ekor sapi membutuhkan ...", apakah data itu menjadi baris atau kolom matriks koefisien? Mengapa?
- Mengapa $X = BA^{-1}$ tidak dapat dihitung bila B matriks kolom, dan kapan bentuk $X = BA^{-1}$ justru benar?
- Bila $\det A = 0$, bagaimana kamu membedakan SPL yang tidak punya penyelesaian dengan SPL yang penyelesaiannya tak hingga banyaknya? Ingat juga: di sub bab 1.4, setiap titik pojok kamu cari dengan menyelesaikan SPL dua garis batas.

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.3: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.
next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.3

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.4 · Program linear

MATTL-1.4

◎ APA YANG DIUJI

Program linear adalah cara mencari **nilai terbaik** (keuntungan terbesar, biaya terkecil) ketika sumber daya terbatas. Kamu menerjemahkan cerita menjadi **sistem pertidaksamaan linear**, menentukan daerah penyelesaiannya, lalu mencari nilai maksimum atau minimum sebuah fungsi di daerah itu.

Kisi-kisi resmi Pusmendik untuk TKA Matematika Tingkat Lanjut mencantumkan program linear pada elemen **Aljabar**, bagian **Matriks** (bersama determinan, invers, dan operasi matriks). Soal asli TKA 2025 belum memuat soal program linear, jadi sub bab ini tidak memiliki tabel persentase benar. Karena materinya tercantum di kisi-kisi, pemilik buku memutuskan untuk membahasnya secara lengkap. Kaitannya dengan matriks jelas: sistem pertidaksamaan dapat ditulis dalam bentuk matriks, dan setiap titik pojok dihitung sebagai penyelesaian SPL dengan invers atau aturan Cramer (sub bab 1.3).

Bentuk soal yang perlu kamu siapkan: menyusun model dari tabel cerita, membaca grafik daerah penyelesaian menjadi sistem pertidaksamaan, menghitung titik pojok, menentukan nilai optimum, dan menilai beberapa pernyataan (PG kompleks atau Benar/Salah), termasuk "bagaimana bila keuntungan berubah".

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menyusun variabel, kendala, dan fungsi objektif dari cerita atau tabel "sumber daya × produk";
- menggambar daerah penyelesaian dengan titik potong sumbu dan uji titik, serta menuliskan sistem pertidaksamaan dari sebuah grafik;
- menghitung titik pojok dengan eliminasi, invers, atau aturan Cramer, lalu memastikan titik itu memenuhi semua kendala;
- menentukan nilai optimum dengan uji titik pojok dan garis selidik, termasuk kapan titik optimum berpindah;
- menangani daerah tak terbatas, jawaban yang harus bilangan bulat, dan optimum di sepanjang satu sisi daerah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Dari cerita ke model matematika

Model program linear selalu terdiri atas tiga bagian.

1. **Variabel keputusan**: banyak benda yang dapat diatur, misalnya x = banyak tas dan y = banyak dompet. Tulis juga satuannya dan apakah nilainya harus bilangan bulat.
2. **Kendala**: batasan yang ditulis sebagai pertidaksamaan linear. Termasuk kendala yang sering terlupa, yaitu $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ (banyak barang tidak mungkin negatif).
3. **Fungsi objektif** $Z = ax + by$: besaran yang dimaksimumkan (keuntungan, pendapatan) atau diminimumkan (biaya).

Tabel "sumber daya × produk". Data soal biasanya berbentuk tabel. Setiap **baris sumber daya** menjadi **satu kendala**. Angka di kolom produk pertama menjadi koefisien x, angka di kolom produk kedua menjadi koefisien y, dan kolom persediaan menjadi ruas kanan. Susunannya sama dengan matriks koefisien A pada $AX = B$ di sub bab 1.3. Bedanya, tanda $=$ diganti tanda ketaksamaan.

Kata kunci tanda ketaksamaan:

Kalimat di soal	Tanda	Contoh
paling banyak, tidak lebih dari, maksimal, tersedia	$\leq$	bahan tersedia 120 m: $4x + 2y \leq 120$
paling sedikit, tidak kurang dari, minimal, sekurang-kurangnya	$\geq$	wajib paling sedikit 10 dompet: $y \geq 10$
B paling sedikit dua kali A	$B \geq 2A$	reguler paling sedikit dua kali VIP: $y \geq 2x$
kapasitas total	$x + y \leq \ldots$	tempat hanya untuk 20 barang: $x + y \leq 20$

Pertidaksamaan boleh dikali atau dibagi bilangan **positif** tanpa mengubah tanda. Bila dikali bilangan **negatif**, tandanya berbalik. Contohnya, $y \geq 2x$ setara dengan $2x - y \leq 0$.

Contoh terselesaikan 1: menyusun model

Kelompok kriya sebuah SMA pada 2026 membuat tas anyaman dan dompet anyaman (data disusun untuk contoh).

Sumber daya	Tas (per buah)	Dompet (per buah)	Tersedia per pekan
Bahan anyaman	4 m	2 m	120 m
Waktu kerja	2 jam	3 jam	120 jam

Kelompok itu wajib membuat paling sedikit 10 dompet per pekan untuk pesanan tetap. Keuntungan satu tas Rp40.000 dan satu dompet Rp30.000. Susunlah model program linearnya.

Penyelesaian. Misalkan x = banyak tas dan y = banyak dompet per pekan (x dan y bilangan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

cacah). Baris bahan: $4x + 2y \leq 120$, dibagi 2 menjadi $2x + y \leq 60$. Baris waktu: $2x + 3y \leq 120$. Kalimat "paling sedikit 10 dompet": $y \geq 10$. Ditambah $x \geq 0$. Kendala $y \geq 0$ tidak perlu ditulis lagi karena sudah tercakup oleh $y \geq 10$.

$$\begin{cases} 2x + y \leq 60 & \text{(bahan)} \\ 2x + 3y \leq 120 & \text{(waktu)} \\ y \geq 10 & \text{(pesanan dompet)} \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad Z = 40x + 30y \text{ (ribu rupiah)} \rightarrow \text{maksimum}$$

Dua kendala pertama dapat ditulis dalam bentuk matriks. Tanda $\leq$ berlaku untuk setiap baris:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Baris pertama hasil kalinya adalah $4x + 2y$, yaitu bahan yang terpakai. Baris kedua adalah $2x + 3y$, yaitu waktu yang terpakai. Bila soal memberikan sistem dalam bentuk matriks, uraikan dulu setiap baris menjadi satu pertidaksamaan.

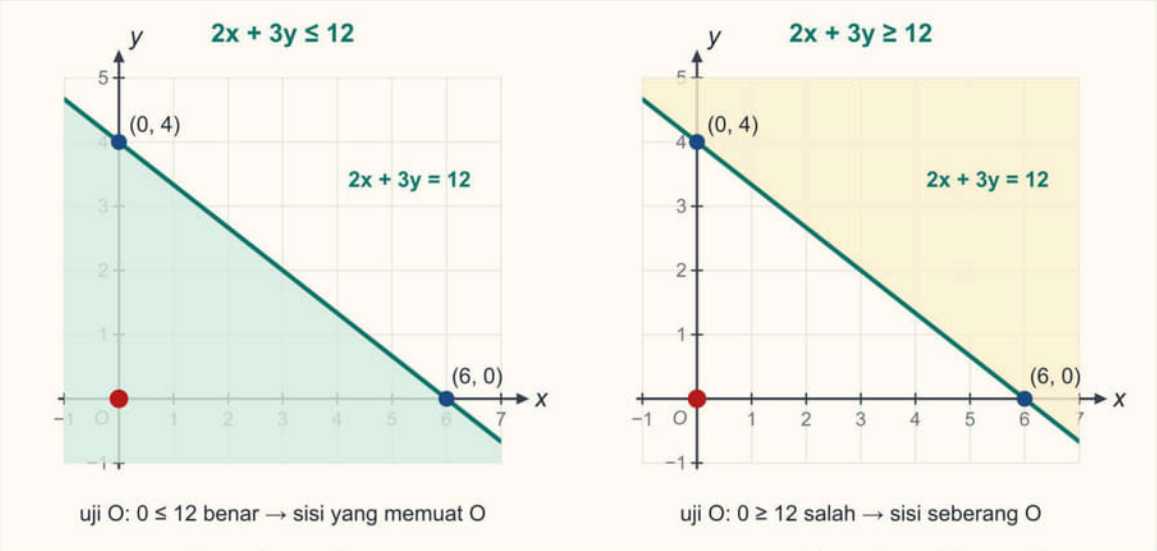
2. Daerah penyelesaian: garis batas dan uji titik

Setiap kendala $ax + by \leq c$ (atau $\geq c$) membagi bidang menjadi dua bagian. Batasnya adalah **garis batas** $ax + by = c$. Daerah penyelesaian sistem adalah bagian bidang yang memenuhi **semua** kendala sekaligus.

Menggambar garis batas dari titik potong sumbu. Untuk $ax + by = c$, substitusikan $x = 0$ untuk mendapatkan titik potong sumbu Y, yaitu $(0, \frac{c}{b})$. Substitusikan $y = 0$ untuk mendapatkan titik potong sumbu X, yaitu $(\frac{c}{a}, 0)$. Hubungkan kedua titik itu. Bila garis melalui titik asal (misalnya $y = 2x$), pilih titik kedua lain, misalnya $(1, 2)$.

Uji titik. Pilih satu titik yang **tidak** terletak pada garis, biasanya $O(0, 0)$, lalu substitusikan ke pertidaksamaan. Bila hasilnya benar, daerah penyelesaian kendala itu adalah sisi garis yang **memuat** titik uji. Bila salah, daerahnya sisi yang lain. Cara ini lebih aman daripada menebak "di atas" atau "di bawah" garis, terutama untuk garis yang gradiennya positif. Mengapa satu titik cukup? Nilai $ax + by - c$ hanya berganti tanda ketika titiknya **melewati** garis batas. Semua titik di satu sisi garis memberi tanda yang sama, jadi bila satu titik di sisi itu memenuhi, semuanya memenuhi (Gambar 1.13).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.13 Garis $2x + 3y = 12$ membagi bidang menjadi dua. Kiri: untuk $2x + 3y \leq 12$, titik O memenuhi, jadi daerahnya sisi yang memuat O. Kanan: untuk $2x + 3y \geq 12$, titik O tidak memenuhi, jadi daerahnya sisi seberang. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Perhatikan keterangan gambar di soal. Sebagian buku mengarsir daerah penyelesaian, sebagian lagi mengarsir daerah yang **bukan** penyelesaian.

Contoh terselesaikan 2: menentukan daerah penyelesaian

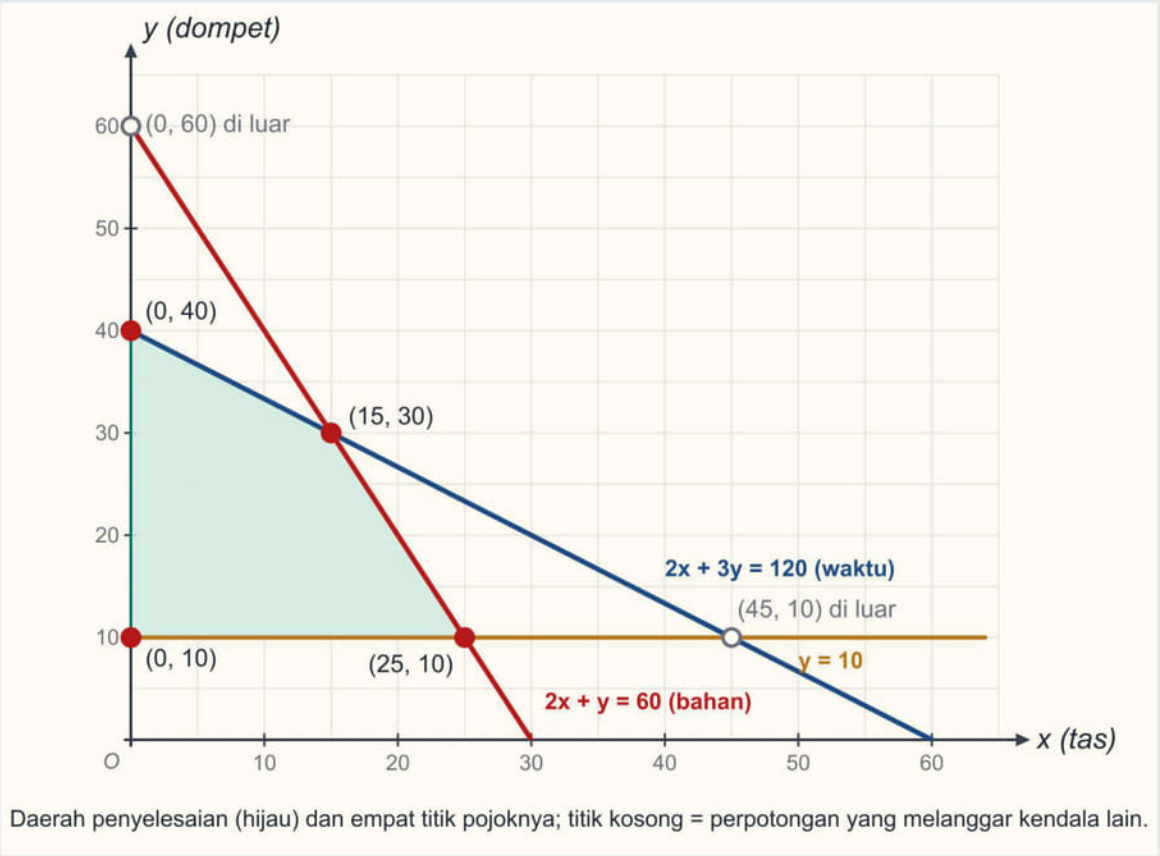
Tentukan daerah penyelesaian model pada Contoh 1.

Penyelesaian. Buat tabel titik potong dan uji titik $O(0, 0)$.

Kendala	Garis batas	Titik potong sumbu Y	Titik potong sumbu X	Uji $O(0,0)$	Daerah
$2x + y \leq 60$	$2x + y = 60$	$(0, 60)$	$(30, 0)$	$0 \leq 60$ benar	sisi yang memuat O (kiri bawah garis)
$2x + 3y \leq 120$	$2x + 3y = 120$	$(0, 40)$	$(60, 0)$	$0 \leq 120$ benar	sisi yang memuat O (kiri bawah garis)
$y \geq 10$	$y = 10$ (mendatar)	$(0, 10)$	tidak ada	$0 \geq 10$ salah	sisi yang tidak memuat O (di atas garis)
$x \geq 0$	sumbu Y				di kanan sumbu Y

Daerah penyelesaiannya adalah **segi empat** yang dibatasi sumbu Y di kiri, garis $y = 10$ di bawah, garis bahan di kanan, dan garis waktu di atas (Gambar 1.14). Titik-titik sudutnya akan kamu hitung di bagian 4.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.14 Daerah penyelesaian model tas dan dompet anyaman beserta titik pojoknya (dihitung pada Contoh 4). Titik kosong $(45, 10)$ *dan* $(0, 60)$ *adalah perpotongan garis batas yang melanggar kendala lain. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.*

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Membaca grafik: dari daerah ke sistem pertidaksamaan

Soal juga dapat berjalan terbalik: gambar daerah diberikan, dan kamu diminta sistem pertidaksamaannya. Langkahnya dua.

Langkah A — persamaan setiap garis batas. Untuk garis yang memotong sumbu X di $(p, 0)$ dan sumbu Y di $(0, q)$, berlaku

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad qx + py = pq$$

Bentuk kedua diperoleh dengan mengalikan kedua ruas dengan pq. Perhatikan: titik potong sumbu Y (q) menjadi koefisien x, dan titik potong sumbu X (p) menjadi koefisien y. Bila dua titik yang diketahui bukan titik potong sumbu, pakai gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ lalu $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Langkah B — arah tanda dengan uji titik. Pilih titik yang jelas berada di dalam daerah arsiran (atau pakai O bila O jelas di dalam atau di luar). Substitusikan ke ruas kiri setiap garis. Bila hasilnya lebih kecil daripada ruas kanan, tandanya $\leq$. Bila lebih besar, tandanya $\geq$.

Contoh terselesaikan 3: menulis sistem dari grafik

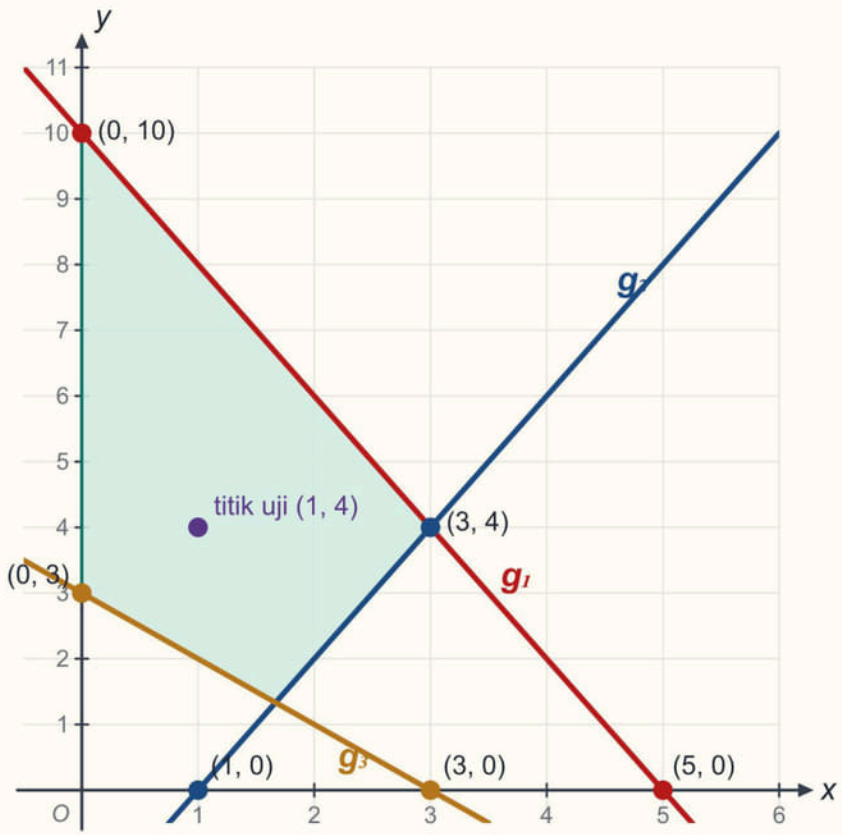
Gambar 1.15 menunjukkan tiga garis batas dan daerah arsiran:

- garis g_1 melalui $(0, 10)$ dan $(5, 0)$;
- garis g_2 melalui $(1, 0)$ dan $(3, 4)$;
- garis g_3 melalui $(0, 3)$ dan $(3, 0)$.

Daerah arsiran adalah segi empat di kuadran I yang dibatasi sumbu Y di kiri, g_1 di kanan atas, g_2 di kanan bawah, dan g_3 di kiri bawah. Titik $(1, 4)$ berada di dalam arsiran. Tentukan sistem pertidaksamaannya.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.15 Daerah arsiran dibatasi sumbu Y, garis g_1 melalui $(0, 10)$ dan $(5, 0)$, garis g_2 melalui $(1, 0)$ dan $(3, 4)$, serta garis g_3 melalui $(0, 3)$ dan $(3, 0)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Penyelesaian. Langkah A:

- g_1: $p = 5, q = 10$, jadi $10x + 5y = 50$, disederhanakan menjadi $2x + y = 10$.
- g_3: $p = 3, q = 3$, jadi $3x + 3y = 9$, disederhanakan menjadi $x + y = 3$.
- g_2 tidak melalui $(0, q)$ yang tertera, jadi pakai gradien: $m = \frac{4-0}{3-1} = 2$, sehingga $y = 2(x - 1)$ atau $2x - y = 2$.

Langkah B, uji titik $(1, 4)$:

Garis	Ruas kiri di $(1, 4)$	Ruas kanan	Tanda
$2x + y$	6	10	$2x + y \le 10$
$x + y$	5	3	$x + y \ge 3$
$2x - y$	-2	2	$2x - y \le 2$

Jadi sistemnya:

$$\begin{cases} 2x + y \le 10 \\ x + y \ge 3 \\ 2x - y \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Perhatikan g_2. Daerah arsiran terletak **di atas** garis $y = 2x - 2$, yaitu $y \ge 2x - 2$. Setelah semua suku dipindah menjadi $2x - y$, tandanya justru $\le$. Siswa yang berpikir "di atas garis berarti $\ge$" untuk bentuk $2x - y$ akan salah. Uji titik menghindarkan kesalahan ini.

Titik pojok daerah ini adalah $(0, 3)$, $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $(3, 4)$, dan $(0, 10)$. Titik $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, perpotongan g_2 dan g_3, tidak jatuh di titik kisi, sehingga pada gambar mudah terlewat.

4. Titik pojok: perpotongan dua garis batas

Titik pojok adalah titik sudut daerah penyelesaian. Setiap titik pojok adalah perpotongan **dua garis batas**. Mencarinya berarti menyelesaikan SPL dua variabel, jadi semua alat sub bab 1.3 dipakai lagi: eliminasi, $X = A^{-1}B$, atau aturan Cramer.

Satu hal yang wajib: **tidak setiap perpotongan dua garis adalah titik pojok.** Titik potong bisa jatuh di luar daerah karena melanggar kendala ketiga. Setiap titik hasil hitungan harus dicek ke **semua** kendala.

Contoh terselesaikan 4: daftar titik pojok

Tentukan titik pojok daerah pada Contoh 2.

Penyelesaian. Perpotongan garis bahan dan garis waktu dihitung dengan invers:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \end{pmatrix}, \qquad \det = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Perpotongan lain cukup dengan substitusi. Hasil semua pasangan garis batas:

Pasangan garis	Titik potong	Cek kendala lain	Titik pojok?
bahan dan waktu	$(15, 30)$	$y = 30 \geq 10$	ya
bahan dan $y = 10$	$(25, 10)$	waktu: $50 + 30 = 80 \leq 120$	ya
waktu dan $y = 10$	$(45, 10)$	bahan: $90 + 10 = 100 > 60$	**tidak**
waktu dan $x = 0$	$(0, 40)$	bahan: $40 \leq 60$	ya
bahan dan $x = 0$	$(0, 60)$	waktu: $180 > 120$	**tidak**
$y = 10$ dan $x = 0$	$(0, 10)$	bahan dan waktu terpenuhi	ya

Jadi titik pojoknya $(0, 10)$, $(25, 10)$, $(15, 30)$, dan $(0, 40)$. Titik $(45, 10)$ dan $(0, 60)$ adalah jebakan: keduanya benar-benar titik potong garis, tetapi melanggar satu kendala.

5. Nilai optimum: uji titik pojok dan garis selidik

Teorema titik pojok. Bila fungsi objektif $Z = ax + by$ mempunyai nilai maksimum atau minimum pada daerah penyelesaian, nilai itu dicapai di **titik pojok**. Jadi cukup hitung Z di setiap titik pojok.

Mengapa di titik pojok? Garis selidik. Semua titik dengan nilai Z yang sama terletak pada garis $ax + by = k$. Garis ini disebut **garis selidik**, dan gradiennya $-\frac{a}{b}$. Mengubah k hanya menggeser garis secara sejajar. Untuk $a, b > 0$, makin besar k, makin jauh garis dari titik asal. Geser garis selidik sejauh mungkin sambil tetap menyentuh daerah penyelesaian. Titik terakhir yang disentuh memberi nilai **maksimum**. Untuk **minimum**, titik daerah yang pertama tersentuh dari arah titik asal memberi nilai minimum. Titik "terakhir" atau "pertama" itu selalu titik pojok (atau satu sisi utuh, lihat bagian 8).

Perbandingan gradien. Misalkan titik pojok P dibentuk oleh dua garis batas dengan gradien m_1 dan m_2, dengan garis pertama lebih curam ($|m_1| > |m_2|$). Untuk $a, b > 0$, titik P optimum bila gradien garis selidik terletak di antara keduanya:

$$|m_2| \leq \frac{a}{b} \leq |m_1|$$

Bila $\frac{a}{b}$ keluar dari rentang ini, garis selidik lebih curam atau lebih landai daripada salah satu sisi, dan optimum **pindah** ke titik pojok tetangga. Inilah alat untuk menjawab soal "bagaimana bila keuntungan berubah".

Contoh terselesaikan 5: keuntungan maksimum dan rentang keuntungan

Lanjutkan Contoh 4. (a) Tentukan keuntungan maksimum. (b) Keuntungan dompet tetap Rp30.000. Dalam rentang berapa keuntungan tas agar susunan optimum tetap 15 tas dan 30 dompet?

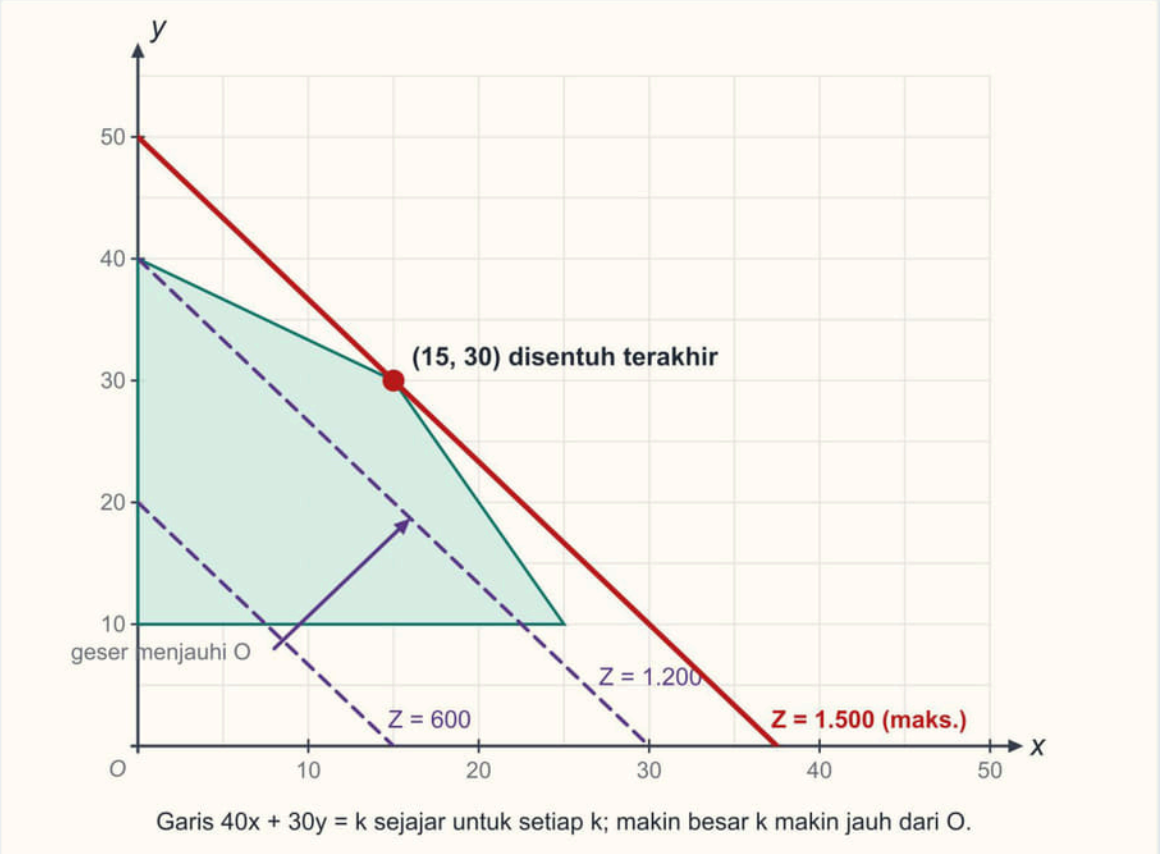
Penyelesaian. (a) Uji titik pojok dengan $Z = 40x + 30y$ (ribu rupiah):

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Titik pojok	$Z = 40x + 30y$
$(0, 10)$	300
$(25, 10)$	$1.000 + 300 = 1.300$
$(15, 30)$	$600 + 900 = 1.500$
$(0, 40)$	1.200

Keuntungan maksimum Rp1.500.000, dengan 15 tas dan 30 dompet.

Cek dengan garis selidik. $40x + 30y = k$ sejajar dengan $4x + 3y = 12$ (melalui $(3, 0)$ dan $(0, 4)$), gradiennya $-\frac{4}{3}$. Garis bahan bergradien -2 dan garis waktu bergradien $-\frac{2}{3}$ (lihat Gambar 1.16). Karena $\frac{2}{3} \leq \frac{4}{3} \leq 2$, garis selidik yang digeser menjauhi O terakhir menyentuh perpotongan keduanya, yaitu $(15, 30)$. Hasilnya sama.



Gambar 1.16 Garis selidik $40x + 30y = k$ untuk $k = 600$, 1.200, dan 1.500. Semua garis sejajar; titik daerah yang terakhir disentuh saat garis digeser menjauhi O adalah $(15, 30)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

(b) Dengan keuntungan tas a ribu rupiah, $(15, 30)$ tetap optimum bila

$$\frac{2}{3} \leq \frac{a}{30} \leq 2 \;\Rightarrow\; 20 \leq a \leq 60$$

Jadi keuntungan tas antara Rp20.000 dan Rp60.000. Di luar rentang itu, optimum pindah: bila $a > 60$ ke $(25, 10)$, bila $a < 20$ ke $(0, 40)$. Tepat di $a = 20$ atau $a = 60$, dua titik pojok

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

bernilai sama (bagian 8).

6. Daerah tak terbatas: minimum ada, maksimum bisa tidak ada

Kendala "paling sedikit" ($\geq$) sering menghasilkan daerah yang **terbuka** ke kanan atas. Daerah seperti ini disebut **tak terbatas**. Untuk fungsi biaya $Z = ax + by$ dengan $a, b > 0$:

- **minimum selalu ada** dan dicapai di titik pojok, karena biaya tidak bisa turun di bawah nol dan garis selidik yang bergerak dari arah O pasti menyentuh daerah lebih dulu di titik pojok;
- **maksimum tidak ada**, karena kamu dapat mengambil titik sejauh apa pun di dalam daerah sehingga Z membesar tanpa batas.

Gambar di soal selalu terpotong di tepi kertas. Jangan menganggap tepi gambar sebagai batas daerah. Batas daerah hanyalah garis batas yang berasal dari kendala.

Contoh terselesaikan 6: biaya minimum pada daerah tak terbatas

Seorang peternak lele pada 2027 mencampur pakan M dan N (data disusun untuk contoh). Setiap kilogram pakan M mengandung 3 satuan protein dan 1 satuan lemak. Setiap kilogram pakan N mengandung 1 satuan protein dan 2 satuan lemak. Kebutuhan per hari paling sedikit 12 satuan protein dan 9 satuan lemak. Harga pakan M Rp8.000/kg dan N Rp6.000/kg. Tentukan biaya minimum dan periksa apakah ada biaya maksimum.

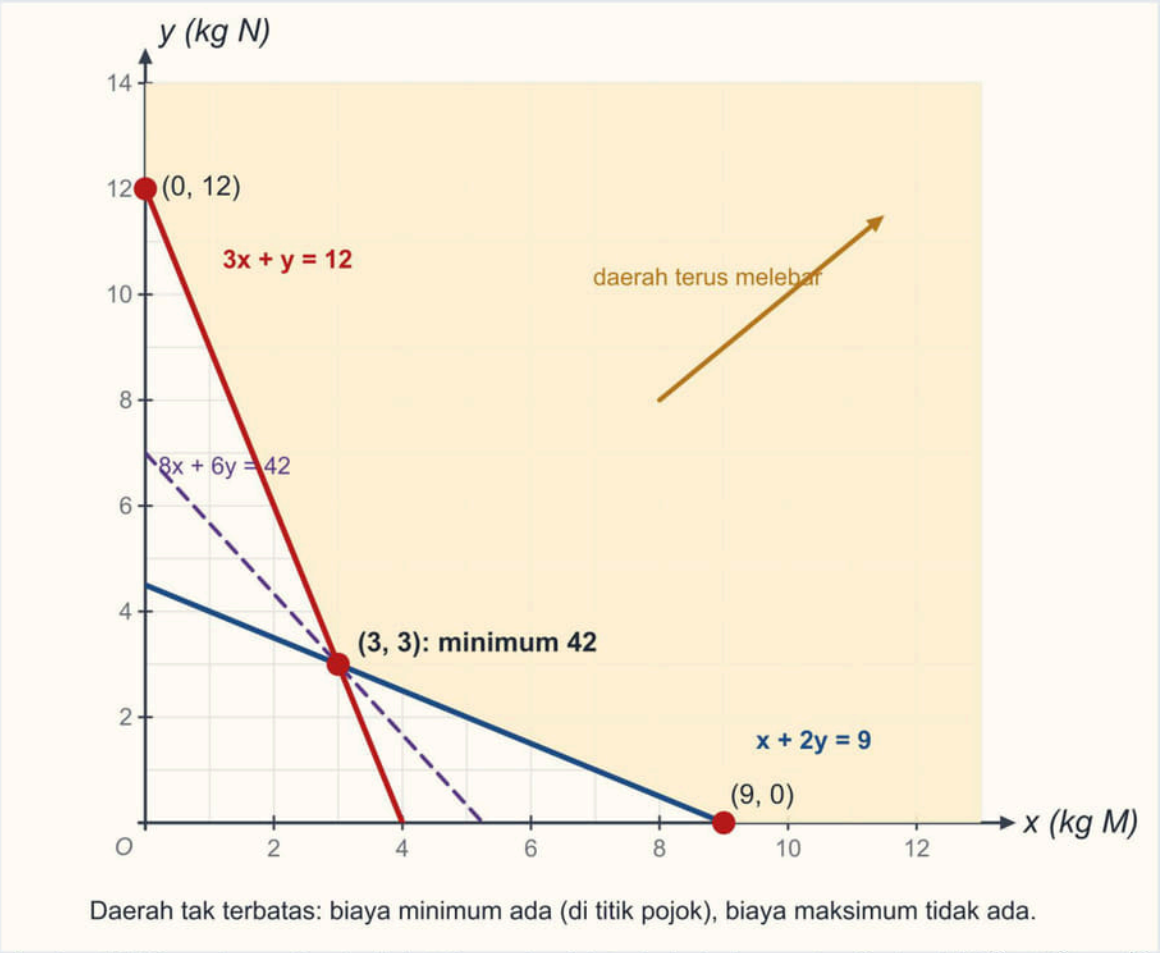
Penyelesaian. Misalkan x dan y = banyak kilogram pakan M dan N (boleh pecahan).

$$\begin{cases} 3x + y \geq 12 & \text{(protein)} \\ x + 2y \geq 9 & \text{(lemak)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases} \qquad Z = 8x + 6y \text{ (ribu rupiah)} \to \text{minimum}$$

Uji O: $0 \geq 12$ salah dan $0 \geq 9$ salah, jadi daerahnya di sisi yang tidak memuat O (kanan atas kedua garis). Daerah itu digambar pada Gambar 1.17: bagian bawahnya dibatasi patahan dua garis, sedangkan ke kanan atas daerah itu terus melebar.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.17 Daerah penyelesaian kebutuhan pakan lele terbuka ke kanan atas. Garis selidik $8x + 6y = 42$ menyentuh daerah pertama kali di $(3, 3)$; tidak ada titik yang "terakhir disentuh", jadi biaya maksimum tidak ada. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Titik potong kedua garis dengan aturan Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad D_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 15, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 15$$

sehingga titik potongnya $(3, 3)$. Titik pojok lain: $(0, 12)$ di sumbu Y (cek lemak: $24 \geq 9$) dan $(9, 0)$ di sumbu X (cek protein: $27 \geq 12$). Titik $(4, 0)$ dan $(0;\ 4{,}5)$ bukan titik pojok, karena $(4, 0)$ hanya memberi 4 satuan lemak dan $(0;\ 4{,}5)$ hanya memberi 4,5 satuan protein.

Titik pojok	$Z = 8x + 6y$
$(0, 12)$	72
$(3, 3)$	$24 + 18 = 42$
$(9, 0)$	72

Biaya minimum Rp42.000 per hari, dengan 3 kg pakan M dan 3 kg pakan N. Biaya **maksimum tidak ada**: titik $(100, 0)$ memenuhi semua kendala dengan biaya Rp800.000, titik $(1.000, 0)$ dengan biaya Rp8.000.000, dan seterusnya tanpa batas. Pernyataan "biaya maksimum Rp72.000" adalah jebakan, karena 72 hanyalah nilai terbesar **di antara titik pojok**, bukan di

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

seluruh daerah.

7. Jawaban harus bilangan bulat

Bila variabelnya banyak barang, orang, atau kursi, jawabannya harus bilangan cacah. Titik pojok optimum bisa saja pecahan. Langkahnya:

1. Hitung optimum model seperti biasa. Nilai Z di titik pojok pecahan adalah **batas atas** (untuk maksimum) yang belum tentu tercapai.
2. Periksa titik-titik bilangan bulat di sekitar titik pojok itu yang **berada di dalam daerah**. Membulatkan ke bilangan terdekat sering melanggar kendala. Membulatkan ke bawah selalu aman, tetapi belum tentu terbaik.
3. Bandingkan nilai Z titik-titik itu. Gunakan batas atas untuk membuktikan bahwa tidak ada titik bulat yang lebih baik.

Contoh terselesaikan 7: titik pojok pecahan

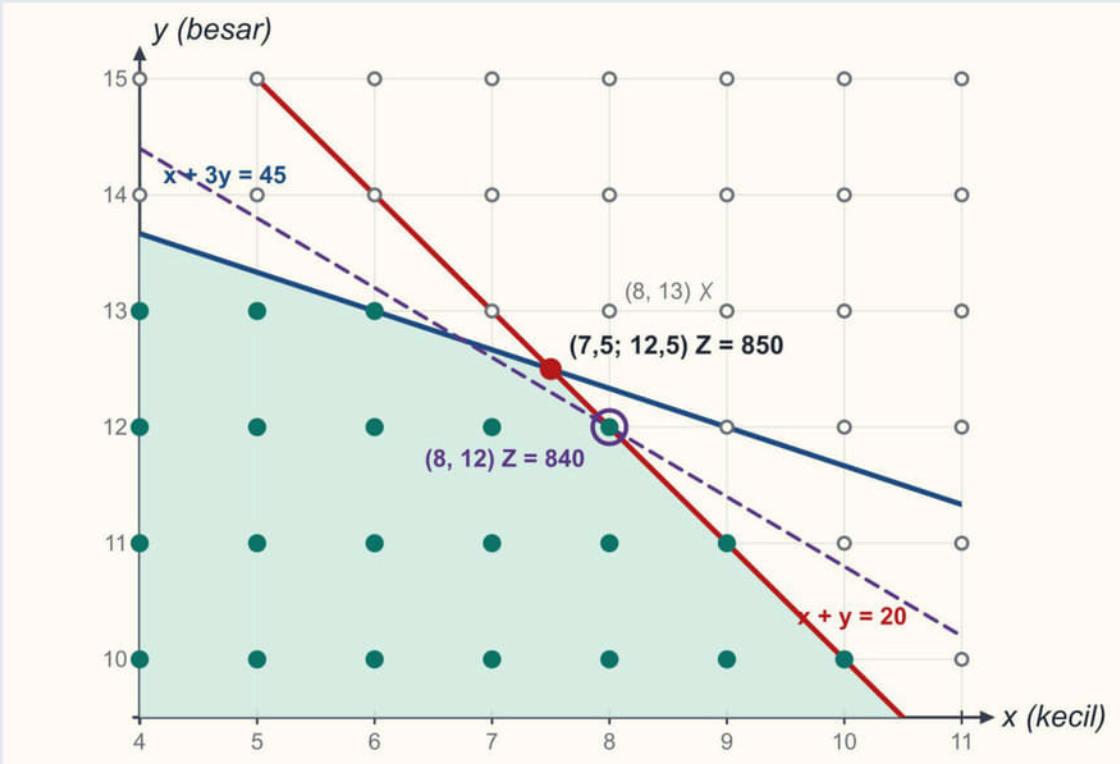
Sekelompok siswa pada 2027 membuat hampers Lebaran kecil dan besar (data disusun untuk contoh). Kotak pengiriman hanya cukup untuk 20 hampers. Hampers kecil berisi 1 toples kue dan hampers besar berisi 3 toples. Tersedia 45 toples. Keuntungan hampers kecil Rp30.000 dan hampers besar Rp50.000. Tentukan keuntungan maksimum yang benar-benar dapat dicapai.

Penyelesaian. Misalkan x = hampers kecil dan y = hampers besar (bilangan cacah).

$$\begin{cases} x + y \le 20 \\ x + 3y \le 45 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \qquad Z = 30x + 50y \ \text{(ribu rupiah)}$$

Perpotongan kedua garis: kurangkan persamaan, $2y = 25$, jadi $y = 12{,}5$ dan $x = 7{,}5$. Titik pojoknya $(0,0)$, $(20,0)$, $(7{,}5;\ 12{,}5)$, dan $(0,15)$, dengan Z berturut-turut 0, 600, 850, dan 750. Maksimum model 850 ada di titik pecahan, padahal 7,5 hampers tidak mungkin dibuat. Gambar 1.18 memperbesar bagian bidang di sekitar titik pojok itu sehingga titik-titik bulatnya terlihat.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.18 Titik pojok $(7{,}5;\ 12{,}5)$ *dan titik bulat di sekitarnya. Titik* $(8, 13)$ *hasil pembulatan terdekat berada di luar daerah. Garis putus-putus* $30x + 50y = 840$ *melalui titik bulat terbaik* $(8, 12)$*. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.*

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Periksa titik bulat di sekitar $(7{,}5;\ 12{,}5)$:

Titik	Wadah $x + y \le 20$	Toples $x + 3y \le 45$	Layak?	Z
$(8, 13)$ (dibulatkan terdekat)	21	47	tidak	
$(7, 13)$	20	46	tidak	
$(7, 12)$ (dibulatkan ke bawah)	19	43	ya	810
$(8, 12)$	20	44	ya	840
$(6, 13)$	19	45	ya	830
$(9, 11)$	20	42	ya	820

Mengapa 840 pasti terbaik? Nilai 850 hanya dicapai di titik $(7{,}5;\ 12{,}5)$, karena gradien garis selidik ($\frac{30}{50} = 0{,}6$) berada tepat di antara gradien kedua garis batas (1 dan $\frac{1}{3}$). Jadi setiap titik lain memberi $Z < 850$. Untuk titik bulat, $Z = 30x + 50y$ selalu kelipatan 10, sehingga paling besar 840. Nilai itu tercapai di $(8, 12)$. Keuntungan maksimum Rp840.000 dengan 8 hampers kecil dan 12 hampers besar. Pemeriksaan semua titik bulat di daerah itu dengan skrip memberi hasil yang sama.

Jebakan di contoh ini: menjawab Rp850.000 (nilai titik pecahan), menjawab $(8, 13)$ (pembulatan terdekat yang melanggar kendala), atau menjawab $(7, 12)$ (pembulatan ke bawah yang bukan terbaik).

8. Optimum di sepanjang satu sisi

Bila garis selidik **sejajar** dengan salah satu sisi daerah, garis itu menyentuh seluruh sisi sekaligus. Akibatnya, dua titik pojok di ujung sisi itu bernilai Z sama, dan **setiap titik pada ruas di antaranya** juga optimum. Tandanya: $\frac{a}{b}$ tepat sama dengan $|m|$ salah satu garis batas, atau dua titik pojok bertetangga memberi nilai Z sama di tabel uji. Pada soal Benar/Salah, pernyataan "optimum hanya dicapai di satu titik" atau "titik di tengah sisi tidak optimum" menjadi salah dalam keadaan ini.

Contoh terselesaikan 8: menilai pernyataan

Kembali ke kelompok kriya pada Contoh 1–5. Nilailah setiap pernyataan berikut.

Pernyataan	Nilai	Alasan
Titik $(45, 10)$ adalah titik pojok daerah penyelesaian	Salah	titik potong garis waktu dan $y = 10$, tetapi bahan $2 \cdot 45 + 10 = 100 > 60$
Keuntungan maksimum Rp1.500.000 dicapai dengan 15 tas dan 30 dompet	Benar	uji titik pojok Contoh 5
Bila keuntungan tas naik menjadi Rp70.000, susunan optimum tetap 15 tas dan 30 dompet	Salah	$70 > 60$ (di luar rentang Contoh 5); $Z(25, 10) = 1.750 + 300 = 2.050$ lebih besar daripada $Z(15, 30) = 1.050 + 900 = 1.950$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bila keuntungan tas turun menjadi Rp20.000, ada lebih dari satu susunan yang memberi keuntungan maksimum	Benar	$\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ sama dengan gradien garis waktu; $Z(15, 30) = Z(0, 40) = 1.200$, dan titik bulat di ruas itu ada enam: $(0, 40)$, $(3, 38)$, $(6, 36)$, $(9, 34)$, $(12, 32)$, $(15, 30)$
Bila ketentuan dompet diubah menjadi "paling banyak 10 dompet", keuntungan maksimum menjadi Rp1.300.000	Benar	kendala menjadi $y \leq 10$, $y \geq 0$; titik pojok $(0, 0)$, $(30, 0)$, $(25, 10)$, $(0, 10)$ dengan Z 0, 1.200, 1.300, 300

Pernyataan ketiga dan keempat dapat dinilai tanpa menghitung ulang semua titik, cukup dengan rentang $20 \leq a \leq 60$ dari Contoh 5. Pernyataan kelima menunjukkan bahwa satu kata ("paling sedikit" menjadi "paling banyak") mengubah daerah dan jawabannya.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal program linear

1. **Tetapkan variabel**: apa x, apa y, satuannya, dan apakah harus bilangan bulat.
2. **Susun kendala** dari setiap baris tabel atau kalimat. Samakan satuan (liter dan mililiter, jam dan menit). Tambahkan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
3. **Tulis fungsi objektif** dan tandai: maksimum atau minimum.
4. **Garis batas dan daerah**: titik potong sumbu, lalu uji titik untuk setiap kendala. Untuk soal grafik, tentukan persamaan garis dari dua titik, lalu tanda dari titik di dalam arsiran.
5. **Daftar titik pojok** dalam tabel. Hitung perpotongan dua garis batas (eliminasi, invers, atau Cramer) dan **cek ke semua kendala**.
6. **Uji titik pojok** atau pakai garis selidik. Untuk perubahan keuntungan, bandingkan $\frac{a}{b}$ dengan gradien garis batas. Pada daerah tak terbatas, periksa dulu apakah nilai yang ditanya memang ada.
7. **Bila jawabannya banyak barang**, periksa titik bulat di sekitar titik pojok pecahan.
8. **Jawab yang ditanya**: nilai Z (dengan satuan rupiah yang benar), banyak barang, atau penilaian pernyataan.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Tanda ketaksamaan terbalik	"Paling sedikit 10 dompet" ditulis $y \leq 10$	"Paling sedikit, minimal" = $\geq$; "paling banyak, tidak lebih dari, tersedia" = $\leq$
Koefisien tertukar	Angka kolom dompet dipasangkan dengan x	Kolom produk pertama = koefisien x; tulis label kolom sebelum menyusun
Satuan tidak disamakan	Persediaan 15 liter dipakai bersama kebutuhan 150 mL per gelas	Ubah ke satuan yang sama sebelum menulis kendala

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

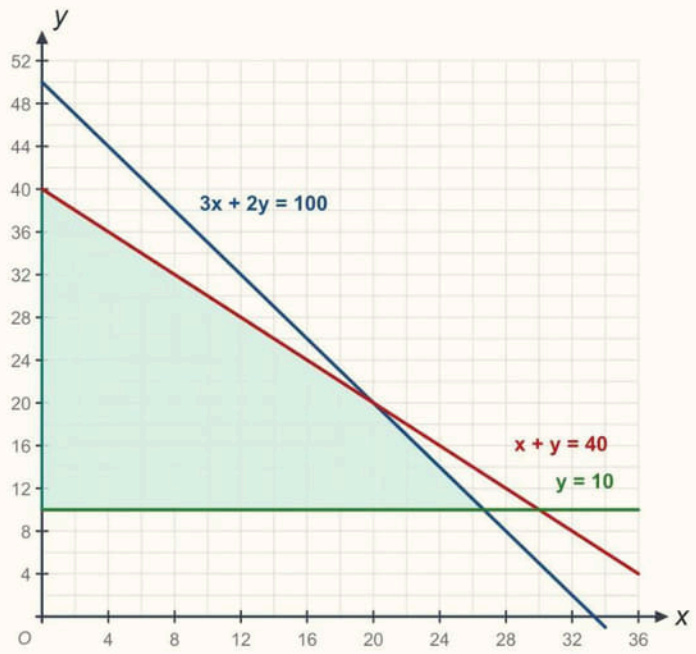
Perbandingan dibalik	"Reguler paling sedikit dua kali VIP" ditulis $x \geq 2y$	Ucapkan ulang: banyak reguler $\geq 2 \times$ banyak VIP, jadi $y \geq 2x$
Lupa kendala $x \geq 0$, $y \geq 0$	Titik dengan x negatif ikut dihitung	Tulis selalu di akhir daftar kendala
Tanda ditebak dari "di atas/di bawah"	Daerah di atas $y = x - 4$ ditulis $x - y \geq 4$	Pakai uji titik di dalam daerah
Rumus titik potong terbalik	Garis melalui $(9, 0)$ dan $(0, 6)$ ditulis $9x + 6y = 54$	$qx + py = pq$: titik potong sumbu Y menjadi koefisien x; cek dengan substitusi titik
Titik potong di luar daerah dianggap titik pojok	Memakai $(45, 10)$ pada Contoh 4	Cek setiap titik potong ke semua kendala
Titik pojok pecahan terlewat	Hanya menghitung titik pojok yang jatuh di titik kisi gambar	Hitung perpotongan setiap pasangan garis yang bertetangga
Optimum dicari di tempat yang salah	Biaya minimum dicari di titik terjauh, atau "maksimum" dijawab pada daerah tak terbatas	Minimum: titik pertama yang disentuh garis selidik; daerah terbuka: maksimum tidak ada
Jawaban pecahan atau dibulatkan sembarang	Menjawab 7,5 hampers atau membulatkan menjadi $(8, 13)$	Periksa titik bulat yang layak di sekitar titik pojok
Optimum dianggap tetap walau keuntungan berubah	Keuntungan tas naik, susunan dianggap sama	Bandingkan $\frac{a}{b}$ dengan gradien garis batas
Optimum dianggap hanya di satu titik	Titik di tengah sisi dinilai tidak optimum	Dua titik pojok bernilai sama berarti seluruh ruasnya optimum

BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memadukan isi sub bab ini: menyusun kendala dari cerita (termasuk syarat **paling sedikit** 10 petak kangkung), menentukan titik pojok, dan membandingkan nilai fungsi tujuan. Kerjakan dulu dengan langkah 1–8 sebelum membaca pembahasannya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Seorang petani menanam bayam (x petak) dan kangkung (y petak) pada lahan yang muat paling banyak 40 petak. Modal per petak bayam Rp30.000 dan kangkung Rp20.000, dengan modal tersedia Rp1.000.000. Pembeli langganan meminta kangkung paling sedikit 10 petak. Keuntungan per petak bayam Rp20.000 dan kangkung Rp15.000. Daerah penyelesaiannya diarsir pada gambar.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Salah satu kendala model adalah $3x + 2y \leq 100$.
☐ B. Titik $(30, 10)$ termasuk daerah penyelesaian.
☐ C. Menanam kangkung di seluruh 40 petak memberi keuntungan maksimum.
☐ D. Keuntungan maksimum Rp700.000 dicapai dengan 20 petak bayam dan 20 petak kangkung.
☐ E. Pada keuntungan maksimum, seluruh modal Rp1.000.000 terpakai.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: A, D, E**

Konsep: model: $x + y \leq 40, 3x + 2y \leq 100, y \geq 10, x \geq 0$; fungsi tujuan $f = 20.000x + 15.000y$. Uji fungsi tujuan di setiap titik pojok.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓ — modal: $30.000x + 20.000y \leq 1.000.000$, dibagi 10.000.

• B ✗ — $3 \cdot 30 + 2 \cdot 10 = 110 > 100$: modal tidak cukup.

• C ✗ — $(0, 40)$ memberi Rp600.000, kurang dari Rp700.000. *Jebakan:* mengira modal kangkung yang murah selalu menguntungkan.

• D ✓ — titik pojok $(0, 10) \rightarrow 150.000$; $(0, 40) \rightarrow 600.000$; $(20, 20) \rightarrow 400.000 + 300.000 = 700.000$; $(26\frac{2}{3}, 10) \rightarrow \pm 683.000$.

• E ✓ — $3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 100$, jadi modal habis.

Jawaban: A, D, dan E.

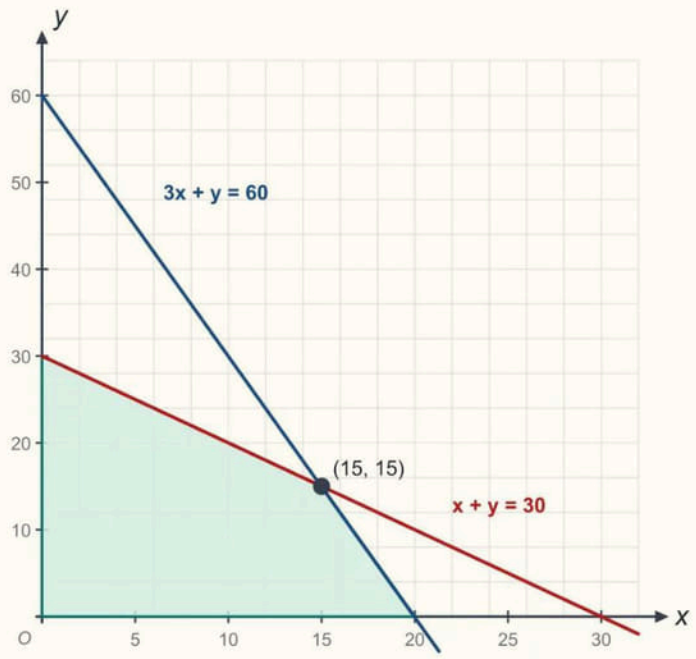
Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: kendala $y \geq 10$ memotong daerah dari bawah, sehingga titik $(0, 0)$ dan $(33\frac{1}{3}, 0)$ tidak lagi menjadi titik pojok. Titik pojok pecahan $(26\frac{2}{3}, 10)$ tetap harus diuji, walaupun nilainya ternyata kalah dari $(20, 20)$. Pernyataan 3 adalah jebakan "barang bermodal kecil pasti menguntungkan": modal kangkung memang kecil, tetapi keuntungan per petaknya juga kecil. Pernyataan 5 dicek langsung dengan kendala modal, yang di $(20, 20)$ berlaku sebagai persamaan.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu daftar kendala dan tabel titik pojoknya. Pada soal bergambar, jangan percaya titik yang "kelihatannya" titik pojok sebelum kamu menghitungnya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Seorang perajin membuat tas dan dompet kulit. Satu tas memerlukan 3 jam menjahit dan 1 jam merapikan, sedangkan satu dompet memerlukan 1 jam menjahit dan 1 jam merapikan. Dalam seminggu tersedia paling banyak 60 jam menjahit dan 30 jam merapikan. Keuntungan satu tas Rp50.000 dan satu dompet Rp30.000.
Misalkan dibuat x tas dan y dompet; daerah penyelesaiannya diarsir pada gambar.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

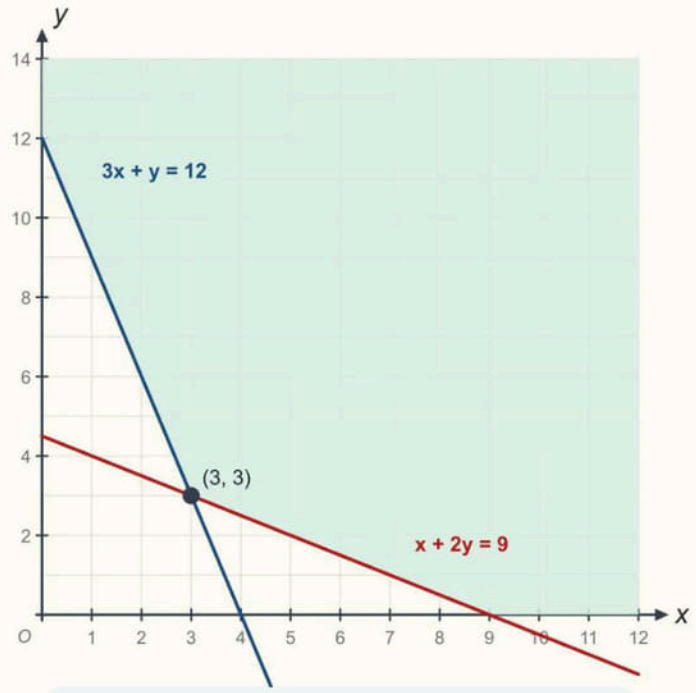


Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Membuat 20 tas saja dalam seminggu memberi keuntungan terbesar.
☐ B. Titik $(15, 15)$ adalah salah satu titik pojok daerah penyelesaian.
☐ C. Keuntungan maksimum dalam seminggu adalah Rp1.200.000.
☐ D. Pada produksi yang memberi keuntungan maksimum, masih ada sisa waktu menjahit.
☐ E. Bila keuntungan satu dompet naik menjadi Rp50.000, keuntungan maksimumnya menjadi Rp1.500.000.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Seorang peternak mencampur pakan A dan pakan B. Setiap kg pakan A mengandung 3 unit protein dan 1 unit serat, sedangkan setiap kg pakan B mengandung 1 unit protein dan 2 unit serat. Kebutuhan ternaknya setiap hari paling sedikit 12 unit protein dan 9 unit serat. Harga pakan A Rp8.000 per kg dan pakan B Rp6.000 per kg.
Misalkan dipakai x kg pakan A dan y kg pakan B; daerah penyelesaiannya diarsir pada gambar.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Daerah penyelesaiannya tertutup (terbatas), sehingga biaya maksimumnya juga dapat ditentukan.

☐ B. Biaya minimum Rp42.000 per hari dicapai dengan 3 kg pakan A dan 3 kg pakan B.

☐ C. Titik $(9, 0)$ adalah salah satu titik pojok daerah penyelesaian.

☐ D. Campuran 2 kg pakan A dan 4 kg pakan B sudah memenuhi kebutuhan protein dan serat harian.

☐ E. Bila harga pakan B naik menjadi Rp24.000 per kg, biaya minimum dicapai dengan 9 kg pakan A saja.

Kunci singkat: 1. B, C, E 2. B, C, E

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Bila sebuah titik adalah perpotongan dua garis batas, apa yang masih harus kamu periksa sebelum menyebutnya titik pojok?
- Pada daerah yang terbuka ke kanan atas, mengapa biaya minimum ada tetapi biaya maksimum tidak ada?
- Bila keuntungan salah satu produk berubah, bagaimana kamu menentukan dengan cepat apakah susunan optimum ikut berubah, dan kapan optimum dicapai di sepanjang satu sisi?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.4: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.4

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa

MATTL-1.5

◎ APA YANG DIUJI

Polinomial (suku banyak) muncul di TKA dalam dua bentuk. Bentuk pertama adalah **model sebuah keadaan**, misalnya penambahan volume, biaya, atau laba. Model itu perlu kamu operasikan, misalnya dikalikan banyak barang atau dikurangkan satu dari yang lain. Bentuk kedua adalah **soal aljabar tentang pembagian**: kamu diberi informasi sisa, lalu diminta mencari parameter yang belum diketahui. Keduanya menuntut ketelitian tanda dan pemahaman tentang bentuk sisa.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-6	Menentukan hasil operasi aljabar dua parameter yang merupakan komponen dari bentuk polinomial dengan disertai informasi pembagi dan sisa hasil bagi	20,37 %
SA-7	Menentukan hasil perkalian skalar dengan polinomial yang tepat dalam konteks permasalahan sehari-hari	44,16 %

Angka 20,37 % berarti hanya sekitar 1 dari 5 peserta yang menjawab SA-6 dengan benar. Pembagi pada soal itu tidak dapat difaktorkan, sehingga cara cepat "masukkan akar pembagi" tidak bisa langsung dipakai. Peserta harus benar-benar membagi dan harus tahu bahwa sisanya berbentuk $px + q$, bukan sebuah konstanta. SA-7 tampak mudah, tetapi lebih dari separuh peserta tetap salah. Penyebabnya: hanya sebagian suku yang dikalikan, atau koma desimal tergeser.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menjumlahkan, mengurangkan, dan mengalikan polinomial dengan skalar dalam konteks, lalu memeriksa hasilnya dengan satu nilai uji;
- membagi polinomial dengan cara bersusun dan cara Horner, termasuk pembagi $(ax - b)$ dan pembagi berderajat 2 (Horner–Kino);
- menuliskan hubungan "yang dibagi = pembagi × hasil bagi + sisa" dan menentukan bentuk sisa dari derajat pembagi;
- memakai teorema sisa untuk mencari sisa atau parameter yang belum diketahui;
- menentukan sisa pembagian oleh polinomial berderajat 2 atau 3 dari beberapa informasi sisa;
- menilai beberapa pernyataan sekaligus (PG kompleks atau Benar/Salah) tentang hasil bagi dan sisa.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Polinomial, derajat, dan koefisien

Polinomial dalam x yang berderajat n ditulis

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

- **Derajat** adalah pangkat tertinggi x. Kisi-kisi TKA membatasi polinomial sampai derajat 4.
- Bilangan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ disebut **koefisien**. Koefisien a_n disebut koefisien utama, sedangkan a_0 disebut **suku tetap** (konstanta).
- Suku yang tidak tertulis berkoefisien 0. Polinomial $2x^4 - 3x^3 + 5x - 6$ tidak memuat x^2, jadi koefisien x^2 adalah 0. Angka 0 ini **wajib ditulis** saat kamu memakai cara Horner.

Nilai polinomial. Nilai $f(k)$ diperoleh dengan mengganti setiap x dengan k. Ada dua nilai yang istimewa: $f(0) = a_0$ (suku tetap) dan $f(1)$ = jumlah semua koefisien.

Kesamaan dua polinomial. Dua polinomial bernilai sama untuk setiap x jika koefisien suku-suku yang berpangkat sama juga sama. Misalnya, dari $(a+2)x + (b-1) = 5x + 3$ diperoleh $a + 2 = 5$ dan $b - 1 = 3$, jadi $a = 3$ dan $b = 4$. Prinsip ini kamu pakai setiap kali mencocokkan sisa hasil hitunganmu dengan sisa yang diketahui di soal.

2. Operasi polinomial dalam konteks

- **Penjumlahan dan pengurangan** dilakukan pada suku sejenis (pangkat sama). Pada pengurangan, **semua** suku polinomial pengurang berganti tanda: $(5x^2 + 3x) - (2x^2 - 4x + 1) = 3x^2 + 7x - 1$.
- **Perkalian skalar** $k \cdot f(x)$: **setiap** koefisien dikalikan k. Alasannya adalah sifat distributif, $k(ax^2 + bx + c) = kax^2 + kbx + kc$. Dalam konteks, "$n$ benda yang sama dalam keadaan yang sama" berarti $n \cdot f(x)$.
- **Perkalian dua polinomial**: setiap suku dikalikan dengan setiap suku. Derajat hasilnya adalah jumlah kedua derajat, misalnya $(x^2 + 1)(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ (derajat $2 + 1 = 3$).

Cara memeriksa cepat: uji satu nilai. Pilih nilai x yang mudah dihitung (misalnya 1, 2, atau 10). Hitung nilai bentuk awal dan bentuk akhir. Bila keduanya berbeda, pasti ada langkah yang salah. Cara ini hanya butuh beberapa detik dan sangat ampuh untuk soal tipe SA-7.

Contoh terselesaikan 1: energi beberapa oven

Sebuah pabrik roti memiliki 8 oven lama yang sejenis. Energi listrik (kWh) yang dipakai satu oven lama selama t jam dimodelkan dengan $E(t) = 0{,}25t^3 - 1{,}5t^2 + 6t$. Pabrik itu juga mencoba satu oven baru dengan model $B(t) = 0{,}2t^3 - t^2 + 5t$ (data disusun untuk contoh).

- (a) Nyatakan total energi 8 oven lama yang menyala bersamaan selama t jam.
- (b) Nyatakan selisih energi satu oven lama dan satu oven baru.

Penyelesaian. (a) Delapan oven yang sama dalam waktu yang sama berarti $8 \cdot E(t)$. Setiap koefisien dikalikan 8:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$8E(t) = 8(0{,}25t^3 - 1{,}5t^2 + 6t) = 2t^3 - 12t^2 + 48t$

Uji satu nilai, $t = 2$: $E(2) = 2 - 6 + 12 = 8$ kWh per oven, jadi 8 oven memakai 64 kWh. Dari bentuk akhir: $2(8) - 12(4) + 48(2) = 16 - 48 + 96 = 64$. Cocok.

(b) Seluruh suku $B(t)$ berganti tanda saat dikurangkan:

$$E(t) - B(t) = (0{,}25 - 0{,}2)t^3 + (-1{,}5 + 1)t^2 + (6 - 5)t = 0{,}05t^3 - 0{,}5t^2 + t$$

Uji $t = 2$: $B(2) = 1{,}6 - 4 + 10 = 7{,}6$, jadi selisihnya $8 - 7{,}6 = 0{,}4$. Dari bentuk akhir: $0{,}4 - 2 + 2 = 0{,}4$. Cocok.

3. Pembagian polinomial: yang dibagi = pembagi × hasil bagi + sisa

Ingat pembagian bilangan: 47 dibagi 5 hasilnya 9 sisa 2, karena $47 = 5 \times 9 + 2$. Sisa 2 **lebih kecil** daripada pembagi 5. Pembagian polinomial mengikuti pola yang sama:

$$f(x) = P(x) \cdot H(x) + S(x), \qquad \text{derajat } S < \text{derajat } P$$

Di sini $f(x)$ adalah yang dibagi, $P(x)$ pembagi, $H(x)$ hasil bagi, dan $S(x)$ sisa. Derajat hasil bagi sama dengan derajat f dikurangi derajat P. Gambar 1.19 menjajarkan pembagian bilangan dengan pembagian polinomial pada Contoh 2 di bawah: setiap bagian punya pasangannya.



Gambar 1.19 Susunan "yang dibagi = pembagi × hasil bagi + sisa" pada bilangan dan pada polinomial. Sisa selalu "lebih kecil" daripada pembagi: pada polinomial, lebih kecil berarti derajatnya lebih rendah. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Syarat "derajat S < derajat P" langsung menentukan **bentuk sisa**:

Pembagi berderajat	Sisa berderajat paling tinggi	Bentuk sisa yang kamu tulis
1, misalnya $x - 2$	0	konstanta s
2, misalnya $x^2 + x + 1$	1	$px + q$
3, misalnya $x^3 - 2x^2 - x + 2$	2	$px^2 + qx + r$

Pembagian bersusun dapat dipakai untuk pembagi apa pun. Langkahnya diulang terus:

1. Bagi suku terdepan yang dibagi dengan suku terdepan pembagi. Hasilnya adalah satu suku hasil bagi.
2. Kalikan suku itu dengan **seluruh** pembagi.
3. Kurangkan. Hati-hati, semua tanda berganti.
4. Ulangi sampai derajat sisa lebih kecil daripada derajat pembagi.

Contoh terselesaikan 2: pembagian bersusun oleh pembagi berderajat 2

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 4$ oleh $x^2 - 2x + 3$.

Penyelesaian. Setiap baris tabel berikut adalah satu putaran langkah 1–3.

Putaran	Suku hasil bagi	Yang dikurangkan	Sisa sementara
1	$2x^4 \div x^2 = 2x^2$	$2x^2(x^2 - 2x + 3) = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2$	$x^3 - 5x^2 + 5x - 4$
2	$x^3 \div x^2 = x$	$x(x^2 - 2x + 3) = x^3 - 2x^2 + 3x$	$-3x^2 + 2x - 4$
3	$-3x^2 \div x^2 = -3$	$-3(x^2 - 2x + 3) = -3x^2 + 6x - 9$	$-4x + 5$

Sisa $-4x + 5$ berderajat 1, lebih kecil daripada derajat pembagi (2), jadi pembagian berhenti. Hasil bagi $H(x) = 2x^2 + x - 3$ dan sisa $S(x) = -4x + 5$.

Uji satu nilai, $x = 1$: $f(1) = 2 - 3 + 1 + 5 - 4 = 1$. Di ruas kanan, $P(1) = 2$, $H(1) = 0$, dan $S(1) = 1$, sehingga $2 \cdot 0 + 1 = 1$. Cocok.

4. Cara Horner untuk pembagi $(x - k)$

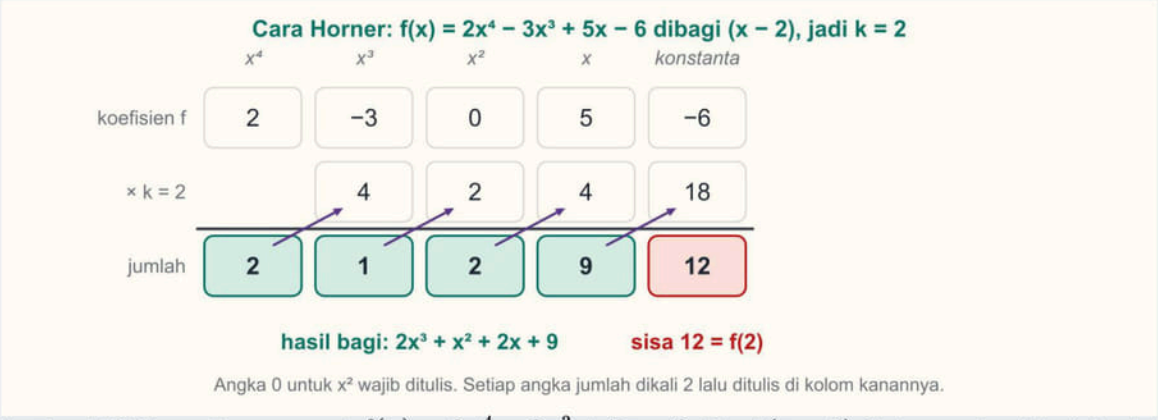
Pembagian bersusun oleh $(x - k)$ dapat diringkas menjadi hitungan koefisien saja. Ringkasan inilah yang disebut **cara Horner**.

1. Tulis **semua** koefisien f dari pangkat tertinggi, termasuk 0 untuk suku yang tidak ada. Tulis k di kiri. Untuk pembagi $(x + 2)$, nilai $k = -2$.
2. Turunkan koefisien pertama ke baris jumlah.
3. Kalikan angka terakhir di baris jumlah dengan k. Tulis hasilnya di baris tengah, satu kolom ke kanan.
4. Jumlahkan kolom itu (baris atas + baris tengah). Ulangi langkah 3–4 sampai kolom terakhir.
5. Angka terakhir di baris jumlah adalah **sisa**. Angka-angka sebelumnya adalah koefisien **hasil**

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

bagi, yang derajatnya satu lebih rendah daripada f.

Mengapa cara ini benar? Pada pembagian bersusun oleh $(x - k)$, setiap putaran **mengurangkan** $c \cdot (-k)$ dari kolom berikutnya. Mengurangkan $c \cdot (-k)$ sama dengan **menambahkan** $c \cdot k$. Itulah sebabnya Horner memakai "kali k, lalu jumlahkan". Pola gerak hitungannya digambar pada Gambar 1.20 memakai soal Contoh 3(a).



Gambar 1.20 Skema Horner untuk $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x - 6$ dibagi $(x - 2)$. Setiap angka di baris jumlah dikali $k = 2$, hasilnya ditulis di kolom kanannya (panah), lalu kolom itu dijumlahkan. Angka terakhir, 12, adalah sisa. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 3: Horner, termasuk pembagi $(ax - b)$

- (a) Bagilah $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x - 6$ oleh $(x - 2)$.
- (b) Bagilah $g(x) = 4x^3 - 3x + 5$ oleh $(2x - 1)$.

Penyelesaian (a). Koefisiennya $2, -3, 0, 5, -6$ (ingat 0 untuk x^2), dengan $k = 2$.

	x^4	x^3	x^2	x	konstanta
Koefisien f	2	-3	0	5	-6
Dikali $k = 2$		4	2	4	18
Jumlah	2	1	2	9	**12**

Urutan hitungnya: turunkan 2; $2 \times 2 = 4$, lalu $-3 + 4 = 1$; $1 \times 2 = 2$, lalu $0 + 2 = 2$; $2 \times 2 = 4$, lalu $5 + 4 = 9$; $9 \times 2 = 18$, lalu $-6 + 18 = 12$. Hasil bagi $2x^3 + x^2 + 2x + 9$ dan sisa 12. Seandainya angka 0 untuk x^2 terlewat, semua angka sesudahnya akan salah.

Penyelesaian (b). Tulis $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Lakukan Horner dengan $k = \frac{1}{2}$ pada koefisien $4, 0, -3, 5$.

	x^3	x^2	x	konstanta
Koefisien g	4	0	-3	5
Dikali $k = \frac{1}{2}$		2	1	-1
Jumlah	4	2	-2	**4**

Tabel ini memberi $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 2x - 2) + 4$. Karena pembaginya $2x - 1$, bukan $x - \frac{1}{2}$, hasil bagi harus **dibagi 2**:

$$g(x) = (2x - 1)(2x^2 + x - 1) + 4$$

Hasil bagi $2x^2 + x - 1$, sedangkan sisanya tetap 4. Uji:
$(2x - 1)(2x^2 + x - 1) = 4x^3 - 3x + 1$, ditambah 4 menjadi $4x^3 - 3x + 5$. Cocok.

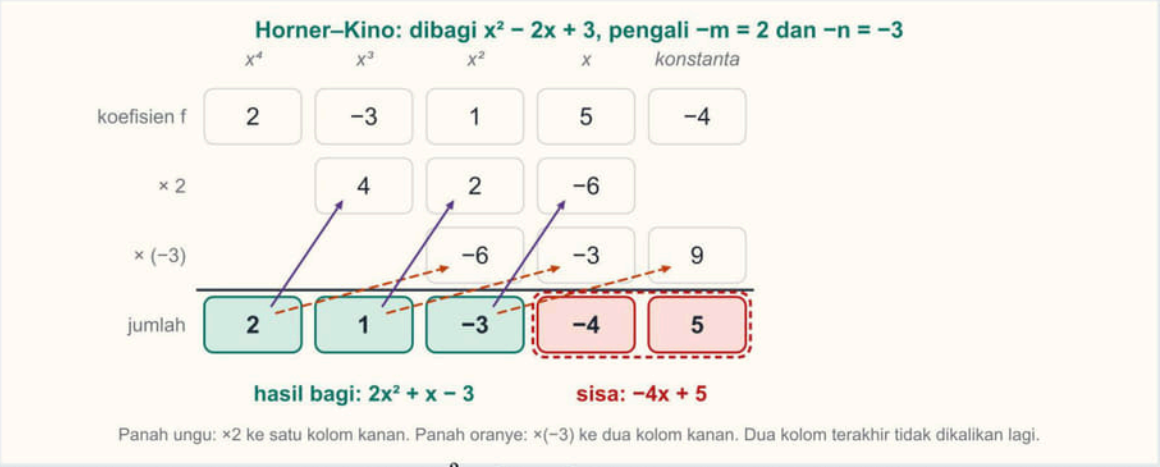
5. Horner–Kino untuk pembagi berderajat 2

Cara Horner hanya untuk pembagi berderajat 1. Untuk pembagi berderajat 2 berbentuk $x^2 + mx + n$ (koefisien x^2 harus 1), ada perluasannya yang di Indonesia dikenal sebagai **cara Horner–Kino**.

- Pakai **dua pengali**: $-m$ dan $-n$. Untuk pembagi $x^2 - 2x + 3$, nilai $m = -2$ dan $n = 3$, jadi pengalinya **2** dan -3.
- Setiap angka baru di baris jumlah dikalikan $-m$ dan hasilnya ditulis **satu kolom** ke kanan. Angka yang sama juga dikalikan $-n$ dan hasilnya ditulis **dua kolom** ke kanan.
- Perkalian berhenti setelah angka di kolom ketiga dari kanan. **Dua kolom terakhir tidak dikalikan lagi.** Jumlah dua kolom terakhir itu adalah koefisien sisa $px + q$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Alasan memakai $-m$ dan $-n$ sama dengan alasan pada Horner biasa. Pada pembagian bersusun, setiap putaran mengurangkan $c(x^2 + mx + n)$. Artinya kolom berikutnya **ditambah** $c \cdot (-m)$ dan kolom sesudahnya **ditambah** $c \cdot (-n)$. Gambar 1.21 memperlihatkan dua jenis panah itu pada Contoh 4.



Gambar 1.21 Horner–Kino untuk pembagi $x^2 - 2x + 3$. Setiap angka jumlah dikali 2 (satu kolom ke kanan) dan dikali -3 (dua kolom ke kanan). Dua kolom terakhir adalah koefisien sisa $-4x + 5$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 4: Horner–Kino

Ulangi Contoh 2, yaitu $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 4$ dibagi $x^2 - 2x + 3$, dengan cara Horner–Kino.

Penyelesaian. Pengalinya 2 dan -3.

	x^4	x^3	x^2	x	konstanta
Koefisien f	2	-3	1	5	-4
Dikali 2		4	2	-6	
Dikali -3			-6	-3	9
Jumlah	2	1	-3	-4	**5**

Urutan hitungnya:

1. Turunkan 2.
2. $2 \times 2 = 4$ ke kolom x^3, dan $2 \times (-3) = -6$ ke kolom x^2. Kolom x^3: $-3 + 4 = 1$.
3. $1 \times 2 = 2$ ke kolom x^2, dan $1 \times (-3) = -3$ ke kolom x. Kolom x^2: $1 + 2 - 6 = -3$.
4. $-3 \times 2 = -6$ ke kolom x, dan $-3 \times (-3) = 9$ ke kolom konstanta. Kolom x: $5 - 6 - 3 = -4$. Kolom konstanta: $-4 + 9 = 5$.
5. Berhenti. Tiga angka pertama $(2, 1, -3)$ adalah hasil bagi $2x^2 + x - 3$. Dua angka terakhir $(-4, 5)$ adalah sisa $-4x + 5$.

Hasilnya sama dengan Contoh 2, tetapi jauh lebih ringkas.

Cara cek: "ganti x^2". Ketika yang dicari hanya sisa, pembagi boleh dianggap bernilai 0. Untuk pembagi $x^2 - 2x + 3$, artinya x^2 boleh diganti $2x - 3$ berulang-ulang sampai tidak ada pangkat 2 atau lebih. Penggantian itu hanya membuang kelipatan pembagi, jadi sisanya tidak berubah. Lambang $\equiv$ di bawah dibaca "sisanya sama dengan".

$$x^3 = x \cdot x^2 \equiv x(2x - 3) = 2x^2 - 3x \equiv 2(2x - 3) - 3x = x - 6$$

$$x^4 = x \cdot x^3 \equiv x(x - 6) = x^2 - 6x \equiv (2x - 3) - 6x = -4x - 3$$

Maka $f(x) \equiv 2(-4x - 3) - 3(x - 6) + (2x - 3) + 5x - 4 = -4x + 5$. Sisanya sama.

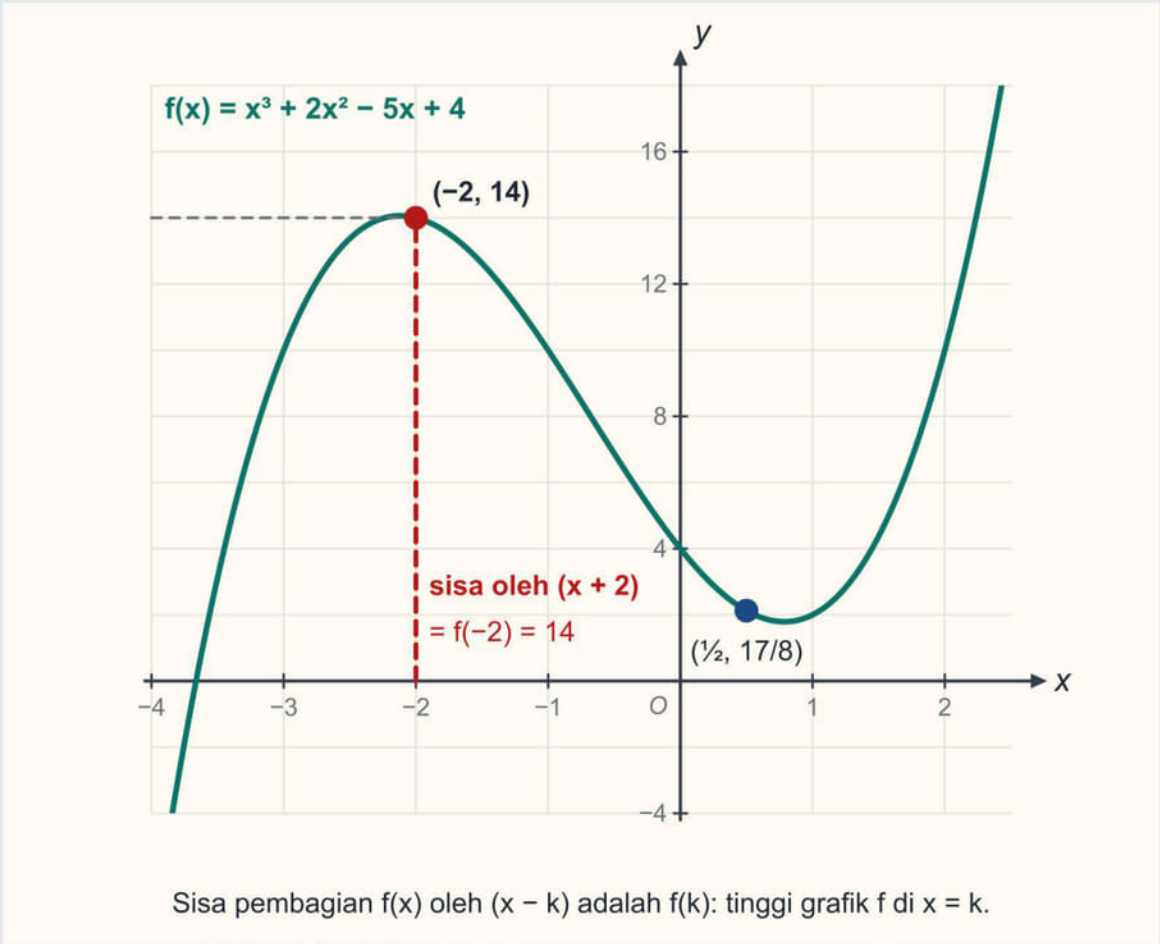
6. Teorema sisa

Bila $f(x)$ dibagi $(x - k)$, sisanya adalah $f(k)$.

Alasannya singkat. Pembagi berderajat 1, jadi sisanya konstanta s: $f(x) = (x - k)H(x) + s$. Ganti x dengan k. Faktor $(x - k)$ menjadi 0, sehingga $f(k) = 0 \cdot H(k) + s = s$.

Makna grafisnya sederhana: sisa pembagian oleh $(x - k)$ adalah **tinggi grafik** $y = f(x)$ di $x = k$ (Gambar 1.22). Akibatnya, bila grafik memotong sumbu X di $x = k$, tingginya 0, jadi sisanya 0 dan $(x - k)$ adalah faktor. Gagasan inilah yang menjadi teorema faktor di sub bab 1.6.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.22 Grafik $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ (polinomial Contoh 5 setelah $a = 2$). Tinggi grafik di $x = -2$ adalah 14, sama dengan sisa pembagian oleh $(x + 2)$; tinggi di $x = \frac{1}{2}$ adalah $\frac{17}{8}$, sisa pembagian oleh $(2x - 1)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

- Pembagi $(x + 3)$ berarti $k = -3$, jadi sisanya $f(-3)$. **Tanda k adalah lawan tanda di dalam kurung.**
- Pembagi $(ax - b)$ memberi sisa $f\left(\frac{b}{a}\right)$.
- Horner dan teorema sisa saling memeriksa: angka terakhir baris jumlah Horner selalu sama dengan $f(k)$. Pada Contoh 3(a), $f(2) = 32 - 24 + 10 - 6 = 12$.

Contoh terselesaikan 5: mencari parameter

Polinomial $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 4$ dibagi $(x + 2)$ bersisa 14. Tentukan a, lalu tentukan sisa pembagian $f(x)$ oleh $(2x - 1)$.

Penyelesaian. Pembagi $(x + 2)$ berarti $k = -2$:

$$f(-2) = -8 + 4a + 10 + 4 = 4a + 6 = 14 \;\Rightarrow\; a = 2$$

Peserta yang salah tanda akan menghitung $f(2) = 8 + 4a - 10 + 4 = 4a + 2 = 14$ dan mendapat $a = 3$. Angka seperti ini biasanya sengaja dipasang sebagai pengecoh. Cek dengan Horner ($k = -2$, koefisien $1, 2, -5, 4$): baris jumlahnya $1, 0, -5, 14$. Sisanya 14, cocok.

Sisa oleh $(2x - 1)$ adalah $f\left(\frac{1}{2}\right)$ dengan $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{1 + 4 - 20 + 32}{8} = \frac{17}{8}$$

7. Sisa pembagian oleh polinomial berderajat 2: mengapa $px + q$

Inilah sumber kesalahan terbesar pada SA-6. Ada tiga cara melihat mengapa sisanya harus ditulis $px + q$.

1. **Aturan derajat.** Sisa harus berderajat lebih kecil daripada pembagi. Pembagi berderajat 2, jadi sisa berderajat paling tinggi 1, yaitu $px + q$.
2. **Dari Horner–Kino.** Dua kolom terakhir tidak diproses lagi. Kolom x dan kolom konstanta sama-sama tersisa, jadi sisanya memuat suku x dan konstanta.
3. **Dari contoh.** Pada Contoh 2 sisanya $-4x + 5$, jelas bukan konstanta.

Sisa **boleh** ternyata konstanta (bila $p = 0$), tetapi itu hasil hitungan, **bukan** anggapan di awal. Bila kamu menulis sisa sebagai satu konstanta s, kamu hanya punya satu bilangan untuk mencocokkan dua syarat. Soal menjadi tampak "tidak bisa diselesaikan" atau jawabannya salah.

Cara mencari p dan q bergantung pada pembaginya.

- **Pembagi dapat difaktorkan**, misalnya $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Tulis $f(x) = (x - 2)(x + 1)H(x) + px + q$. Masukkan $x = 2$ dan $x = -1$. Faktor pembagi menjadi 0, sehingga $f(2) = 2p + q$ dan $f(-1) = -p + q$. Dua persamaan ini menentukan p dan q.
- **Pembagi tidak dapat difaktorkan** (diskriminannya negatif), misalnya $x^2 + x + 1$ atau $x^2 - 2x + 3$. Pakai pembagian bersusun, Horner–Kino, atau cara "ganti x^2", lalu samakan koefisien sisanya.
- **Pembagi berderajat 3** dengan tiga akar, misalnya $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$. Sisanya $px^2 + qx + r$, dan kamu perlu **tiga** syarat $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$.

Kadang $f(x)$ diberikan lewat grafik yang memotong sumbu X di beberapa titik. Polinomial seperti itu dapat ditulis sebagai $k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, lalu nilai k dicari dari satu titik lain. Cara ini dibahas lengkap di sub bab 1.6.

Contoh terselesaikan 6: menilai pernyataan

Polinomial $f(x)$ dibagi $(x - 1)$ bersisa 5, dan dibagi $(x + 2)$ bersisa -4. Nilailah setiap pernyataan berikut.

Penyelesaian. Pembagi $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, sehingga sisanya $px + q$ dengan

$$\begin{cases} p + q = f(1) = 5 \\ -2p + q = f(-2) = -4 \end{cases}$$

Kurangkan kedua persamaan: $3p = 9$, jadi $p = 3$ dan $q = 2$. Sisanya $3x + 2$.

Pernyataan	Nilai	Alasan
Sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^2 + x - 2$ adalah $3x + 2$	Benar	hasil sistem di atas; cek $S(1) = 5$ dan $S(-2) = -4$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sisa pembagian $f(x)$ oleh x^2+x-2 berupa konstanta, karena kedua sisa yang diketahui konstanta	Salah	pembagi berderajat 2, jadi sisanya $px+q$; di sini $p=3\neq 0$
$f(1)+f(-2)=1$	Benar	$5+(-4)=1$
Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x-2)$ dapat ditentukan dari informasi ini	Salah	$f(2)=4H(2)+8$ dan $H(2)$ tidak diketahui. Contohnya, x^3+x^2+x+2 dan x^3+2x^2+2x sama-sama memenuhi kedua informasi, tetapi nilainya di $x=2$ adalah 16 dan 20
Sisa pembagian $2f(x)$ oleh x^2+x-2 adalah $6x+4$	Benar	$2f(x)=(x^2+x-2)\cdot 2H(x)+(6x+4)$; perkalian skalar mengalikan sisa juga

Pernyataan keempat adalah pola pengecoh yang halus. Nilai $S(2)=8$ **bukan** $f(2)$, karena $x=2$ bukan akar pembagi. Teorema sisa hanya boleh dipakai pada akar pembagi.

Contoh terselesaikan 7: dua parameter, pembagi tak terfaktorkan (setara TKA)

Polinomial $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x-3$ dibagi x^2-2x+3 bersisa $3x-9$. Tentukan nilai $a+b$.

Penyelesaian. Diskriminan pembagi $4-12=-8<0$, jadi pembagi tidak dapat difaktorkan. Teorema sisa dengan akar real tidak bisa dipakai. Pakai Horner–Kino dengan pengali 2 dan -3, dan biarkan a serta b tetap sebagai huruf.

	x^4	x^3	x^2	x	konstanta
Koefisien f	1	a	b	2	-3
Dikali 2		2	$2a+4$	$4a+2b+2$	
Dikali -3			-3	$-3a-6$	$-6a-3b-3$
Jumlah	1	$a+2$	$2a+b+1$	$a+2b-2$	$-6a-3b-6$

Sisa hasil hitungan adalah $(a+2b-2)x+(-6a-3b-6)$. Samakan dengan $3x-9$:

$$\begin{cases} a+2b-2=3 \\ -6a-3b-6=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=5 \\ 2a+b=1 \end{cases}$$

Kalikan persamaan kedua dengan 2, lalu kurangkan persamaan pertama: $3a=-3$, jadi $a=-1$ dan $b=3$. Maka $a+b=2$.

Cek dengan cara "ganti x^2" dari bagian 5 ($x^3\equiv x-6$, $x^4\equiv -4x-3$):

$$f(x)\equiv(-4x-3)+a(x-6)+b(2x-3)+2x-3=(a+2b-2)x+(-6a-3b-6)$$

Hasilnya sama. Cek terakhir dengan angka: untuk $f(x)=x^4-x^3+3x^2+2x-3$, baris jumlah Horner–Kino adalah $1,1,2,3,-9$, yaitu hasil bagi x^2+x+2 dan sisa $3x-9$. Cocok.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal pembagian polinomial

1. **Kenali jenis soalnya.** Apakah soal meminta operasi pada model (kalikan, kurangkan), sisa, atau parameter?
2. **Tulis bentuk sisa lebih dulu** dari derajat pembagi: konstanta, $px + q$, atau $px^2 + qx + r$.
3. **Periksa apakah pembagi dapat difaktorkan.** Bila dapat, pakai teorema sisa pada setiap akarnya. Bila tidak, pakai bersusun, Horner–Kino, atau cara "ganti x^2".
4. **Susun persamaan sebanyak parameter** yang dicari, lalu selesaikan sistemnya.
5. **Jaga tanda.** Pembagi $(x + 3)$ berarti substitusi $x = -3$. Pengali Horner–Kino untuk $x^2 + mx + n$ adalah $-m$ dan $-n$.
6. **Uji ulang dengan satu nilai** atau dengan cara kedua. Masukkan jawabanmu ke informasi soal.
7. **Pada PG kompleks atau Benar/Salah, nilai setiap pernyataan secara terpisah.**

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Sisa oleh pembagi kuadrat ditulis konstanta	Menulis $f(x) = (x^2 + x + 1)H(x) + s$ pada soal tipe SA-6	Tulis $px + q$ setiap kali pembagi berderajat 2
Tanda k pada $(x - k)$	Pembagi $(x + 2)$ tetapi menghitung $f(2)$	k adalah pembuat nol pembagi: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
Hanya sebagian suku dikalikan skalar	Pada "10 drum", suku $0{,}4T^2$ lupa dikali 10 sehingga tetap $0{,}4T^2$	Kalikan **setiap** koefisien, lalu uji satu nilai
Koma desimal tergeser	$10 \times 0{,}05 = 50$ (pengecoh SA-7)	Hitung $10 \times 0{,}05 = 0{,}5$ dengan tenang; uji $T = 10$
Tanda tidak berganti saat mengurangkan	$(5x^2 + 3x) - (2x^2 - 4x + 1)$ dihitung menjadi $3x^2 - x + 1$	Beri kurung pada seluruh pengurang, lalu ganti semua tandanya
Koefisien 0 terlewat pada Horner	Koefisien $2x^4 - 3x^3 + 5x - 6$ ditulis $2, -3, 5, -6$	Tulis semua pangkat dari tertinggi sampai konstanta
Pembagi $(ax - b)$ diperlakukan seperti $(x - k)$	Hasil bagi Horner dengan $k = \frac{1}{2}$ tidak dibagi 2	Sisa tetap, tetapi hasil bagi dibagi a
Teorema sisa dipakai pada bukan akar pembagi	Mengira $f(2) = S(2)$ padahal pembaginya $(x - 1)(x + 2)$	$f(k) = S(k)$ hanya bila $P(k) = 0$
Hasil bagi dibaca keliru dari skema	Baris jumlah $2, -1, 0, 4$ dibaca $2x^3 - x^2 + 4x$	Angka 0 berarti suku x tidak ada: $2x^3 - x^2 + 4$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

• BEDAH SOAL ASLI

Soal pertama (SA-6) dijawab benar hanya oleh 20,37 % peserta. Polanya sama dengan Contoh terselesaikan 7. Pembagi x^2+x+1 memiliki diskriminan $1-4=-3<0$, sehingga tidak dapat difaktorkan. Peserta yang menulis sisa sebagai konstanta, atau yang mencoba mencari akar pembagi, akan buntu. Perhatikan juga bahwa yang ditanya adalah $a+b$, bukan a atau b saja. Kerjakan dulu dengan Horner–Kino (pengali -1 dan -1) sebelum membaca pembahasannya.

►. Diketahui suku banyak $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+x-6$. Apabila $f(x)$ dibagi oleh x^2+x+1, sisanya $5x-1$. Nilai dari $a+b=\ldots$

A. 11
B. 5
C. -1
D. -5
E. -7

Pembahasan **Kunci: C**

Konsep: pembagian bersusun oleh pembagi berderajat 2 menghasilkan sisa berderajat paling tinggi 1. Kita lakukan pembagian bersusun lalu samakan sisanya.

Langkah 1 – Pembagian bersusun $x^4+ax^3+bx^2+x-6$ oleh x^2+x+1.
• $x^4\div x^2=x^2\to$ kurangi $x^4+x^3+x^2\to$ sisa $(a-1)x^3+(b-1)x^2+x-6$.
• $(a-1)x^3\div x^2=(a-1)x\to$ kurangi $(a-1)x^3+(a-1)x^2+(a-1)x\to$ sisa $(b-a)x^2+(2-a)x-6$.
• $(b-a)x^2\div x^2=(b-a)\to$ kurangi $(b-a)x^2+(b-a)x+(b-a)\to$ sisa $(2-a-b+a)x+(-6-b+a)=(2-b)x+(a-b-6)$

Langkah 2 – Samakan dengan $5x-1$.
• $2-b=5\Rightarrow b=-3$
• $a-b-6=-1\Rightarrow a+3-6=-1\Rightarrow a=2$

Langkah 3. $a+b=2+(-3)=-1$.

Cek ulang (cara lain): karena $x^2\equiv -x-1$, maka $x^3\equiv 1$ dan $x^4\equiv x$. Jadi $f(x)\equiv x+a+b(-x-1)+x-6=(2-b)x+(a-b-6)$. Dengan $a=2, b=-3$: $5x-1$ ✓.

Analisis pilihan: 11 dan 5 muncul bila tanda b salah ($b=3$ memberi $a=8$ atau $a=2$); -5 dan -7 muncul dari salah hitung tanda pada pembagian bersusun.

Jawaban: C.

Soal berikutnya (SA-7) dijawab benar oleh 44,16 % peserta. Soal ini menguji perkalian skalar yang tampak sederhana. Pilihan jawabannya dirancang untuk peserta yang mengalikan hanya sebagian suku atau salah menggeser koma desimal. Uji satu nilai, misalnya $T=10$, dapat memastikan jawabanmu dalam beberapa detik.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah drum bahan bakar logam mengalami penambahan volume saat terkena panas, yang dinyatakan dengan fungsi
$V(T) = 0{,}05T^3 + 0{,}4T^2 + 20T$
dengan T adalah suhu dalam derajat Celsius dan $V(T)$ adalah penambahan volume dalam liter.
Apabila terdapat 10 drum dengan jenis dan ukuran yang sama, total penambahan volume drum-drum tersebut ketika terkena panas dengan suhu yang sama dapat dinyatakan dengan ....

A. $50T^3 + 40T^2 + 200T$
B. $50T^3 + 4T^2 + 200T$
C. $5T^3 + 4T^2 + 200T$
D. $0{,}5T^3 + 4T^2 + 200T$
E. $0{,}5T^3 + 0{,}4T^2 + 200T$

Pembahasan **Kunci: D**

Konsep: perkalian skalar dengan polinomial:
$k \cdot (a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T) = (ka_3)T^3 + (ka_2)T^2 + (ka_1)T$. **Setiap** koefisien dikalikan k.

Langkah 1. Total penambahan volume 10 drum $= 10 \cdot V(T)$.

Langkah 2.
$10(0{,}05T^3 + 0{,}4T^2 + 20T) = 0{,}5T^3 + 4T^2 + 200T$

Cek ulang dengan satu nilai: untuk $T = 10$, $V(10) = 50 + 40 + 200 = 290$ liter per drum, jadi 10 drum $= 2.900$. Pilihan D: $500 + 400 + 2.000 = 2.900$ ✓.

Analisis pilihan:
• A ✗: koma desimal diabaikan ($0{,}05$ dibaca 5 dan $0{,}4$ dibaca 4), lalu dikali 10. Akibatnya koefisien T^3 menjadi 1.000 kali, koefisien T^2 100 kali, dan hanya koefisien T yang benar 10 kali.
• B ✗: koefisien T^2 dan T benar, tetapi $0{,}05$ dibaca 5 sehingga koefisien T^3 menjadi 50 (1.000 kali, bukan 10 kali).
• C ✗: salah menggeser koma pada suku pertama: $10 \times 0{,}05 = 0{,}5$, bukan 5 (koefisien T^3 menjadi 100 kali).
• E ✗: suku $0{,}4T^2$ lupa dikali 10, padahal **setiap** koefisien harus dikali 10.
Cek cepat dengan $T = 10$: A memberi 56.000, B 52.400, C 7.400, E 2.540; hanya D yang memberi 2.900.

Jawaban: D.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut menguji teorema sisa dengan pembagi berderajat tiga. Dua informasi sisa diketahui, sedangkan sisa yang dicari berderajat paling tinggi dua. Tulis dulu bentuk sisanya, lalu manfaatkan sisa yang sudah diketahui agar hanya satu parameter yang perlu dicari.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Suku banyak $f(x)$ jika dibagi x^2-1 bersisa $2x+3$, dan jika dibagi $x-2$ bersisa 13. Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x^2-1)(x-2)$ adalah ....

A. $2x+3$
B. $2x^2+2x+5$
C. $2x^2+2x+1$
D. $-2x^2+2x+5$
E. $8x-3$

Pembahasan **Kunci: C**

Konsep: $f(x)=(x^2-1)(x-2)H(x)+S(x)$ dengan S berderajat ≤ 2. Karena sisa oleh x^2-1 adalah $2x+3$, tulis $S(x)=k(x^2-1)+2x+3$.

Langkah 1. Teorema sisa: $f(2)=S(2)=k(4-1)+4+3=3k+7=13$, jadi $k=2$.
Langkah 2. $S(x)=2(x^2-1)+2x+3=2x^2+2x+1$.

Cek ulang: $S(1)=5=2+3$ ✓, $S(-1)=1=-2+3$ ✓, $S(2)=13$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: memakai sisa pembagian oleh x^2-1; pembagi berderajat 3 memberi sisa berderajat paling tinggi 2.
• B: menulis $S(x)=k(x^2-1)+2x+3$ sebagai $kx^2+2x+3+k$.
• D: tanda k terbalik: dari $3k+7=13$ ditulis $3k=-6$.
• E: menganggap sisanya berderajat satu dan hanya memakai $S(1)=5$ dan $S(2)=13$.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: menulis sisa sebagai $S(x)=k(x^2-1)+2x+3$ langsung memenuhi dua syarat sekaligus ($S(1)=5$ dan $S(-1)=1$), sehingga hanya satu persamaan yang tersisa. Pengecoh $2x+3$ adalah sisa lama yang belum diperbarui, dan pengecoh $8x-3$ muncul bila sisa dianggap berderajat satu. Cek akhir di ketiga akar pembagi menjamin jawabannya.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu bentuk sisanya (atau bentuk hasil baginya) sebelum menghitung.

1. Sebuah usaha rumahan memproduksi sabun cair. Untuk x ratus botol, biaya produksinya $B(x)=2x^3-5x^2+4x+10$ dan pendapatannya $P(x)=12x+6$, keduanya dalam juta rupiah. Laba dinyatakan $L(x)=P(x)-B(x)$.
Sisa pembagian $L(x)$ oleh $(x-3)$ beserta artinya adalah ....

A. -11, yaitu kerugian Rp11 juta bila diproduksi 300 botol
B. 11, yaitu laba Rp11 juta bila diproduksi 300 botol
C. 11, yaitu laba Rp11 juta bila diproduksi 3 botol
D. 73, yaitu laba Rp73 juta bila diproduksi 300 botol
E. 31, yaitu biaya Rp31 juta bila diproduksi 300 botol

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Suku banyak $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$ habis dibagi $(x - 1)$ dan bersisa 12 jika dibagi $(x + 2)$.
Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x - 2)$ adalah ....

A. 32
B. 24
C. 12
D. 44
E. -21

3. Volume sebuah bak penampungan air berbentuk balok dinyatakan $V(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ dm³, sedangkan luas alasnya $(2x^2 + 5x + 2)$ dm², dengan $x > 0$.
Tinggi bak itu dinyatakan dalam x adalah .... dm

A. $x + 2$
B. $2x + 1$
C. $x - 1$
D. $x + 1$
E. $x + 1 + \dfrac{x}{2x^2 + 5x + 2}$

4. Suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x + 1)$ bersisa 2 dan jika dibagi $(x - 3)$ bersisa 10. Suku banyak $g(x) = (x^2 - 2)\, f(x)$.
Sisa pembagian $g(x)$ oleh $x^2 - 2x - 3$ adalah ....

A. $2x + 4$
B. $16x + 18$
C. $(x^2 - 2)(2x + 4)$
D. $18x + 16$
E. $17x + 19$

5. Suku banyak $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x + 1$ dibagi $(2x - 1)$.
Hasil bagi dan sisanya berturut-turut adalah ....

A. hasil bagi $4x^2 + 6$, sisa 4
B. hasil bagi $2x^2 + 3$, sisa 2
C. hasil bagi $2x^2 + 3$, sisa 4
D. hasil bagi $2x^2 - 2x + 4$, sisa -3
E. hasil bagi $4x^2 + 6$, sisa 8

Kunci singkat: 1. B 2. A 3. D 4. D 5. C

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Bila pembaginya berderajat 2, mengapa sisanya harus kamu tulis $px + q$, dan berapa persamaan yang kamu perlukan untuk menentukan p dan q?
- Pada Horner–Kino untuk pembagi $x^2 + mx + n$, berapakah kedua pengalinya, dan mengapa dua kolom terakhir tidak dikalikan lagi?
- Kapan kamu boleh memakai $f(k)$ sebagai sisa, dan kapan tidak boleh?



Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.5: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.5

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial

MATTL-1.6

◎ APA YANG DIUJI

Sub bab ini melanjutkan teorema sisa di sub bab 1.5. Bila sisanya 0, pembagi itu adalah **faktor**. Dari faktor, kamu memperoleh **akar** dan **titik potong grafik** dengan sumbu X. Di TKA, keterampilan ini diuji dalam dua bentuk: soal aljabar ("di mana grafik memotong sumbu X?") dan soal model ("berapa unit yang mungkin?").

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-5	Menentukan nilai-nilai pembuat nol dari fungsi polinomial berorde tiga	23,14 %
SA-8	Menentukan ukuran dimensi bangun ruang yang diketahui volumenya	52,56 %

Angka 23,14 % berarti kurang dari 1 dari 4 peserta menjawab SA-5 dengan benar. Hitungannya tidak panjang. Kesulitannya ada pada dua hal: peserta harus menemukan **semua** akar polinomial berderajat tiga tanpa rumus langsung, dan soal berbentuk PG kompleks sehingga semua pilihan yang benar harus dipilih. Pengecoh $(4, 0)$ menjebak peserta yang salah membaca tanda faktor $(x + 4)$.

Indikator resmi SA-8 menyebut "ukuran dimensi bangun ruang", tetapi soal yang keluar memakai konteks **modal saham**. Intinya sama: cari x yang membuat polinomial bernilai tertentu, lalu periksa apakah x itu masuk akal di dunia nyata. Soal latihan dan soal prediksi di sub bab ini memakai konteks bangun ruang, jadi kedua bentuk itu kamu pelajari sekaligus.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menjelaskan hubungan antara faktor, akar, pembuat nol, dan titik potong grafik dengan sumbu X, termasuk tandanya;
- mencari akar polinomial berderajat 3 dan 4 dengan uji akar rasional dan cara Horner;
- memakai teorema Vieta untuk memeriksa akar atau mencari parameter;
- membedakan grafik yang memotong dan yang menyinggung sumbu X dari kelipatan akar;
- menyusun persamaan polinomial dari konteks dan memilih akar yang memenuhi syarat konteks;
- menilai pernyataan "mungkin/tidak mungkin" atau Benar/Salah tentang akar dalam konteks.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Satu gagasan, empat nama

Untuk sebuah bilangan k, keempat pernyataan berikut **setara** (bila satu benar, semuanya benar):

1. $f(k) = 0$;
2. k adalah **akar** persamaan $f(x) = 0$, disebut juga **pembuat nol** f;
3. $(x - k)$ adalah **faktor** $f(x)$, artinya $f(x)$ habis dibagi $(x - k)$;
4. grafik $y = f(x)$ memotong atau menyinggung sumbu X di titik $(k, 0)$.

Hubungan 1 dan 3 disebut **teorema faktor**. Teorema ini langsung mengikuti teorema sisa: sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x - k)$ adalah $f(k)$, jadi sisanya 0 tepat ketika $f(k) = 0$.

Perhatikan tanda. Tanda di dalam faktor **berlawanan** dengan tanda akar.

Faktor	Akar (pembuat nol)	Titik pada sumbu X
$(x - 3)$	3	$(3, 0)$
$(x + 4)$	-4	$(-4, 0)$
$(2x - 1)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$(3x + 2)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

Jangan tertukar dengan **titik potong sumbu** Y, yaitu $(0, f(0))$. Nilai $f(0)$ adalah suku tetap.

Menulis polinomial dari akar-akarnya. Bila polinomial berderajat n memiliki akar $x_1, x_2, \ldots, x_n$, polinomial itu dapat ditulis

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

dengan a koefisien utama. Bila a belum diketahui, cari dari satu titik lain pada grafik, misalnya titik potong sumbu Y.

Contoh terselesaikan 1: teorema faktor dan parameter

Diketahui $(x - 3)$ adalah faktor $f(x) = x^3 - ax^2 + 5x + 3$. Tentukan a dan semua titik potong grafik $y = f(x)$ dengan sumbu X.

Penyelesaian. Karena $(x - 3)$ faktor, $f(3) = 0$:

$$27 - 9a + 15 + 3 = 0 \;\Rightarrow\; 45 - 9a = 0 \;\Rightarrow\; a = 5$$

Jadi $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$. Bagi dengan $(x - 3)$ memakai Horner ($k = 3$):

	x^3	x^2	x	konstanta
Koefisien f	1	-5	5	3
Dikali 3		3	-6	-3

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Jumlah	1	-2	-1	**0**

Sisa 0 memastikan $(x-3)$ memang faktor. Hasil baginya x^2-2x-1. Bentuk ini tidak dapat difaktorkan dengan bilangan bulat, jadi pakai rumus kuadrat (rumus abc):

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

Titik potongnya $(3,0)$, $(1+\sqrt{2},0)$, dan $(1-\sqrt{2},0)$. Pelajaran pentingnya: akar polinomial **tidak selalu bulat**. Setelah satu akar ditemukan, sisanya dicari dari hasil bagi.

2. Mencari akar: uji akar rasional dan Horner

Polinomial berderajat 3 atau 4 tidak punya rumus akar yang praktis. Cara di SMA adalah **menebak satu akar dengan cerdas**, lalu menurunkan derajatnya dengan Horner.

Uji akar rasional. Misalkan semua koefisien f bilangan bulat. Bila $\frac{p}{q}$ (pecahan paling sederhana) adalah akar, maka p membagi suku tetap a_0 dan q membagi koefisien utama a_n. Akibatnya, **bila koefisien utama 1, setiap akar rasional pasti bilangan bulat yang membagi suku tetap.**

Mengapa demikian? Masukkan $x=\frac{p}{q}$ ke $f(x)=0$, lalu kalikan kedua ruas dengan q^n. Semua suku kecuali a_0q^n memuat faktor p, sehingga p harus membagi a_0q^n. Karena p dan q tidak punya faktor persekutuan, p membagi a_0. Penalaran yang sama untuk suku a_np^n menunjukkan bahwa q membagi a_n.

Urutan menebak yang hemat waktu:

1. Hitung $f(1)$, yaitu jumlah semua koefisien. Bila hasilnya 0, maka 1 adalah akar.
2. Hitung $f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4$ (tanda bergantian).
3. Coba pembagi suku tetap yang kecil: $\pm2,\pm3,\ldots$
4. Perhatikan perubahan tanda. Bila $f(r)$ dan $f(s)$ berlawanan tanda, ada akar di antara r dan s.
5. Begitu menemukan satu akar, langsung lakukan Horner. Sisa 0 memastikan akarnya, dan hasil baginya berderajat lebih rendah.
6. Setelah tinggal bentuk kuadrat, faktorkan atau pakai rumus abc. Bila diskriminannya negatif, tidak ada akar real lagi.

Contoh terselesaikan 2: akar yang bukan bilangan bulat

Tentukan semua titik potong grafik $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ dengan sumbu X.

Penyelesaian. Koefisien utama 2 dan suku tetap 6. Calon akar rasionalnya $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$.

- $f(1)=2-3-11+6=-6$ (bukan akar)
- $f(-1)=-2-3+11+6=12$ (bukan akar; tetapi tandanya berbeda dengan $f(1)$, jadi ada akar di antara -1 dan 1)

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- $f(2) = 16 - 12 - 22 + 6 = -12$ (bukan akar)
- $f(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$ (akar)

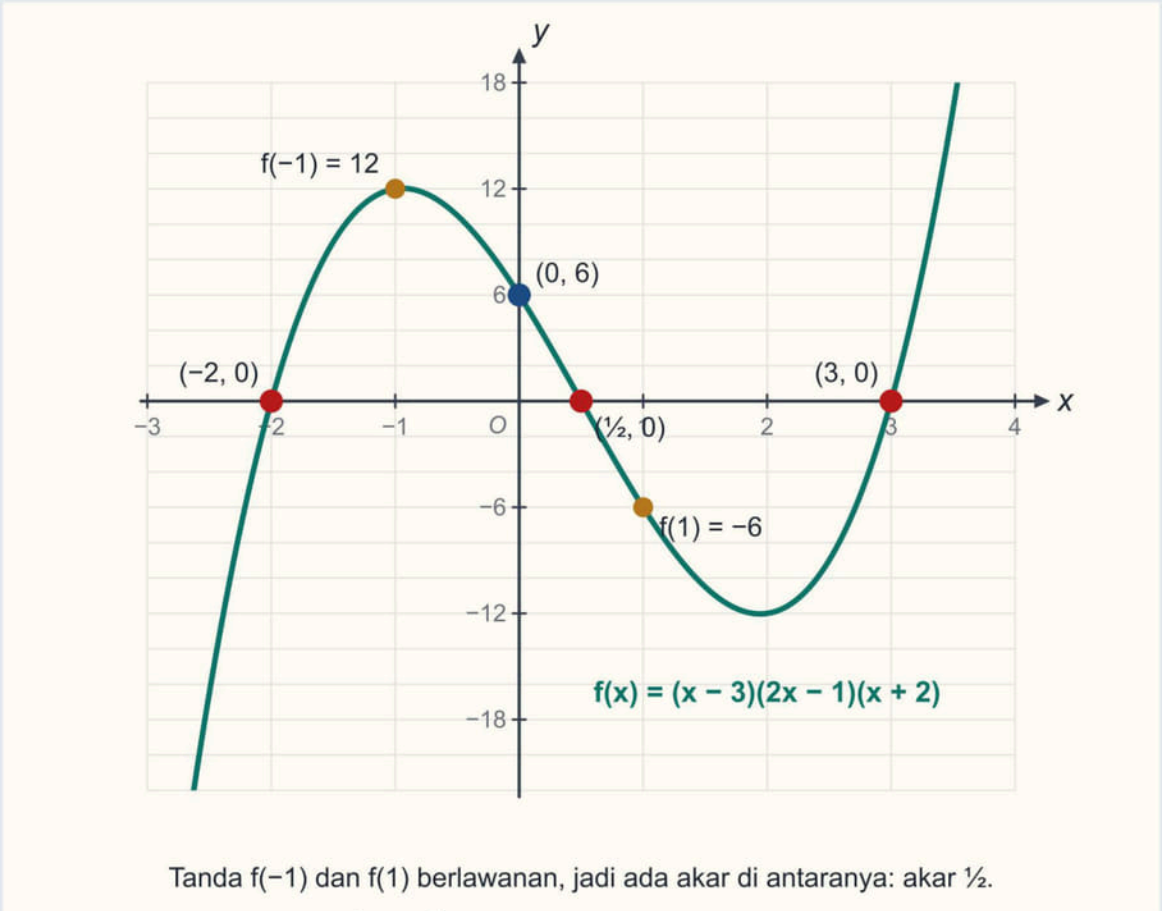
Horner dengan $k = 3$:

	x^3	x^2	x	konstanta
Koefisien f	2	-3	-11	6
Dikali 3		6	9	-6
Jumlah	2	3	-2	**0**

Hasil baginya $2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2)$. Jadi

$$f(x) = (x - 3)(2x - 1)(x + 2)$$

Akar-akarnya 3, $\frac{1}{2}$, dan -2. Titik potongnya $(-2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, dan $(3, 0)$. Akar $\frac{1}{2}$ memang terletak di antara -1 dan 1, sesuai petunjuk perubahan tanda. Gambar 1.23 memperlihatkan mengapa petunjuk itu bekerja: grafik polinomial tidak terputus, jadi untuk berpindah dari nilai positif ($f(-1) = 12$) ke nilai negatif ($f(1) = -6$), grafik harus melewati sumbu X.



Gambar 1.23 Grafik $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ memotong sumbu X di -2, $\frac{1}{2}$, dan 3, serta memotong sumbu Y di $(0, 6)$, yaitu suku tetapnya. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Polinomial berderajat 4: Horner dua kali atau pengelompokan

Polinomial berderajat 4 dikerjakan dengan pola yang sama. Temukan satu akar, lakukan Horner, lalu ulangi pada hasil bagi berderajat 3. Kadang hasil bagi itu dapat difaktorkan lebih cepat dengan **pengelompokan**.

Contoh terselesaikan 3: derajat 4

Faktorkan $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ dan tentukan titik potongnya dengan sumbu X.

Penyelesaian. Jumlah koefisien $1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$, jadi $f(1) = 0$ dan $x = 1$ adalah akar. Horner dengan $k = 1$:

	x^4	x^3	x^2	x	konstanta
Koefisien f	1	2	-7	-8	12
Dikali 1		1	3	-4	-12
Jumlah	1	3	-4	-12	**0**

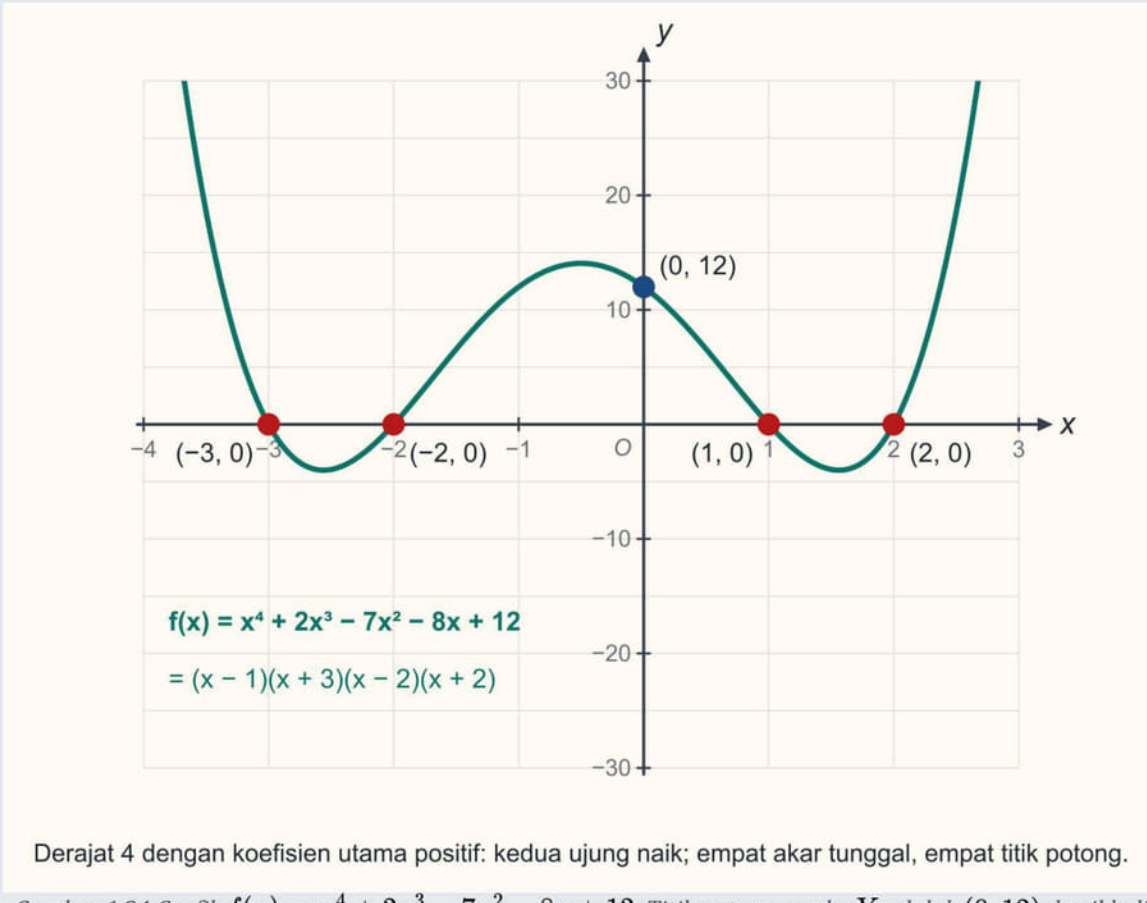
Hasil baginya $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. Kelompokkan dua suku pertama dan dua suku terakhir:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 4) = (x + 3)(x - 2)(x + 2)$$

Jadi $f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)(x + 2)$. Titik potongnya $(-3, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, dan $(2, 0)$. Grafiknya pada Gambar 1.24: empat akar tunggal memberi empat titik potong, dan karena derajatnya genap dengan koefisien utama positif, kedua ujung grafik naik.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.24 Grafik $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$. Titik potong sumbu Y adalah $(0, 12)$; hasil kali keempat akar, $(-3)(-2)(1)(2) = 12$, sesuai Vieta. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. Teorema Vieta: jumlah dan hasil kali akar

Teorema Vieta menghubungkan akar-akar dengan koefisien **tanpa** mencari akarnya satu per satu. Untuk polinomial berderajat 3 dengan akar x_1, x_2, x_3, jabarkan bentuk faktornya:

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = a\left[x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x\right.$$

Samakan dengan ax^3+bx^2+cx+d, maka diperoleh rumus berikut.

Derajat	Polinomial	Rumus Vieta
2	ax^2+bx+c	$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}$
3	ax^3+bx^2+cx+d	$\sum x_1=-\frac{b}{a},\ \sum x_1x_2=\frac{c}{a},\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$
4	$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$	$\sum x_1=-\frac{b}{a},\ \sum x_1x_2=\frac{c}{a},\ \sum x_1x_2x_3=-\frac{d}{a},\ x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}$

Lambang $\sum x_1x_2$ berarti jumlah hasil kali **semua pasangan** akar. Polanya mudah diingat: koefisien dibagi a dengan tanda bergantian $-, +, -, +$.

Kegunaan Vieta di soal TKA:

- **memeriksa** akar yang sudah kamu temukan (cepat dan ampuh);
- **mencari parameter** bila ada hubungan antarakar, misalnya "akar yang satu dua kali akar yang lain";
- **menghitung bentuk simetris**, misalnya $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(\sum x_1)^2-2\sum x_1x_2$.

Hati-hati: rumus Vieta menghitung **semua** akar, termasuk akar yang tidak real dan akar kembar. Bila sebagian akar tidak real, $-\frac{b}{a}$ **bukan** jumlah akar real.

Contoh terselesaikan 4: akar membentuk barisan aritmetika

Akar-akar persamaan $x^3-6x^2+kx-6=0$ membentuk barisan aritmetika. Tentukan k, akar-akarnya, dan nilai $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

Penyelesaian. Misalkan akar-akarnya $m-d, m$, dan $m+d$. Menurut Vieta, jumlahnya $3m=-\frac{-6}{1}=6$, jadi $m=2$. Berarti $x=2$ adalah akar:

$$f(2)=8-24+2k-6=2k-22=0 \ \Rightarrow\ k=11$$

Horner dengan pembagi $(x-2)$ pada koefisien $1,-6,11,-6$ memberi baris jumlah $1,-4,3,0$. Hasil baginya $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Akar-akarnya $1,2,3$ dan memang membentuk barisan aritmetika.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(6)^2-2(11)=14$$

Cek langsung: $1+4+9=14$. Cek hasil kali: $1\cdot2\cdot3=6=-\frac{-6}{1}$.

5. Kelipatan akar: memotong atau menyinggung

Akar dapat muncul lebih dari sekali. Bila $f(x)$ memuat faktor $(x-k)^m$ dan tidak memuat $(x-k)^{m+1}$, maka k disebut akar **berkelipatan** m.

- m **ganjil** (1, 3): grafik **memotong** sumbu X di $(k,0)$. Tanda f berganti saat melewati k.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- m **genap** (2, 4): grafik **menyinggung** sumbu X di $(k, 0)$, lalu berbalik arah. Tanda f tidak berganti.

Akibatnya, polinomial berderajat 3 dapat memiliki tiga akar bila dihitung dengan kelipatannya, tetapi hanya dua titik persekutuan dengan sumbu X. Untuk mendeteksi akar kembar, lakukan Horner lagi dengan k yang sama pada hasil bagi.

Contoh terselesaikan 5: akar kembar

Tentukan akar-akar $f(x) = x^3 - 3x + 2$ dan jelaskan bentuk grafiknya di sekitar sumbu X.

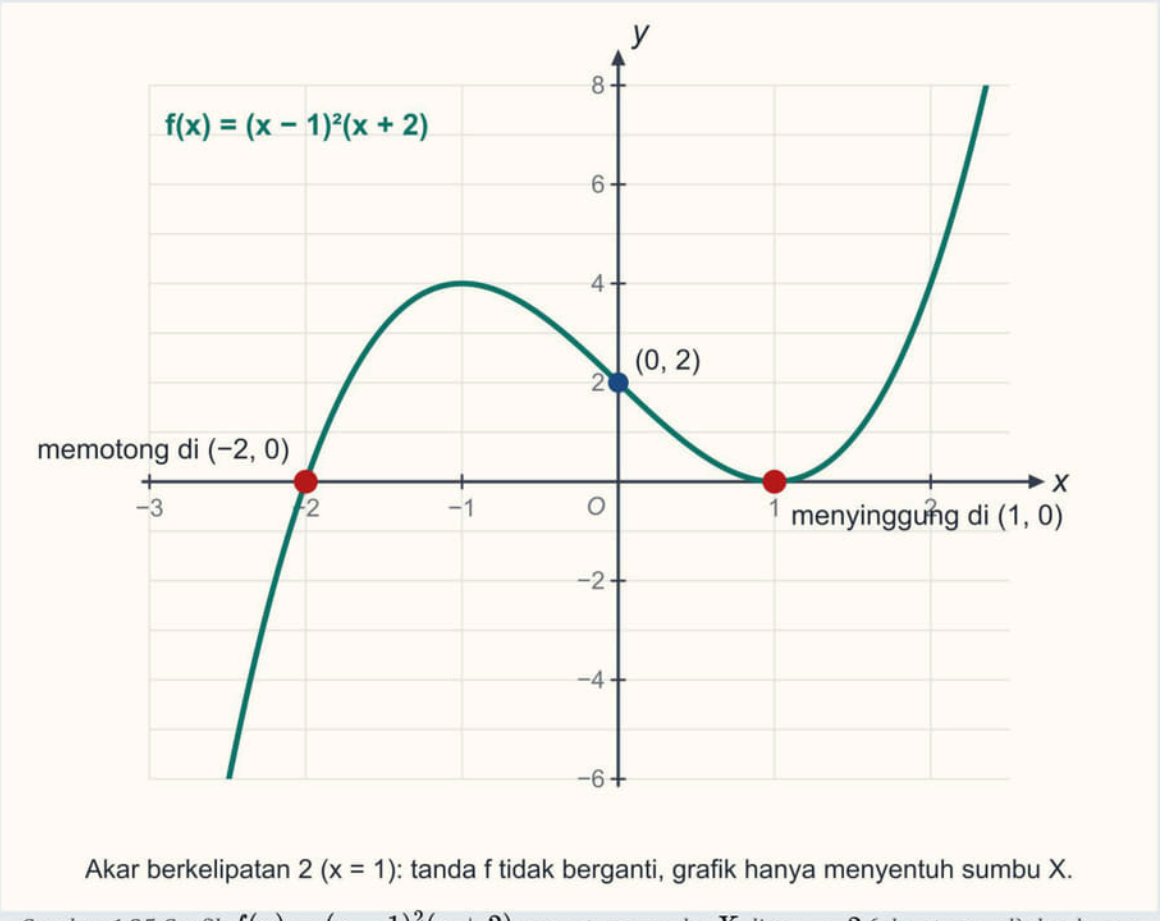
Penyelesaian. Calon akarnya $\pm 1, \pm 2$. Jumlah koefisien $1 + 0 - 3 + 2 = 0$, jadi $f(1) = 0$. Horner dengan $k = 1$ pada koefisien $1, 0, -3, 2$ (ingat 0 untuk x^2) memberi baris jumlah $1, 1, -2, 0$. Hasil baginya $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Faktor $(x - 1)$ muncul lagi, jadi

$$f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$$

- $x = 1$ berkelipatan 2: grafik **menyinggung** sumbu X di $(1, 0)$. Cek tanda: $f(0) = 2 > 0$ dan $f(2) = 4 > 0$, jadi tandanya tidak berganti.
- $x = -2$ berkelipatan 1: grafik **memotong** sumbu X di $(-2, 0)$. Cek tanda: $f(-3) = -16 < 0$ dan $f(-1) = 4 > 0$.

Persamaan ini memiliki dua akar berbeda, dan grafiknya hanya punya dua titik persekutuan dengan sumbu X. Bandingkan kedua titik itu pada Gambar 1.25.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.25 Grafik $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ memotong sumbu X di $x = -2$ (akar tunggal) dan hanya menyinggung di $x = 1$ (akar kembar). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Cek Vieta dengan akar dihitung kelipatannya $(1, 1, -2)$: jumlahnya $0 = -\frac{0}{1}$ dan hasil kalinya $-2 = -\frac{2}{1}$.

6. Polinomial sebagai model: memilih akar yang masuk akal

Pada soal berkonteks, polinomial menyatakan volume, modal, biaya, atau banyak benda. Pertanyaan "berapa x agar nilainya C?" diselesaikan dengan langkah berikut.

1. Tulis model dan persamaannya, $f(x) = C$.
2. Pindahkan semua suku ke ruas kiri: $f(x) - C = 0$. Langkah ini sering terlupa, padahal suku tetapnya berubah.
3. Cari akar-akarnya (uji akar rasional, Horner, rumus abc).
4. **Saring akar dengan syarat konteks (domain).**
5. Untuk pertanyaan "mungkin atau tidak mungkin $x = \ldots$", kamu cukup memasukkan nilai itu. Tidak perlu mencari semua akar.

Syarat domain yang paling sering dipakai:

Besaran	Syarat yang harus dipenuhi
Panjang, lebar, tinggi	positif, termasuk ukuran lain yang bergantung pada x (misalnya $20 - 2x > 0$)

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Banyak barang, unit saham, lapisan, orang	bilangan **bulat** positif
Waktu sejak awal pengamatan	tidak negatif
Batas tambahan dari soal	misalnya "tinggi minimal 2 dm" atau "paling banyak 50 unit"

Ukuran panjang **boleh** bernilai pecahan atau bilangan irasional. Banyak benda **tidak boleh**. Perbedaan ini sering menentukan jawaban.

Contoh terselesaikan 6: ukuran kotak (domain kontinu)

Sebuah jasa ekspedisi menerima kotak beralas persegi dengan aturan "panjang sisi alas ditambah tinggi tepat 12 dm" (data disusun untuk contoh). Seorang pedagang ingin mengirim kotak bervolume 128 dm³.

- (a) Tentukan semua ukuran kotak yang mungkin.
- (b) Bila tinggi kotak minimal 2 dm, ukuran mana yang dipakai?

Penyelesaian. Misalkan sisi alas x dm, jadi tinggi $(12 - x)$ dm. Domainnya $0 < x < 12$, karena sisi dan tinggi harus positif.

$$x^2(12 - x) = 128 \;\Rightarrow\; x^3 - 12x^2 + 128 = 0$$

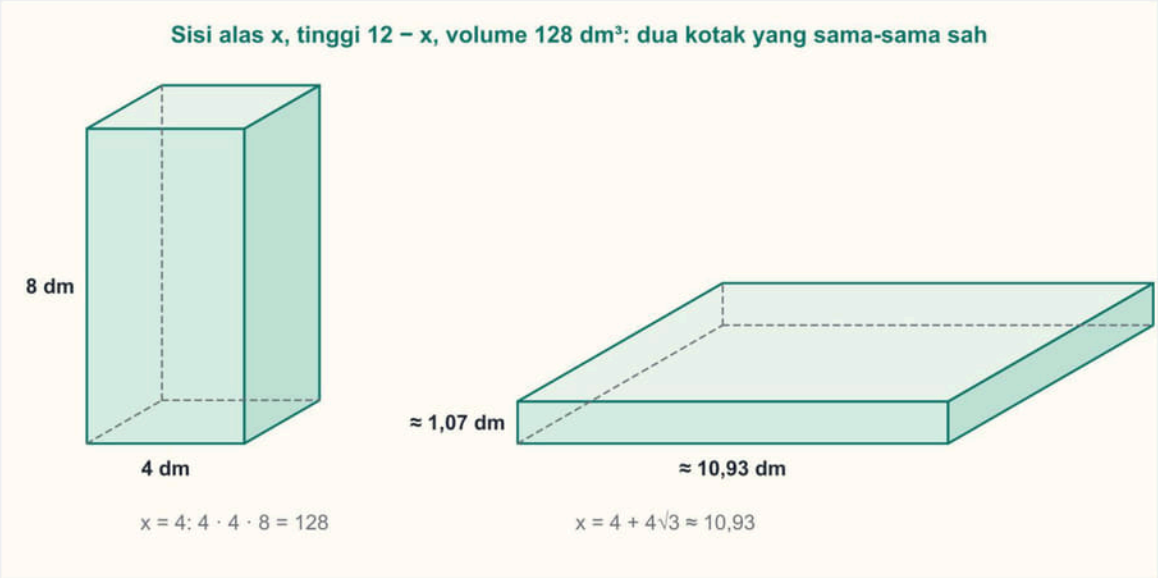
Calon akar bulatnya pembagi 128. Coba $x = 4$: $64 - 192 + 128 = 0$, jadi 4 adalah akar. Horner dengan $k = 4$ pada koefisien $1, -12, 0, 128$ memberi baris jumlah $1, -8, -32, 0$. Sisanya diperoleh dari

$$x^2 - 8x - 32 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 128}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 4 \pm 4\sqrt{3}$$

Nilai $4 - 4\sqrt{3} \approx -2{,}93$ ditolak karena negatif. Nilai $4 + 4\sqrt{3} \approx 10{,}93$ **diterima**, karena berada di antara 0 dan 12.

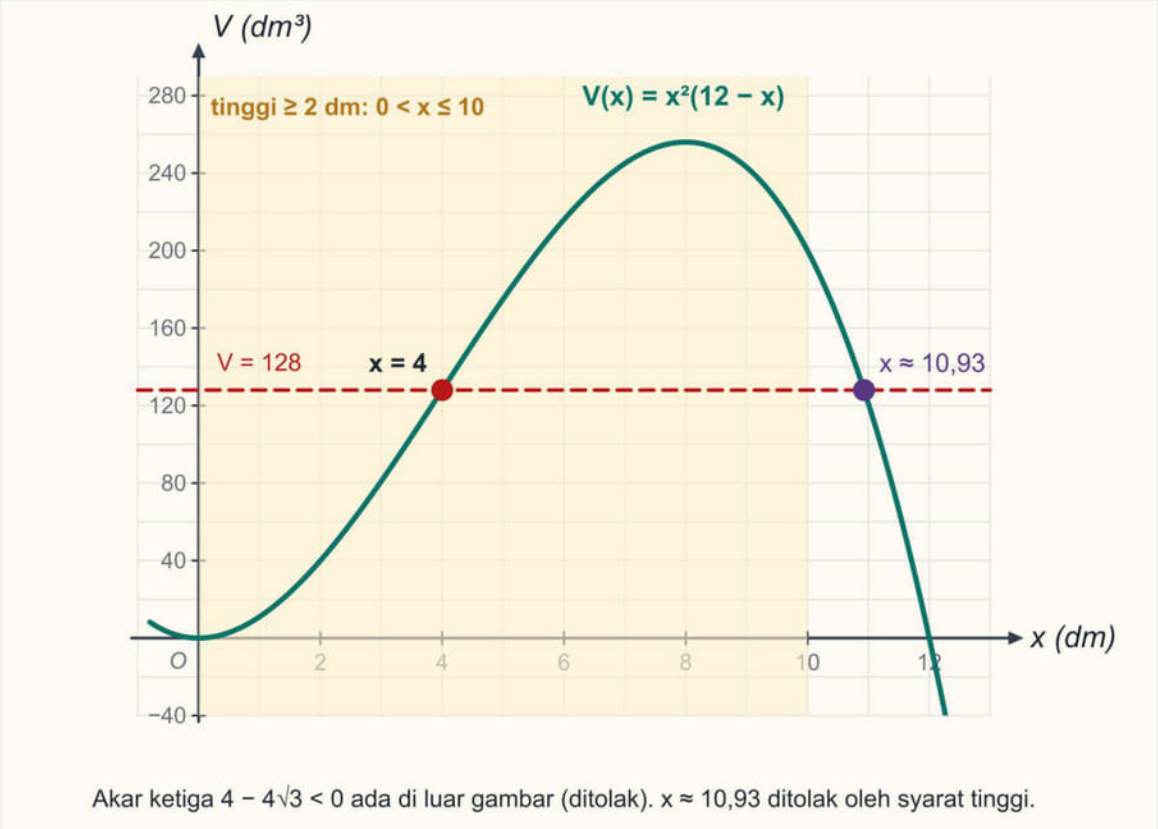
(a) Ada dua ukuran: alas 4×4 dm dengan tinggi 8 dm, atau alas sekitar $10{,}93 \times 10{,}93$ dm dengan tinggi sekitar $1{,}07$ dm. Cek ukuran pertama: $4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$. Kedua kotak digambar berskala pada Gambar 1.26; keduanya sungguh bervolume 128 dm³.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.26 Dua kotak yang memenuhi aturan "sisi alas + tinggi = 12 dm" dan bervolume 128 dm³: kotak tinggi $4 \times 4 \times 8$ *dan kotak pipih* $\approx 10{,}93 \times 10{,}93 \times 1{,}07$*. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.*

(b) Tinggi minimal 2 dm berarti $12 - x \geq 2$, atau $x \leq 10$. Hanya $x = 4$ yang memenuhi, jadi kotaknya berukuran $4 \times 4 \times 8$ dm. Gambar 1.27 merangkum seluruh penalaran: garis $V = 128$ memotong grafik volume di dua titik dalam domain $0 < x < 12$, dan syarat tinggi menyisakan satu.



Gambar 1.27 Grafik $V(x) = x^2(12 - x)$ *dan garis* $V = 128$*. Daerah kuning adalah domain yang memenuhi syarat tinggi minimal 2 dm (*$0 < x \leq 10$*). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.*

Perhatikan bahwa akar irasional $4 + 4\sqrt{3}$ tidak otomatis ditolak. Panjang boleh tidak bulat.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Yang menolaknya pada bagian (b) adalah syarat tambahan dari soal.

Contoh terselesaikan 7: tumpukan jeruk (domain bilangan bulat)

Seorang pedagang buah menyusun jeruk menjadi tumpukan berbentuk limas beralas persegi. Lapisan teratas berisi 1 jeruk, lapisan kedua $2 \times 2 = 4$ jeruk, lapisan ketiga 9 jeruk, dan seterusnya. Banyak jeruk pada tumpukan lengkap n lapis adalah (data disusun untuk contoh)

$$T(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Nilailah setiap pernyataan berikut.

Penyelesaian. Beberapa nilai $T(n)$: $T(6) = 91$, $T(7) = 140$, dan $T(8) = 204$. Untuk n positif, $T(n)$ selalu bertambah bila n bertambah. Persamaan $T(n) = 140$ setara dengan $2n^3 + 3n^2 + n - 840 = 0$. Horner dengan $k = 7$ pada koefisien $2, 3, 1, -840$ memberi baris jumlah $2, 17, 120, 0$, jadi hasil baginya $2n^2 + 17n + 120$.

Pernyataan	Nilai	Alasan
Tumpukan lengkap 7 lapis memuat tepat 140 jeruk	Benar	$T(7) = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140$
Persamaan $T(n) = 140$ hanya memiliki satu akar real	Benar	diskriminan $2n^2 + 17n + 120$ adalah $289 - 960 = -671 < 0$, jadi tidak ada akar real lain
Tepat 100 jeruk dapat disusun menjadi satu tumpukan lengkap	Salah	$T(6) = 91 < 100 < 140 = T(7)$; akar real $T(n) = 100$ terletak di antara 6 dan 7, jadi bukan bilangan bulat
Dengan 200 jeruk, pedagang dapat membuat tumpukan lengkap 8 lapis	Salah	$T(8) = 204 > 200$; paling banyak 7 lapis, dan masih tersisa $200 - 140 = 60$ jeruk

Pernyataan ketiga menunjukkan perbedaan penting. Persamaan $T(n) = 100$ **punya** akar real, tetapi akar itu tidak bulat. Karena banyak lapisan harus bulat, jawabannya "tidak mungkin".

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal faktor, akar, dan titik potong

1. **Ubah pertanyaan menjadi persamaan.** "Titik potong sumbu X" berarti $f(x) = 0$. "Modal 2.000 juta" berarti $f(x) = 2.000$, lalu pindahkan ke ruas kiri.
2. **Manfaatkan pilihan jawaban.** Pada PG kompleks, kamu dapat langsung menguji setiap pilihan dengan substitusi. Pilihan yang menghasilkan 0 adalah akar.
3. **Bila harus mencari sendiri,** mulai dari $f(1)$ dan $f(-1)$, lalu pembagi suku tetap. Begitu menemukan satu akar, lakukan Horner.
4. **Turunkan sampai kuadrat,** lalu faktorkan atau pakai rumus abc. Periksa diskriminannya.
5. **Periksa dengan Vieta** (jumlah dan hasil kali akar).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

6. **Tulis titik potong dengan tanda yang benar.** Faktor $(x+4)$ memberi titik $(-4, 0)$.
7. **Pada soal berkonteks, saring akar dengan domain** (positif, bulat, dan syarat tambahan), lalu jawab yang ditanya.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Tanda faktor dan titik potong tertukar	Dari $(x+4)$ menulis titik $(4, 0)$ (pengecoh SA-5)	Selesaikan $x+4=0$, jadi $x=-4$
Mengira akar selalu bulat	Berhenti mencari setelah semua pembagi bulat suku tetap gagal	Bila koefisien utama bukan 1, coba juga pecahan $\frac{p}{q}$; setelah Horner, pakai rumus abc
Akar negatif "diperbaiki" dengan membuang tandanya	Dari akar -30 menyimpulkan "30 unit mungkin" (pengecoh SA-8)	Akar negatif ditolak seluruhnya; nilai mutlaknya **bukan** akar
Batas domain diambil dari sisi yang salah	Karton 30×20 cm memberi syarat $x < 15$	Semua sisi harus positif; yang paling cepat habis yang menentukan, yaitu $20 - 2x > 0$
Akar irasional langsung ditolak	Menolak $x = 4 + 4\sqrt{3}$ karena "tidak bulat", padahal x adalah panjang	Hanya banyak benda yang wajib bulat
Akar kembar dihitung dua titik potong	$(x-1)^2(x+2)$ dianggap memotong sumbu X di tiga titik	Hitung titik **berbeda**; akar kembar menyinggung
Vieta dipakai untuk akar real saja	Mengira jumlah akar real $= -\frac{b}{a}$ padahal ada akar tidak real	Vieta menjumlahkan semua akar; cek diskriminan sisa kuadratnya
Lupa memindahkan konstanta	Mencari akar $f(x)=0$ padahal yang diminta $f(x)=2.000$	Tulis $f(x) - C = 0$ dulu, baru cari akarnya
Titik potong sumbu Y dikira akar	Menulis $(0, 24)$ sebagai titik potong sumbu X	Sumbu Y: $x=0$. Sumbu X: $y=0$

BEDAH SOAL ASLI

Soal pertama (SA-5) dijawab benar oleh 23,14 % peserta. Ada dua jalan. Jalan cepat: masukkan setiap pilihan ke $f(x)$ dan pilih yang hasilnya 0 (lima kali substitusi). Jalan lengkap: cari satu akar dari pembagi -24, lakukan Horner, lalu faktorkan hasil bagi. Jalan lengkap memperlihatkan bahwa akar ketiganya -4, bukan 4. Inilah sebabnya pilihan $(4, 0)$ menjebak. PG kompleks menuntut **semua** jawaban benar dipilih dan tidak ada yang salah ikut terpilih.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Di manakah koordinat titik potong grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ terhadap sumbu X?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(-2, 0)$
☐ B. $(-1, 0)$
☐ C. $(3, 0)$
☐ D. $(4, 0)$
☐ E. $(5, 0)$

Pembahasan **Kunci: A, C**

Konsep: titik potong dengan sumbu X adalah akar-akar $f(x) = 0$. Menurut teorema faktor, akar bulat suku banyak bermonik pasti pembagi suku tetapnya (-24).

Langkah 1 – Uji calon akar.
• $f(-2) = -8 + 12 + 20 - 24 = 0$ ✓
• $f(3) = 27 + 27 - 30 - 24 = 0$ ✓

Langkah 2 – Horner dengan $x = 3$. Koefisien $1,\ 3,\ -10,\ -24 \rightarrow$ hasil bagi $x^2 + 6x + 8$, sisa 0.
$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$
Jadi $f(x) = (x - 3)(x + 2)(x + 4)$, akar-akarnya $-4, -2$, dan 3.

Cek dengan Vieta: jumlah akar $-4 - 2 + 3 = -3 = -\frac{3}{1}$ ✓; hasil kali $(-4)(-2)(3) = 24 = -\frac{-24}{1}$ ✓.

Analisis pilihan:
• $(-2, 0)$ ✓ dan $(3, 0)$ ✓.
• $(-1, 0)$ ✗: $f(-1) = -1 + 3 + 10 - 24 = -12$.
• $(4, 0)$ ✗: $f(4) = 64 + 48 - 40 - 24 = 48$. **Jebakan:** akar sebenarnya -4, bukan 4 (salah tanda saat membaca faktor $x + 4$).
• $(5, 0)$ ✗: $f(5) = 125 + 75 - 50 - 24 = 126$.

Jawaban: $(-2, 0)$ **dan** $(3, 0)$.

Soal berikutnya (SA-8) dijawab benar oleh 52,56 % peserta, jadi sedikit lebih dari separuh. Langkah yang paling sering terlewat adalah mengubah "modal 2 miliar" menjadi persamaan $f(x) = 2.000$ (dalam juta rupiah), lalu memindahkan 2.000 ke ruas kiri. Setelah itu kamu cukup menguji nilai 30, 40, dan 60. Pengecoh 30 unit berasal dari akar -30 yang tandanya diabaikan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah perusahaan menawarkan saham kepada pembeli. Perusahaan menyiapkan modal saham yang akan dijual dan dapat dinyatakan sebagai fungsi
$f(x) = x^3 - 70x^2 - 600x + 74.000$
dengan nilai $f(x)$ dalam jutaan rupiah dan x menyatakan banyak saham dalam satuan unit. Modal saham yang dimiliki perusahaan tersebut adalah 2 miliar rupiah (2.000 juta).
Tentukan **Benar** atau **Salah**: perusahaan **mungkin** menjual sejumlah unit saham berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
30 unit saham	○	○
40 unit saham	○	○
60 unit saham	○	○

Pembahasan **Kunci: 1S 2B 3B**

Konsep: banyak unit x yang mungkin adalah penyelesaian $f(x) = 2.000$, yaitu akar polinomial $f(x) - 2.000 = 0$ yang bernilai positif.

Langkah 1 – Susun persamaan.
$x^3 - 70x^2 - 600x + 72.000 = 0$

Langkah 2 – Uji nilai yang ditanyakan.
• $x = 30$: $27.000 - 63.000 - 18.000 + 72.000 = 18.000 \neq 0 \rightarrow$ modalnya $f(30) = 20.000$ juta, bukan 2.000 juta.
• $x = 40$: $64.000 - 112.000 - 24.000 + 72.000 = 0$ ✓
• $x = 60$: $216.000 - 252.000 - 36.000 + 72.000 = 0$ ✓

Langkah 3 – Faktorkan untuk memastikan. Bagi dengan $(x - 40)$ (Horner): hasil bagi $x^2 - 30x - 1.800 = (x - 60)(x + 30)$. Jadi akar-akarnya $40, 60$, dan -30. Nilai -30 ditolak karena banyak saham tidak mungkin negatif.

Kesimpulan:
1. 30 unit → **Salah** (tidak mungkin). **Jebakan:** angka 30 berasal dari akar -30 yang tandanya diabaikan.
2. 40 unit → **Benar** (mungkin).
3. 60 unit → **Benar** (mungkin).

Jawaban: Salah, Benar, Benar.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memakai suku banyak sebagai model keuntungan. Akar-akarnya adalah bulan ketika usaha impas, dan tanda $U(x)$ di antara dua akar menunjukkan untung atau rugi. Faktorkan dulu, lalu nilai ketiga pernyataan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Keuntungan sebuah usaha sablon kaus pada bulan ke-x dimodelkan $U(x) = -x^3 + 9x^2 - 23x + 15$ juta rupiah untuk $0 \le x \le 6$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Usaha itu impas (keuntungannya nol) pada bulan ke-1, ke-3, dan ke-5.	○	○
Usaha itu memperoleh keuntungan pada bulan ke-2.	○	○
$U(4) = 3$.	○	○

Pembahasan **Kunci: 1B 2S 3B**

Konsep: akar suku banyak adalah nilai x yang membuat $U(x) = 0$; tanda U di antara dua akar berurutan tetap, dan dapat dicek dengan substitusi.

Pernyataan 1. $U(x) = -(x-1)(x-3)(x-5)$, jadi $U(1) = U(3) = U(5) = 0$ → **Benar**.
Pernyataan 2. $U(2) = -8 + 36 - 46 + 15 = -3$, artinya rugi Rp3 juta → **Salah**.
Pernyataan 3. $-64 + 144 - 92 + 15 = 3$ → **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

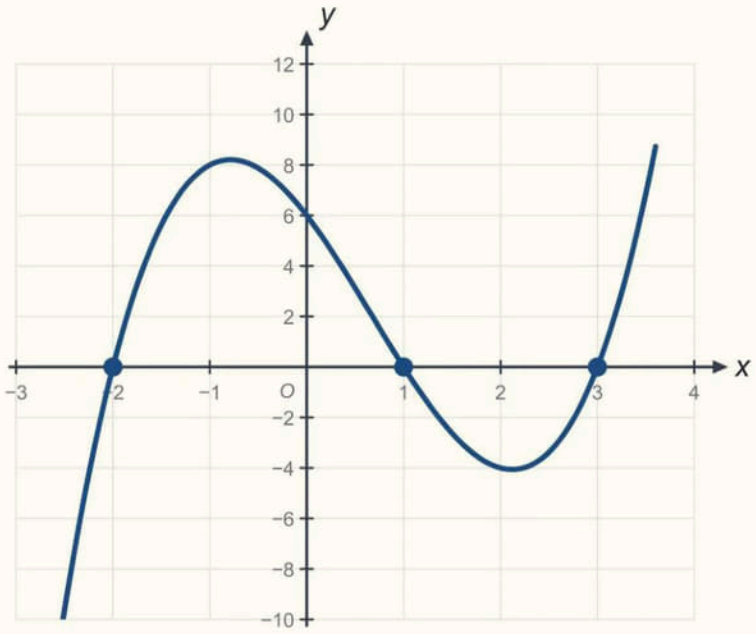
Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: koefisien x^3 yang negatif membuat tanda $U(x)$ berselang-seling mulai dari positif untuk $x < 1$: untung, rugi, untung, rugi. Karena itu bulan ke-2 (di antara akar 1 dan 3) rugi, sedangkan bulan ke-4 (di antara akar 3 dan 5) untung. Satu substitusi sudah cukup untuk memastikan tanda di setiap selang.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu persamaan $f(x) = 0$ dan akar-akar yang kamu temukan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Gambar berikut adalah grafik suku banyak $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Grafik f memotong sumbu X di tiga titik.	○	○
$(x - 1)$ adalah faktor dari $f(x)$.	○	○
$f(0) = -6$.	○	○

2. Diketahui persamaan $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
$x = 1$ adalah salah satu akar persamaan itu.	○	○
Jumlah ketiga akar persamaan itu adalah 4.	○	○
Hasil kali ketiga akar persamaan itu adalah 6.	○	○

Kunci singkat: 1. 1B 2B 3S 2. 1S 2B 3S

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Bila $(x+5)$ adalah faktor $f(x)$, apa yang kamu ketahui tentang $f(-5)$ dan tentang grafik $y=f(x)$?
- Setelah menemukan satu akar polinomial berderajat 3, langkah apa yang kamu lakukan untuk menemukan akar-akar lainnya, dan bagaimana kamu memeriksanya dengan Vieta?
- Dalam soal berkonteks, kapan akar irasional boleh diterima, dan kapan akar yang tidak bulat harus ditolak?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.6: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.6

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.7 · Domain, range, dan grafik fungsi polinom, rasional, dan akar

MATTL-1.7

◎ APA YANG DIUJI

Kisi-kisi resmi TKA Matematika Tingkat Lanjut mencantumkan **domain, kodomain, dan range** fungsi serta **grafik fungsi polinom (sampai derajat empat), rasional, dan akar**. Soal asli TKA 2025 belum memuat soal khusus untuk bagian ini, tetapi karena tercantum di kisi-kisi resmi, bagian ini tetap perlu kamu kuasai. Cara berpikirnya juga dipakai di soal lain: syarat akar dan penyebut muncul lagi di limit (Bab 3), dan membaca grafik dipakai di sub bab 1.8 dan 1.9.

Bentuk soal yang perlu kamu siapkan (sesuai kisi-kisi dan latihan di buku ini):

- menentukan domain (daerah asal) sebuah fungsi atau fungsi komposisi;
- membaca grafik fungsi rasional beserta asimtotnya, lalu menilai beberapa pernyataan (PG kompleks);
- menyusun rumus polinom dari grafik (titik potong, titik singgung, satu titik lain);
- soal kecukupan data: "apakah informasi (1) dan (2) cukup untuk menjawab?".

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menentukan domain fungsi dari syarat penyebut dan syarat akar;
- menentukan domain fungsi komposisi tanpa tertipu rumus akhirnya;
- menentukan range fungsi akar dan fungsi rasional;
- menentukan asimtot tegak dan asimtot datar fungsi rasional, lalu membuat sketsa grafiknya;
- membaca dan menyusun rumus polinom dari akar-akarnya, termasuk akar yang menyinggung;
- menilai pernyataan tentang fungsi dalam konteks (misalnya biaya per orang).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

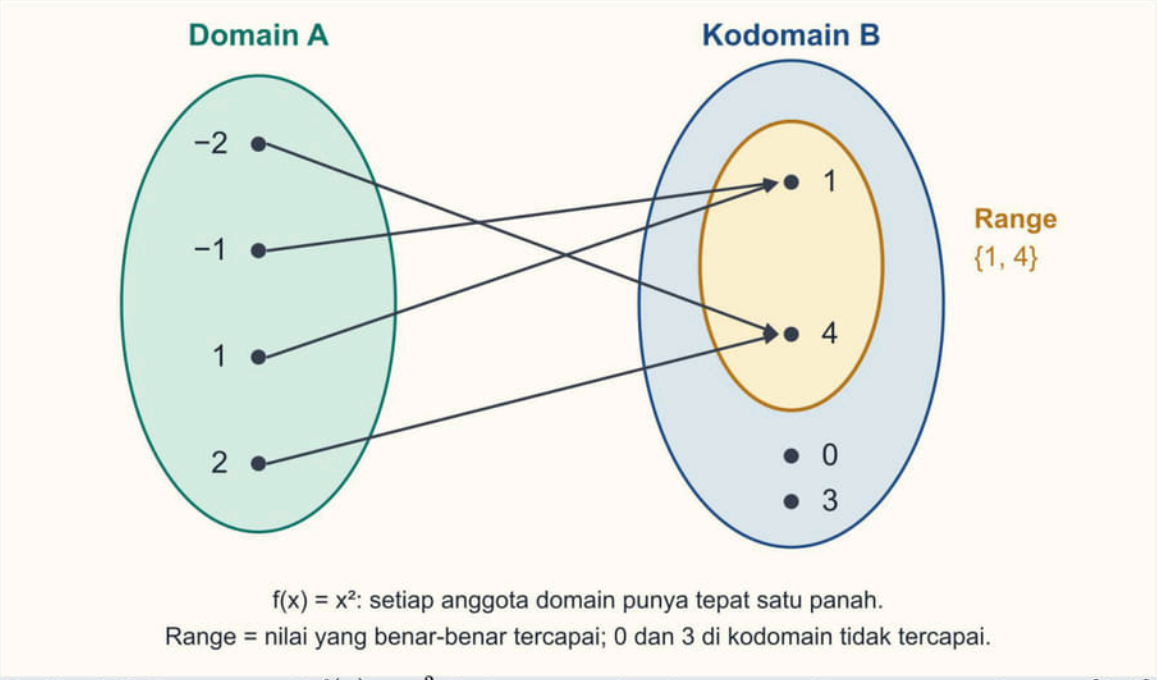
◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Domain, kodomain, dan range

Fungsi f memasangkan setiap anggota himpunan asal dengan **tepat satu** anggota himpunan tujuan.

- **Domain** (daerah asal), ditulis D_f: semua nilai x yang boleh dimasukkan ke f.
- **Kodomain** (daerah kawan): himpunan tujuan yang ditetapkan, biasanya semua bilangan real.
- **Range** (daerah hasil), ditulis R_f: semua nilai $f(x)$ yang **benar-benar tercapai**. Range selalu bagian dari kodomain.

Gambar 1.28 memperlihatkan ketiganya pada fungsi $f(x) = x^2$ dengan domain $\{-2, -1, 1, 2\}$. Kodomainnya boleh memuat bilangan yang tidak pernah menjadi hasil, misalnya 0 dan 3; bilangan seperti itu tidak termasuk range.



Gambar 1.28 Diagram panah $f(x) = x^2$. Setiap anggota domain mempunyai tepat satu panah; range $\{1, 4\}$ adalah bagian kodomain yang benar-benar dicapai. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bila soal tidak menyebut domainnya, domain yang dimaksud adalah **domain alami**: semua bilangan real x yang membuat rumus $f(x)$ bermakna. Ada dua syarat utama di tingkat SMA:

Bentuk dalam rumus	Syarat	Alasan
Pecahan $\frac{p(x)}{q(x)}$	$q(x) \neq 0$	pembagian dengan nol tidak terdefinisi
Akar pangkat genap $\sqrt{u(x)}$	$u(x) \geq 0$	akar bilangan negatif bukan bilangan real
Akar di penyebut $\frac{1}{\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$	kedua syarat di atas berlaku sekaligus

Satu syarat lagi akan kamu temui di sub bab 1.8: bilangan yang dilogaritmakan harus positif. Akar pangkat ganjil, misalnya $\sqrt[3]{x}$, tidak memberi syarat apa pun.

Dalam soal berkonteks, domain juga dibatasi oleh **makna**: banyak orang harus bilangan bulat tidak negatif, waktu tidak negatif, kapasitas bus terbatas.

Contoh terselesaikan 1: domain dari dua syarat

Tentukan domain

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x^2 - 4x + 3}$$

Penyelesaian. Syarat akar: $x + 4 \geq 0$, jadi $x \geq -4$. Syarat penyebut: $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \neq 0$, jadi $x \neq 1$ dan $x \neq 3$. Gabungkan kedua syarat:

$$D_f = \{x \mid x \geq -4,\ x \neq 1,\ x \neq 3,\ x \in \mathbb{R}\}$$

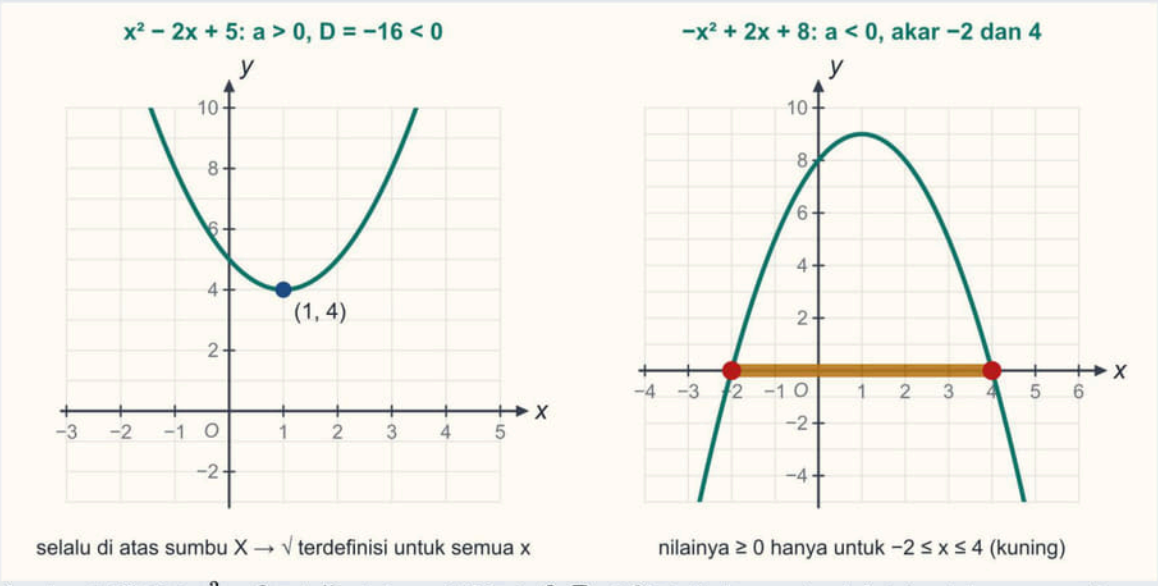
Akar dari bentuk kuadrat. Untuk $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ kamu perlu tahu kapan $ax^2 + bx + c \geq 0$. Ingat grafik parabola:

- Bila $a > 0$ dan diskriminan $D = b^2 - 4ac < 0$, parabola selalu di atas sumbu X. Bentuk kuadrat itu **definit positif**, jadi domainnya semua bilangan real. (Bila $D = 0$, parabola hanya menyinggung sumbu X; nilainya tetap ≥ 0.)
- Bila $a < 0$ dan $D < 0$, parabola selalu di bawah sumbu X, jadi tidak ada x yang memenuhi.
- Bila $D > 0$, cari akarnya, lalu tentukan selang yang nilainya ≥ 0.

Contoh: $\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ terdefinisi untuk semua x, karena $a = 1 > 0$ dan $D = 4 - 20 = -16 < 0$. Sebaliknya, $\sqrt{-x^2 + 2x + 8}$ memerlukan $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$. Akarnya $x = -2$ dan $x = 4$. Karena $a < 0$, parabola terbuka ke bawah, jadi nilainya ≥ 0 di antara kedua akar: domainnya $-2 \leq x \leq 4$. Cek dengan $x = 0$: nilainya $8 \geq 0$, cocok.

Perhatikan: tanda D saja tidak cukup. Tanda a menentukan apakah parabola berada di atas atau di bawah sumbu X. Kedua contoh tadi digambar pada Gambar 1.29.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.29 Kiri: $x^2 - 2x + 5$ *selalu positif (*$a > 0$*,* $D < 0$*), jadi akarnya terdefinisi untuk semua* x*. Kanan:* $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ *hanya di antara akar-akarnya,* $-2 \leq x \leq 4$*. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.*

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Domain fungsi komposisi

Fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dikerjakan dari dalam: x masuk ke f dulu, lalu hasilnya masuk ke g. Karena itu, x termasuk domain $g \circ f$ bila **dua syarat** dipenuhi:

1. x ada di domain f (supaya $f(x)$ bisa dihitung);
2. $f(x)$ ada di domain g (supaya g bisa menerima hasil itu).

Jebakan terbesarnya: menyederhanakan rumus $g(f(x))$ dulu, lalu mencari domain dari rumus akhir. Penyederhanaan dapat **menghapus** syarat dari fungsi bagian dalam.

Contoh terselesaikan 2: rumus akhir yang menipu

Diketahui $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = \sqrt{5 - x}$. Tentukan domain $g \circ f$ dan $f \circ g$.

Penyelesaian.

$g \circ f$: syarat 1, f terdefinisi untuk semua x. Syarat 2, $f(x)$ harus di domain g, yaitu $f(x) \le 5$:

$$x^2 + 1 \le 5 \;\Rightarrow\; x^2 \le 4 \;\Rightarrow\; -2 \le x \le 2$$

Rumus akhirnya $\sqrt{4 - x^2}$ memberi syarat yang sama, jadi di sini tidak ada masalah.

$f \circ g$: rumus akhirnya $(\sqrt{5 - x})^2 + 1 = 6 - x$. Rumus ini **terlihat** terdefinisi untuk semua x. Padahal syarat 1 meminta x di domain g, yaitu $x \le 5$. Coba $x = 6$: $g(6) = \sqrt{-1}$ tidak ada, jadi $f(g(6))$ juga tidak ada. Domain $f \circ g$ adalah $\{x \mid x \le 5\}$.

Pelajaran: **selalu tulis kedua syarat sebelum menyederhanakan.** Rumus akhir boleh dipakai untuk cek, bukan untuk menentukan domain.

Satu hal lagi. Bila g melarang suatu nilai, misalnya g tidak terdefinisi di $u = 2$, yang dilarang adalah $f(x) = 2$, **bukan** $x = 2$. Selesaikan $f(x) = 2$ untuk menemukan x yang harus dibuang.

3. Range fungsi akar dan fungsi rasional

Fungsi akar. Kuncinya: $\sqrt{u} \ge 0$ untuk setiap $u \ge 0$, dan $\sqrt{u}$ dapat mencapai berapa pun nilai tak negatif. Jadi:

- $y = \sqrt{x - h} + k$ mempunyai range $y \ge k$ (titik awal grafik (h, k), grafik naik);
- $y = k - \sqrt{x - h}$ mempunyai range $y \le k$ (grafik turun dari (h, k)).

Fungsi rasional linear $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ dengan $c \neq 0$: nyatakan x dalam y. Nilai y yang membuat penyebutnya nol tidak pernah tercapai. Hasilnya selalu: semua bilangan real **kecuali** $y = \frac{a}{c}$ (dengan syarat $ad - bc \neq 0$; bila $ad - bc = 0$, fungsinya konstan).

Contoh terselesaikan 3: dua range

(a) $f(x) = 3 - \sqrt{2x - 4}$. Domain: $2x - 4 \ge 0$, jadi $x \ge 2$. Karena $\sqrt{2x - 4} \ge 0$, nilai $f(x) \le 3$, dan nilai 3 tercapai di $x = 2$. Cek: $f(4) = 3 - 2 = 1$, $f(10) = 3 - 4 = -1$. Makin besar x, makin kecil $f(x)$. Range: $\{y \mid y \le 3\}$.

(b) $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$. Tulis $y(x + 1) = 3x - 2$, lalu kumpulkan x:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$yx - 3x = -2 - y \;\Rightarrow\; x = \frac{y+2}{3-y}$$

Rumus ini gagal hanya bila $y = 3$. Jadi range f adalah $\{y \mid y \neq 3\}$. Cek dengan $y = 5$: $x = \frac{7}{-2} = -3{,}5$, dan memang $f(-3{,}5) = \frac{-12{,}5}{-2{,}5} = 5$.

Rumus $x = \frac{y+2}{3-y}$ itu sekaligus rumus **fungsi invers**: $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}$. Jadi range f sama dengan domain f^{-1}.

4. Grafik fungsi rasional dan asimtotnya

Asimtot adalah garis yang makin didekati grafik ketika x atau y menjadi sangat besar.

- **Asimtot tegak** $x = p$: penyebut nol di $x = p$, sedangkan pembilang **tidak** nol. Di dekat $x = p$, nilai fungsi membesar tanpa batas (ke atas atau ke bawah). Bila pembilang juga nol di $x = p$, faktornya dapat dicoret; grafiknya hanya "berlubang" di titik itu, bukan berasimtot.
- **Asimtot datar** $y = q$: nilai yang didekati $f(x)$ ketika x sangat besar (positif atau negatif). Bandingkan derajat pembilang dan penyebut:

Derajat pembilang dibanding penyebut	Asimtot datar
lebih kecil	$y = 0$
sama	y = koefisien pangkat tertinggi pembilang dibagi koefisien pangkat tertinggi penyebut
lebih besar	tidak ada asimtot datar

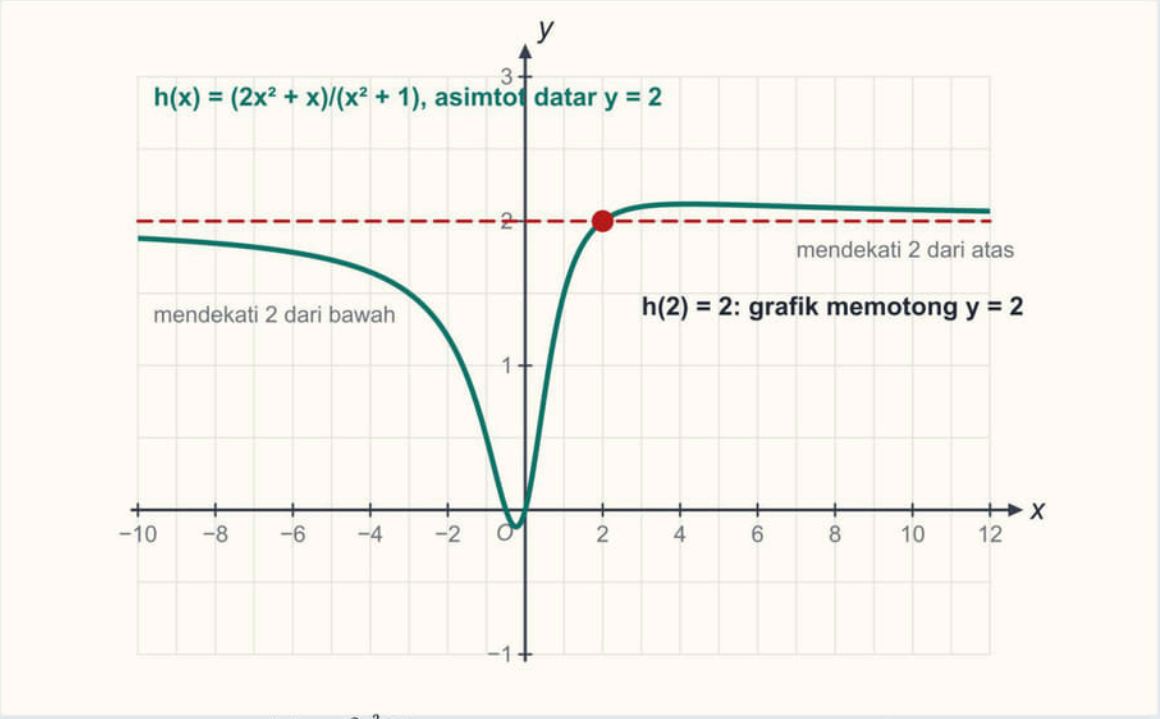
Mengapa begitu? Bagi pembilang dengan penyebut. Misalnya

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2} = \frac{(x-2)+6}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$$

Untuk x sangat besar, $\frac{6}{x-2}$ hampir nol, jadi $f(x)$ hampir 1. Bentuk "konstanta + sisa" ini juga langsung menunjukkan range: $\frac{6}{x-2}$ dapat bernilai berapa pun **kecuali 0**, sehingga $f(x)$ tidak pernah sama dengan 1.

Asimtot datar boleh dipotong. Asimtot tegak tidak pernah dipotong grafik (fungsinya tidak terdefinisi di sana). Asimtot datar hanya menggambarkan perilaku untuk x sangat besar, jadi di bagian tengah grafik boleh saja memotongnya. Contoh: $h(x) = \frac{2x^2+x}{x^2+1}$ berasimtot datar $y = 2$, tetapi $h(2) = \frac{10}{5} = 2$. Lihat Gambar 1.30: grafik h memotong garis $y = 2$ di $x = 2$, lalu mendekati garis itu lagi dari atas. Alasannya terbaca dari $h(x) - 2 = \frac{x-2}{x^2+1}$: selisihnya negatif untuk $x < 2$, nol di $x = 2$, dan positif untuk $x > 2$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.30 Grafik $h(x) = \frac{2x^2+x}{x^2+1}$ memotong asimtot datarnya $y = 2$ di $x = 2$. Asimtot datar hanya menggambarkan perilaku untuk x sangat besar atau sangat kecil. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Untuk fungsi rasional linear $\frac{ax+b}{cx+d}$, asimtot datarnya memang tidak pernah dipotong, karena nilai $\frac{a}{c}$ tidak termasuk range.

Contoh terselesaikan 4: membuat sketsa grafik fungsi rasional

Buat sketsa grafik $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$.

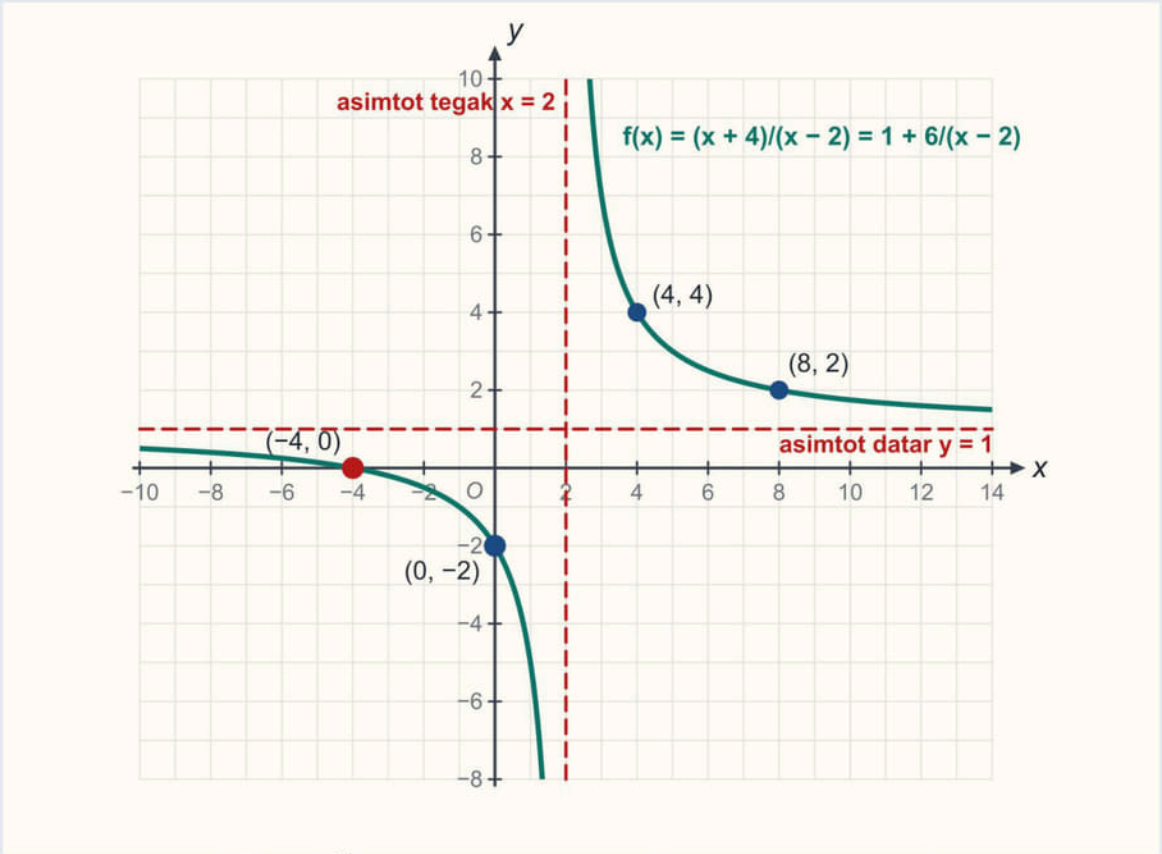
Penyelesaian. Kerjakan empat langkah berikut.

1. **Asimtot.** Tegak $x = 2$ (penyebut nol, pembilang $6 \neq 0$). Datar $y = 1$ (derajat sama, $\frac{1}{1}$).
2. **Titik potong.** Sumbu X: pembilang nol, $x = -4$, titik $(-4, 0)$. Sumbu Y: $f(0) = \frac{4}{-2} = -2$, titik $(0, -2)$.
3. **Tabel nilai** di kedua sisi asimtot tegak:

x	-10	-4	-1	0	1	3	4	5	8	14
$f(x)$	$0{,}5$	0	-1	-2	-5	7	4	3	2	$1{,}5$

1. **Baca polanya.** Cabang kiri ($x < 2$): mulai sedikit di bawah $y = 1$ untuk x sangat negatif, turun melalui $(-4, 0)$ dan $(0, -2)$, lalu menukik ke bawah saat mendekati $x = 2$. Cabang kanan ($x > 2$): turun dari sangat tinggi di dekat $x = 2$, melalui $(4, 4)$ dan $(8, 2)$, lalu mendatar mendekati $y = 1$ dari atas. Kedua cabang **turun** (karena $\frac{6}{x-2}$ mengecil bila $x - 2$ membesar). Hasil keempat langkah itu tampak pada Gambar 1.31.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.31 Grafik $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ dengan asimtot tegak $x = 2$ dan asimtot datar $y = 1$. Kedua cabang tidak pernah menyentuh garis $y = 1$, karena 1 tidak termasuk range. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Kesimpulan yang langsung terbaca: $D_f = \{x \mid x \neq 2\}$, $R_f = \{y \mid y \neq 1\}$, dan $f(x) > 1$ tepat untuk $x > 2$ (cabang kanan di atas asimtot datar).

5. Grafik polinom dari akar-akarnya

Polinom berderajat n yang akar-akarnya diketahui dapat ditulis

$$f(x) = k\,(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}\cdots$$

dengan $m_1 + m_2 + \cdots = n$. Bilangan m disebut **kelipatan** (multiplisitas) akar.

Kelipatan akar r	Perilaku grafik di $x = r$	Alasan
ganjil (1, 3)	**memotong** sumbu X (tanda f berganti)	$(x - r)^1$ atau $(x - r)^3$ berganti tanda di r
genap (2, 4)	**menyinggung** sumbu X (tanda f tetap)	$(x - r)^2 \geq 0$ di kedua sisi r

Perilaku ujung ditentukan oleh suku kx^n:

Derajat n	$k > 0$	$k < 0$
genap	kedua ujung naik	kedua ujung turun
ganjil	kiri turun, kanan naik	kiri naik, kanan turun

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Nilai k biasanya dicari dari **satu titik lain** pada grafik, sering titik potong sumbu Y $(0, f(0))$.

Contoh terselesaikan 5: dari grafik ke rumus

Grafik polinom berderajat empat memotong sumbu X di $x = -1$ dan $x = 4$, menyinggung sumbu X di $x = 2$, dan memotong sumbu Y di $(0, -16)$. Tentukan rumusnya dan uraikan bentuk grafiknya.

Penyelesaian. Akar -1 dan 4 tunggal, akar 2 ganda. Jumlah kelipatan $1 + 2 + 1 = 4$, cocok dengan derajatnya.

$$f(x) = k(x + 1)(x - 2)^2(x - 4)$$

Dari $(0, -16)$: $f(0) = k(1)(4)(-4) = -16k = -16$, jadi $k = 1$. Bila dijabarkan, $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16$.

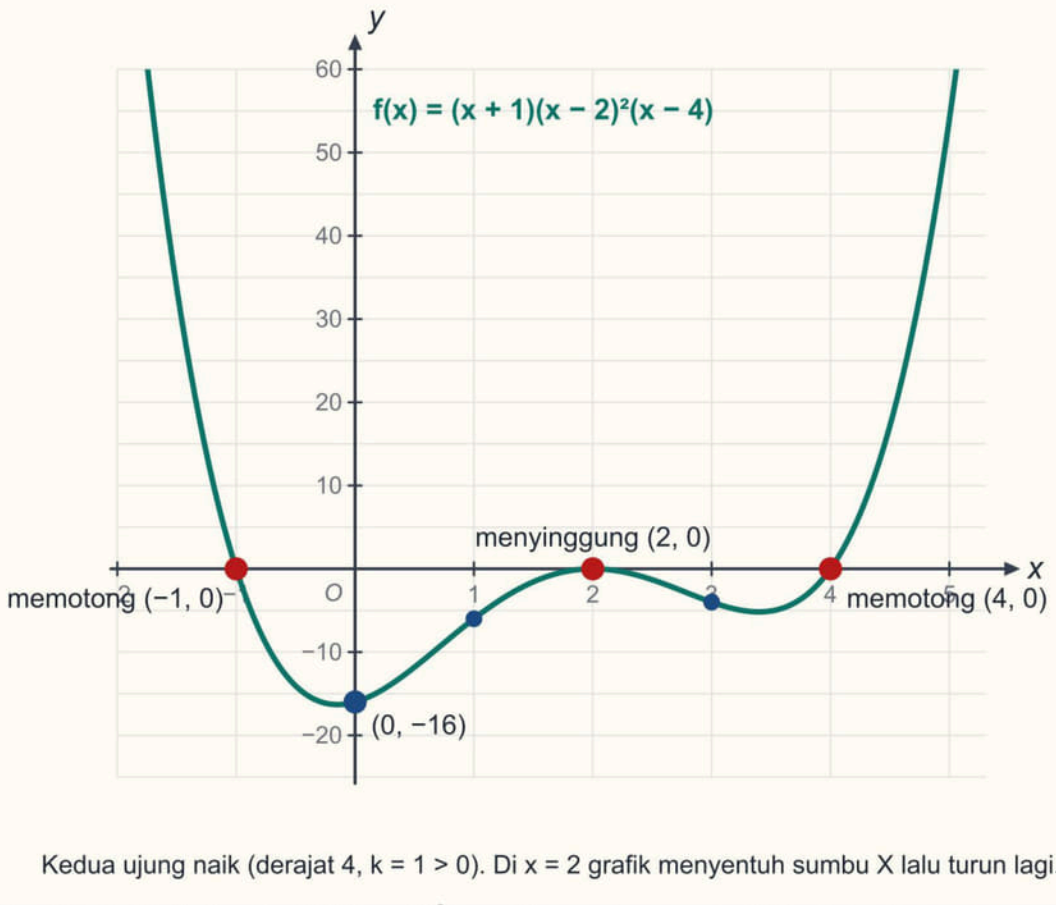
Tabel nilai untuk sketsa:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	96	0	-16	-6	0	-4	0	54

Bacaan grafik: kedua ujung naik ($k = 1 > 0$, derajat genap). Dari kiri, grafik turun memotong sumbu X di -1, berada di bawah sumbu X, naik menyentuh sumbu X di 2 lalu **kembali turun** (tidak menembus), lalu naik memotong sumbu X di 4. Jadi $f(x) < 0$ untuk $-1 < x < 4$ **kecuali** di $x = 2$ (di sana $f = 0$). Bentuk itu terlihat jelas pada Gambar 1.32.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.32 Grafik $f(x) = (x+1)(x-2)^2(x-4)$: memotong sumbu X di -1 dan 4, menyinggung di 2, dan memotong sumbu Y di $(0, -16)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Dua pertanyaan yang sering muncul dapat dijawab dari bentuk faktornya:

- $f(x)$ habis dibagi $(x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$, karena keduanya faktor f.
- Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x-3)$ adalah $f(3) = (4)(1)(-1) = -4$ (teorema sisa, sub bab 1.5).

6. Grafik fungsi akar

Grafik $y = \sqrt{x}$ dimulai di $(0, 0)$, naik, dan makin lama makin landai. Bentuk umum $y = a\sqrt{x-h} + k$ adalah grafik itu yang digeser: titik awalnya (h, k); bila $a > 0$ grafik naik, bila $a < 0$ grafik turun.

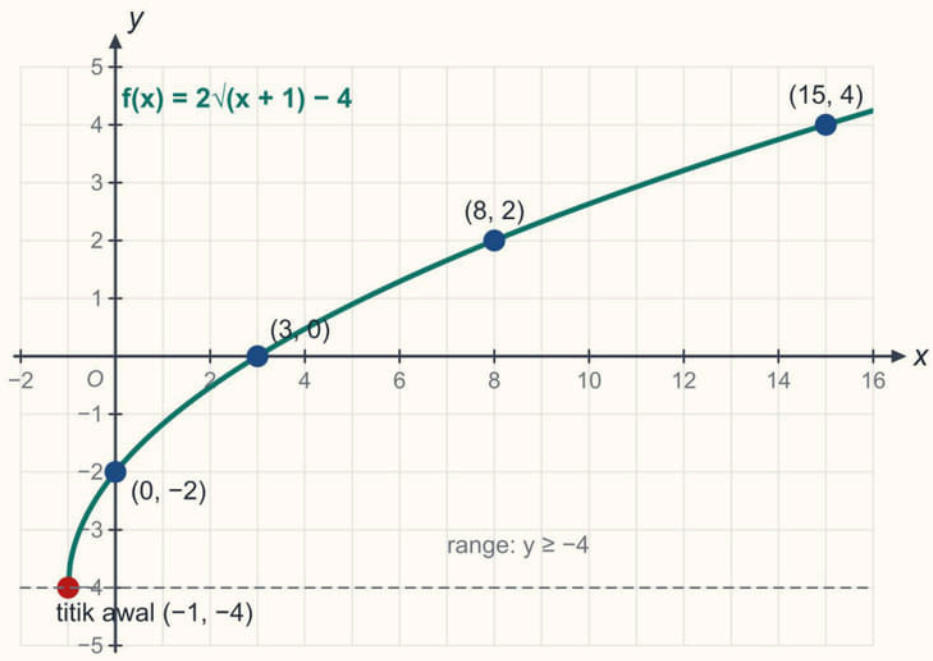
Contoh terselesaikan 6: fungsi akar

Buat sketsa $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 4$ dan tentukan domain, range, serta titik potongnya.

Penyelesaian. Domain: $x \geq -1$. Titik awal $(-1, -4)$. Titik potong sumbu Y: $f(0) = 2 - 4 = -2$. Titik potong sumbu X: $2\sqrt{x+1} = 4$, jadi $\sqrt{x+1} = 2$ dan $x = 3$. Pilih x yang membuat $x + 1$ bilangan kuadrat agar mudah dihitung:

x	-1	0	3	8	15
$f(x)$	-4	-2	0	2	4

Perhatikan: x bertambah 1, 3, 5, 7, tetapi $f(x)$ selalu bertambah 2. Itulah ciri "makin landai" (lihat Gambar 1.33). Range: $\{y \mid y \geq -4\}$.



x bertambah 1, 3, 5, 7, tetapi f(x) selalu bertambah 2: grafik makin landai.

Gambar 1.33 Grafik $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 4$ dimulai di $(-1, -4)$, memotong sumbu Y di $(0, -2)$ dan sumbu X di $(3, 0)$, lalu naik makin landai. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

7. Fungsi dalam konteks: biaya per orang

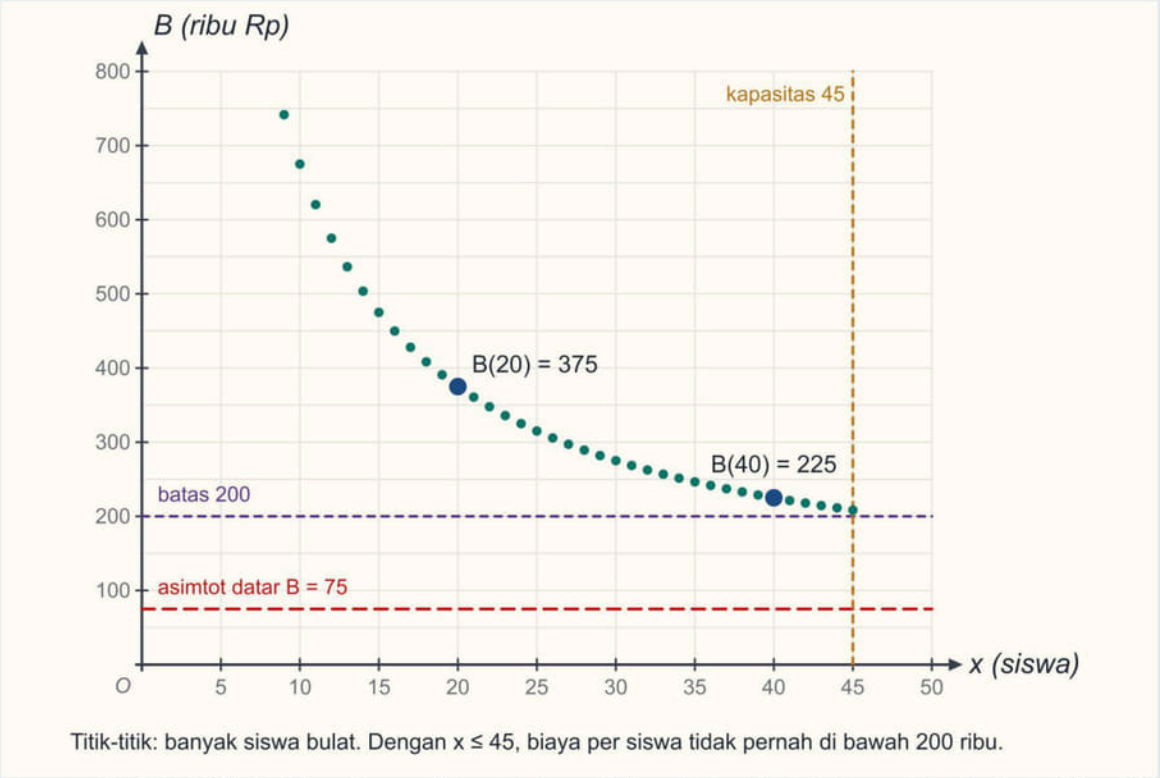
Banyak soal TKA memakai fungsi rasional untuk **rata-rata**: biaya tetap dibagi banyak orang, ditambah biaya per orang.

Contoh terselesaikan 7: menilai pernyataan

Panitia karyawisata kelas XII tahun 2027 menyewa satu bus berkapasitas 45 penumpang seharga Rp6.000.000,00. Tiket masuk Rp75.000,00 per siswa. (Data disusun untuk contoh.) Biaya per siswa bila x siswa ikut adalah

$$B(x) = \frac{6.000.000 + 75.000x}{x} = 75.000 + \frac{6.000.000}{x}$$

Penyelesaian. Hitung beberapa nilai: $B(20) = 375.000$, $B(40) = 225.000$, $B(45) = 208.333{,}33$. Gambar 1.34 memperlihatkan nilai-nilai itu untuk setiap banyak siswa yang mungkin.



Gambar 1.34 Nilai $B(x)$ dalam ribu rupiah untuk banyak siswa bulat. Titik-titik mendekati asimtot $B = 75$, tetapi dalam batas kapasitas 45 siswa tidak pernah turun di bawah 200. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan	Nilai	Alasan
Domain B dalam konteks ini adalah bilangan bulat $1 \le x \le 45$	Benar	banyak siswa bulat positif dan dibatasi kapasitas bus
Bila 40 siswa ikut, biaya per siswa Rp225.000,00	Benar	$75.000 + 150.000 = 225.000$
Biaya per siswa untuk 20 siswa dua kali biaya untuk 40 siswa	Salah	$375.000 \div 225.000 \approx 1{,}67$; hanya bagian $\frac{6.000.000}{x}$ yang menjadi dua kali
Dengan satu bus, biaya per siswa dapat ditekan di bawah Rp200.000,00	Salah	perlu $\frac{6.000.000}{x} < 125.000$, yaitu $x > 48$, melebihi kapasitas 45
Makin banyak siswa, biaya per siswa makin kecil, tetapi tidak pernah mencapai Rp75.000,00	Benar	$y = 75.000$ adalah asimtot datar; $\frac{6.000.000}{x} > 0$

Pernyataan ketiga memasang pola pengecoh "berbanding terbalik": hanya bagian biaya tetap yang berbanding terbalik dengan x, bukan seluruh $B(x)$. Pernyataan keempat menunjukkan pentingnya domain konteks. Secara aljabar $B(x) < 200.000$ mungkin, tetapi tidak dalam batas kapasitas bus.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal domain, range, dan grafik

1. **Daftar semua syarat dulu.** Tandai setiap penyebut dan setiap akar genap. Tulis syaratnya satu per satu sebelum menyederhanakan apa pun.
2. **Komposisi: dua syarat.** x di domain fungsi dalam, dan hasil fungsi dalam di domain fungsi luar. Yang dilarang fungsi luar adalah nilai $f(x)$, bukan nilai x.
3. **Rasional: ubah ke bentuk "konstanta + sisa".** Dari bentuk itu langsung terbaca asimtot datar, range, dan tanda $f(x)$ dibanding asimtot.
4. **Polinom dari grafik: akar dan kelipatannya dulu, lalu k dari satu titik.** Cek tanda k dengan perilaku ujung grafik.
5. **Sketsa dengan tabel nilai.** Ambil nilai di kedua sisi setiap asimtot tegak dan di antara setiap dua akar.
6. **Untuk soal kecukupan data**, cari contoh yang memenuhi pernyataan tetapi memberi jawaban berbeda. Satu contoh tandingan cukup untuk menyatakan "tidak cukup".

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Domain komposisi dari rumus akhir saja	$f \circ g = 6 - x$ dianggap terdefinisi untuk semua x	Tulis syarat fungsi dalam sebelum menyederhanakan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

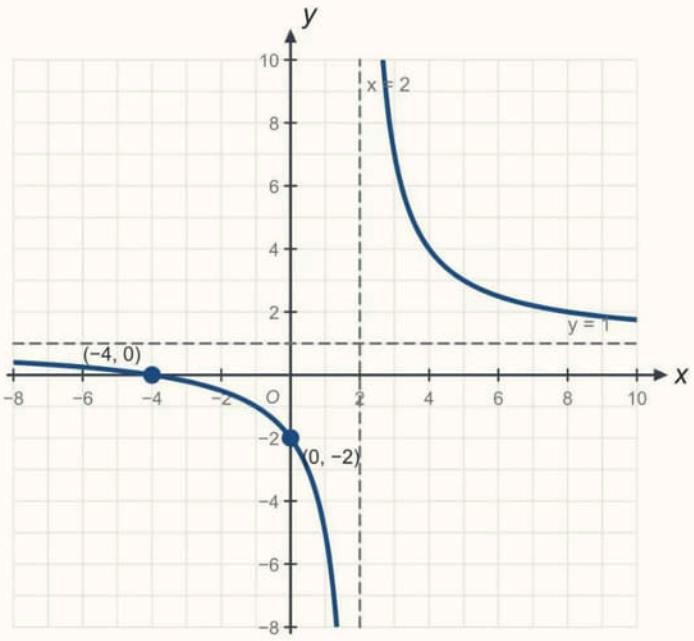
Larangan fungsi luar diterapkan pada x	g tidak terdefinisi di 2, lalu menulis $x \neq 2$	Selesaikan $f(x) = 2$, buang x hasilnya
Tanda D dipakai tanpa tanda a	$D < 0$ dianggap "selalu positif"	$D < 0$ dan $a > 0$ baru definit positif
Asimtot datar disangka tak pernah dipotong	Menolak $h(2) = 2$ padahal asimtot datar h adalah $y = 2$	Asimtot datar hanya perilaku untuk x sangat besar; cek dengan menyelesaikan $f(x) = q$
Akar kelipatan genap dianggap memotong	Grafik dianggap berganti tanda di akar ganda	Kelipatan genap: menyinggung, tanda tetap
Tanda koefisien utama terlupa	Menulis k positif padahal kedua ujung grafik polinom derajat genap turun	Hitung k dari titik, lalu cocokkan dengan ujung grafik
Ujung selang akar dibuang	Mengecualikan $x = -3$ pada $\sqrt{x+3}$	$\sqrt{0} = 0$ sah; syarat akar memakai $\geq$
Domain konteks diabaikan	Menyimpulkan biaya bisa di bawah batas tertentu padahal perlu 49 siswa	Tulis batas konteks (bulat, kapasitas, waktu ≥ 0)

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut membalik arah sub bab ini: grafik dan asimtotnya diketahui, lalu rumus fungsinya dicari. Bacalah asimtot tegak dan asimtot datar lebih dulu, karena keduanya langsung memberi dua dari tiga parameter.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Gambar berikut adalah grafik $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ beserta asimtotnya (garis putus-putus). Nilai $a+b+c$ adalah ....



A. 3
B. 7
C. -1
D. -5
E. 4

Pembahasan **Kunci: A**

Konsep: untuk $\dfrac{ax+b}{x+c}$: asimtot tegak $x=-c$, asimtot datar $y=a$; titik potong sumbu memberi persamaan untuk b.

Langkah 1. Asimtot tegak $x=2 \Rightarrow c=-2$; asimtot datar $y=1 \Rightarrow a=1$.

Langkah 2. Melalui $(0,-2)$: $\dfrac{b}{-2}=-2 \Rightarrow b=4$. Cek $(-4,0)$: $\dfrac{-4+4}{-6}=0$ ✓.

Langkah 3. $a+b+c=1+4-2=3$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: tanda c salah: asimtot tegak $x=2$ berarti penyebut $x-2$, jadi $c=-2$.
- C: tanda b salah saat memakai titik $(0,-2)$.
- D: tanda b dan c sama-sama salah.
- E: mengambil $a=2$ dari asimtot tegak; a ditentukan asimtot datar $y=1$.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: asimtot tegak $x=2$ berarti penyebutnya $x-2$, sehingga $c=-2$, bukan 2 (pengecoh 7). Asimtot datar memberi a; asimtot tegak tidak

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

(pengecoh 4). Setelah parameter ditemukan, titik kedua pada grafik, $(-4, 0)$, dipakai sebagai cek. Satu titik untuk mencari dan satu titik untuk mengecek adalah kebiasaan yang baik.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu semua syarat (penyebut, akar) atau asimtotnya.

1. Grafik fungsi $f(x) = \dfrac{ax - 1}{x + b}$ mempunyai asimtot tegak $x = -3$ dan melalui titik $(2, 3)$. Persamaan asimtot datar grafik f adalah ....

A. $y = 3$
B. $y = -3$
C. $y = \dfrac{15}{2}$
D. $y = -1$
E. $y = 8$

2. Diketahui $f(x) = \sqrt{x - 2}$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Daerah hasil fungsi $(f \circ g)(x)$ adalah ....

A. $\{y \mid y \geq 1\}$
B. $\{y \mid y \geq 0\}$
C. $\{y \mid y \geq 2\}$
D. $\{y \mid y > 0\}$
E. $\{x \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 1\}$

Kunci singkat: 1. E 2. B

✔ PERIKSA DIRI

- Pada fungsi komposisi $g \circ f$, apa dua syarat yang harus kamu periksa, dan mengapa rumus akhirnya tidak boleh dijadikan satu-satunya pegangan?
- Dari bentuk $f(x) = q + \frac{c}{x - p}$, dapatkah kamu langsung menyebutkan asimtot tegak, asimtot datar, domain, dan range-nya?
- Bila grafik polinom menyinggung sumbu X di suatu titik, faktor apa yang muncul dalam rumusnya, dan bagaimana tanda $f(x)$ di sekitar titik itu?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.7: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.
next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.7

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks

MATTL-1.8

◎ APA YANG DIUJI

Di TKA, fungsi eksponen muncul sebagai **model** pertumbuhan atau peluruhan: populasi hewan, luas tanaman air, kadar obat, jumlah penduduk, harga barang. Kamu jarang diminta "hitunglah 2^5". Yang diminta adalah **membaca arti** setiap bilangan dalam model, **menyusun** model dari grafik atau tabel, dan **menghitung mundur** ke keadaan awal. Logaritma dipakai bila yang dicari adalah **waktu**.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-9	Menginterpretasikan model pertumbuhan bentuk eksponensial dalam konteks kehidupan sehari-hari	57,95 %
SA-10	Menentukan beberapa nilai yang memenuhi persyaratan tertentu dari grafik fungsi eksponensial dalam konteks permasalahan sehari-hari	30,60 %

SA-9 adalah soal dengan persentase benar tertinggi di antara 25 soal asli 2025. Meski begitu, lebih dari 4 dari 10 peserta tetap keliru. Bagian yang paling rawan adalah menentukan **angka mana yang menjadi faktor pengali** dan dalam satuan apa model ditulis. SA-10 jauh lebih sulit (sekitar 3 dari 10 peserta benar): modelnya harus disusun sendiri dari grafik, lalu dipakai **mundur** dari data tahun ke-3 ke keadaan awal.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menyebutkan arti nilai awal, faktor pengali, dan lama periode dalam model $P(t) = P_0 \cdot a^{t/k}$;
- menyusun model eksponen dari grafik atau tabel dan membedakannya dari model linear;
- menghitung keadaan awal dari data di waktu lain (menghitung mundur);
- memakai logaritma untuk mencari waktu, termasuk saat jawabannya harus bilangan bulat;
- membaca grafik fungsi eksponen dan logaritma (titik potong, asimtot, naik/turun);
- menilai beberapa pernyataan tentang model pertumbuhan atau peluruhan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Sifat eksponen yang dipakai

Untuk $a > 0$ dan bilangan real m, n:

Sifat	Contoh
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^3 = 27$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^2 = 2^6 = 64$
$a^0 = 1$	$7^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$	$9^{1/2} = 3$

Sifat $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ adalah yang paling sering dipakai untuk **membandingkan** nilai model di dua waktu.

Dari mana sifat-sifat itu? Untuk pangkat bilangan asli, a^m berarti a dikalikan sebanyak m kali. Maka $a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a)$ memuat lima faktor a, yaitu a^5; pangkatnya dijumlahkan karena faktornya dihitung bersama. Pada $\frac{a^5}{a^2}$, dua faktor di penyebut mencoret dua faktor di pembilang, sehingga tersisa a^3. Pola pembagian ini menjelaskan dua sifat berikutnya: $\frac{a^3}{a^3} = a^0$ padahal nilainya 1, jadi $a^0 = 1$; dan $\frac{a^0}{a^n} = a^{-n}$, jadi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Pangkat pecahan mengikuti sifat $(a^m)^n = a^{mn}$: karena $(a^{1/2})^2 = a^1$, bilangan $a^{1/2}$ adalah bilangan yang kuadratnya a, yaitu $\sqrt{a}$.

2. Membaca model pertumbuhan dan peluruhan

Hampir semua model pertumbuhan di soal TKA dapat ditulis dalam bentuk

$$P(t) = P_0 \cdot a^{t/k}$$

Lambang	Arti	Cara memeriksa
P_0	nilai awal (saat $t = 0$)	$P(0) = P_0 \cdot a^0 = P_0$
a	faktor pengali setiap periode	$a > 1$ tumbuh, $0 < a < 1$ meluruh
k	lama satu periode (misalnya waktu lipat dua bila $a = 2$)	setiap t bertambah k, pangkat bertambah 1

Mengapa a adalah faktor per k satuan waktu? Bandingkan nilai di $t + k$ dan di t:

$$\frac{P(t+k)}{P(t)} = \frac{P_0 \cdot a^{(t+k)/k}}{P_0 \cdot a^{t/k}} = a^{(t+k)/k - t/k} = a^1 = a$$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Jadi setiap k satuan waktu, nilainya **dikali** a, tidak peduli kapan mulai dihitung.

Bentuk lain yang sering muncul:

- **Pertumbuhan r persen per satuan waktu:** $P(t) = P_0(1 + r)^t$. Laju 1,25 % per tahun berarti $a = 1{,}0125$, **bukan** $1{,}25$.
- **Peluruhan r persen per satuan waktu:** $P(t) = P_0(1 - r)^t$. Berkurang 20 % per jam berarti $a = 0{,}8$, **bukan** $0{,}2$.
- **Waktu paruh k:** $P(t) = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/k}$.

Hati-hati dengan kata. "Menjadi 3 kali" berarti dikali 3. "Bertambah 200 %" juga berarti menjadi 3 kali. Ungkapan seperti "bertambah 3 kali lipat" dapat ditafsirkan berbeda, jadi pastikan maknanya dengan angka pada soal atau grafik.

Contoh terselesaikan 1: membaca model

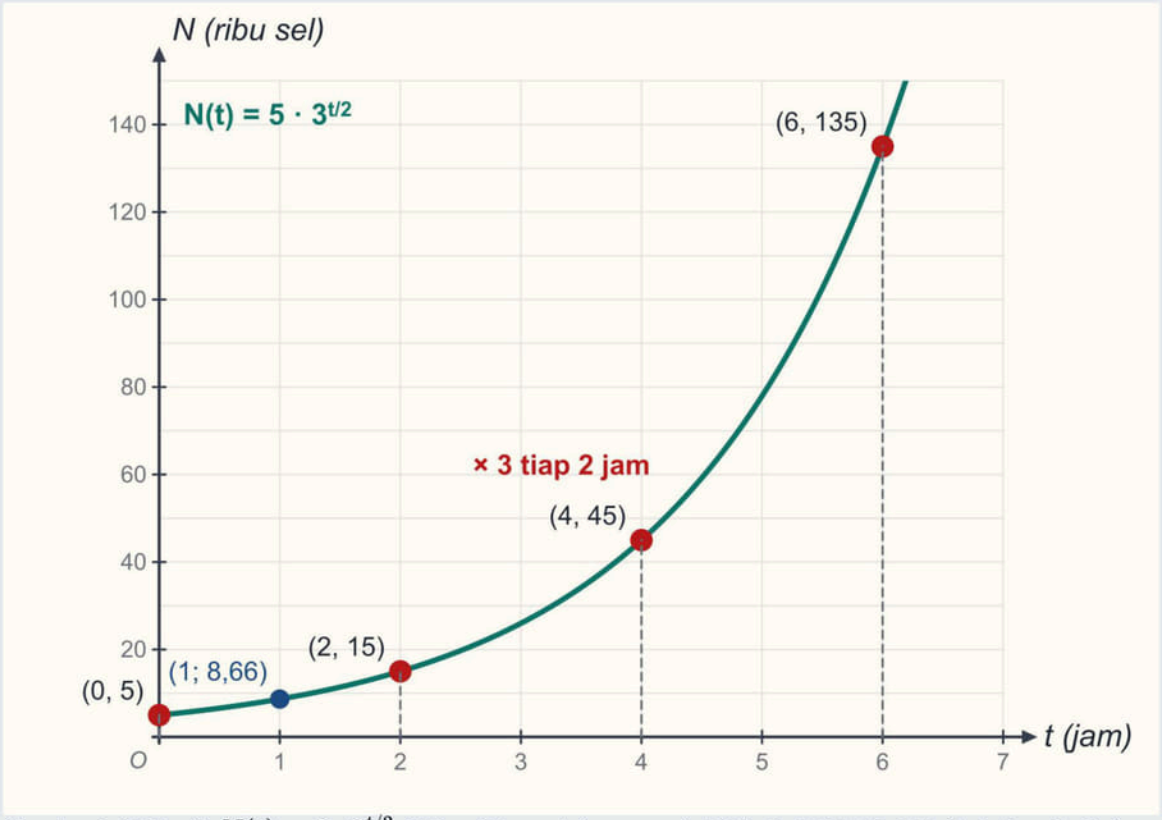
Banyak bakteri dalam sebuah sampel (dalam ribu sel) dimodelkan oleh $N(t) = 5 \cdot 3^{t/2}$ dengan t dalam jam. (Data disusun untuk contoh.)

Penyelesaian.

- Banyak awal: $N(0) = 5$ ribu sel.
- Faktor: setiap **2 jam** banyaknya menjadi **3 kali**. Angka 5 adalah nilai awal, bukan faktor.
- Setelah 6 jam: $N(6) = 5 \cdot 3^3 = 135$ ribu sel. Cara cepat: 6 jam = 3 periode, jadi $5 \times 3 \times 3 \times 3$.
- Kapan mencapai 405 ribu? $5 \cdot 3^{t/2} = 405$, jadi $3^{t/2} = 81 = 3^4$. Maka $\frac{t}{2} = 4$ dan $t = 8$ jam.
- Setelah 1 jam (setengah periode): $N(1) = 5 \cdot 3^{1/2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ ribu, **bukan** $5 \times 1{,}5 = 7{,}5$ ribu. Pertumbuhan eksponen tidak dibagi rata.

Gambar 1.35 memperlihatkan pola "dikali 3 setiap 2 jam" itu: jarak tegak antara titik-titik bertambah besar, padahal jarak mendatarnya sama.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.35 Grafik $N(t) = 5 \cdot 3^{t/2}$. Setiap 2 jam nilainya menjadi 3 kali: 5, 15, 45, 135. Pada $t = 1$ nilainya $5\sqrt{3} \approx 8{,}66$, bukan 7,5. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Menyusun model dari tabel atau grafik

Perhatikan nilai pada waktu yang **berjarak sama**.

- Bila **selisihnya** tetap, modelnya **linear** (bertambah sama banyak).
- Bila **perbandingannya** tetap, modelnya **eksponen** (dikali sama besar).

Dari grafik, ambil titik potong sumbu tegak sebagai P_0, lalu hitung perbandingan dua titik berikutnya.

Contoh terselesaikan 2: linear atau eksponen?

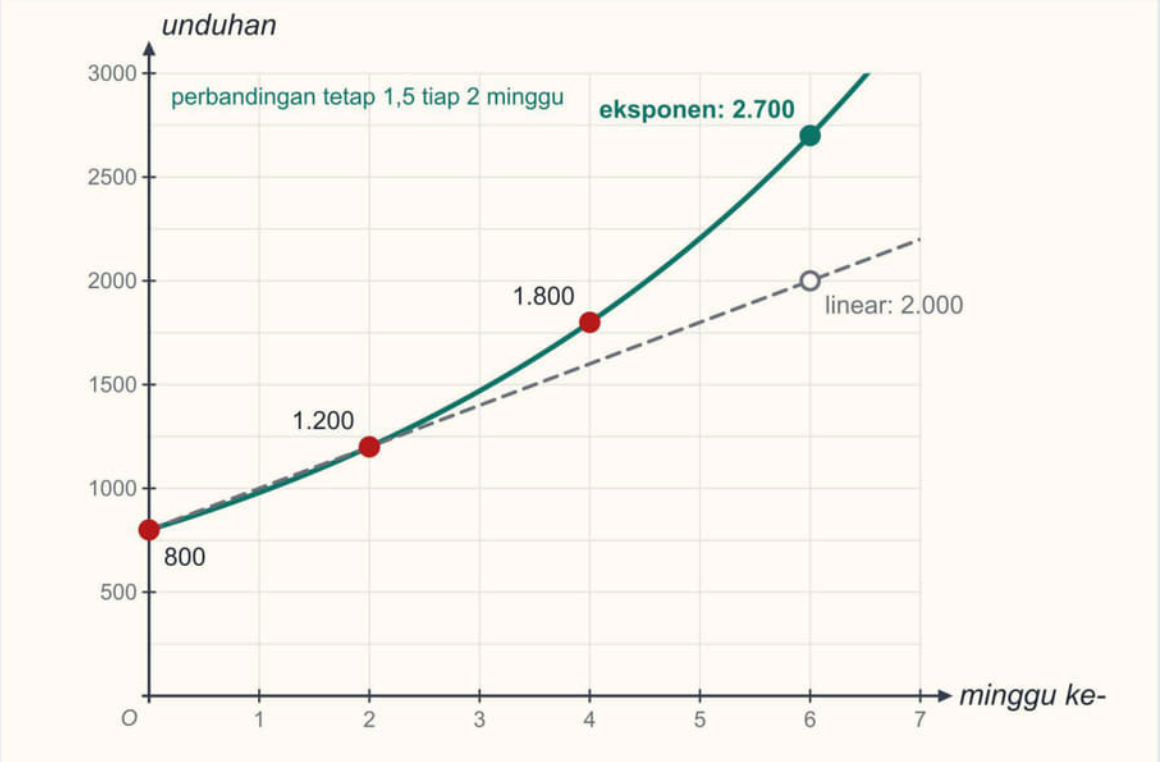
Banyak unduhan sebuah aplikasi belajar tercatat sebagai berikut. (Data disusun untuk contoh.)

Minggu ke-	0	2	4
Unduhan	800	1.200	1.800

Penyelesaian. Selisihnya 400 lalu 600, tidak tetap, jadi bukan linear. Perbandingannya $\frac{1.200}{800} = 1{,}5$ dan $\frac{1.800}{1.200} = 1{,}5$, tetap. Jadi setiap 2 minggu unduhan dikali 1,5:

$$U(t) = 800 \cdot 1{,}5^{t/2}$$

Prediksi minggu ke-6: $U(6) = 800 \cdot 1{,}5^3 = 2.700$. Bila keliru memakai pola linear (tambah 200 per minggu), kamu akan mendapat $800 + 6 \times 200 = 2.000$, jauh lebih kecil. Kedua model dibandingkan pada Gambar 1.36: untuk minggu ke-0 sampai ke-2 keduanya hampir berimpit, tetapi makin jauh, makin lebar selisihnya.



Gambar 1.36 Data unduhan (titik merah) mengikuti model eksponen $U(t) = 800 \cdot 1{,}5^{t/2}$ (garis hijau). Garis putus-putus adalah dugaan linear yang keliru. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. Menghitung mundur: keadaan awal

Soal seperti SA-10 memberi data **setelah** beberapa waktu, lalu menanyakan keadaan **awal**. Bila faktornya sama untuk semua objek (yang berbeda hanya nilai awalnya), maka

$$P_0 = \frac{P(t)}{a^{t/k}}$$

Syarat "nilai awal lebih dari c" sama dengan syarat "nilai di waktu t lebih dari $c \cdot a^{t/k}$". Hitung satu **batas** ini sekali, lalu bandingkan semua data dengannya. Cara ini lebih cepat dan lebih aman daripada membagi setiap data.

Contoh terselesaikan 3: kolam ganggang

Grafik pertumbuhan luas ganggang di sebuah kolam contoh melalui titik $(0, 3)$, $(1, 12)$, dan $(2, 48)$, dengan sumbu mendatar dalam minggu dan sumbu tegak dalam m². Pola pertumbuhannya sama di semua kolam. Setelah 3 minggu, luas ganggang di lima kolam adalah sebagai berikut. (Data disusun untuk contoh.)

Kolam	K1	K2	K3	K4	K5
Luas setelah 3 minggu (m²)	1.200	1.250	1.300	1.350	1.400

Kolam mana yang luas ganggangnya **lebih dari 20 m²** pada awal pengamatan?

Penyelesaian.

1. **Faktor dari grafik:** $\frac{12}{3} = \frac{48}{12} = 4$. Setiap minggu luasnya dikali 4, jadi $L(t) = L_0 \cdot 4^t$.
2. **Hubungan awal dan minggu ke-3:** $L(3) = 64L_0$.
3. **Batas:** $L_0 > 20$ sama dengan $L(3) > 20 \times 64 = 1.280$ m².
4. **Bandingkan:** K1 (1.200) dan K2 (1.250) di bawah batas. K3, K4, dan K5 di atas batas.

Jawaban: K3, K4, dan K5. Cek K2: $1.250 \div 64 \approx 19{,}53$, memang kurang dari 20. Perhatikan bahwa nilai awal kolam contoh (3 m²) **tidak** dipakai sama sekali. Yang dipakai dari grafik hanya faktornya.

5. Logaritma: alat untuk mencari waktu

Logaritma adalah kebalikan (invers) eksponen:

$$a^x = b \iff x = {}^{a}\log b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

Jadi ${}^{a}\log b$ menjawab pertanyaan "a dipangkatkan berapa supaya hasilnya b?". Contoh: ${}^{2}\log 32 = 5$ karena $2^5 = 32$. Bila basisnya tidak ditulis, basisnya 10.

Sifat yang dipakai (semuanya berasal dari sifat eksponen di Konsep 1):

Sifat	Asal-usul
$\log(mn) = \log m + \log n$	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
$\log m^n = n \log m$	$(a^p)^n = a^{pn}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$	mengganti basis agar bisa memakai nilai log yang diberikan soal
${}^a\log 1 = 0$ dan ${}^a\log a = 1$	$a^0 = 1$ dan $a^1 = a$

Contoh singkat: $\log 50 + \log 2 = \log 100 = 2$.

Contoh penurunan satu sifat. Misalkan ${}^a\log m = p$ dan ${}^a\log n = q$. Artinya $m = a^p$ dan $n = a^q$. Maka $mn = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, sehingga ${}^a\log(mn) = p + q = {}^a\log m + {}^a\log n$. Jadi logaritma mengubah **perkalian** menjadi **penjumlahan**; itulah sebabnya logaritma berguna untuk "membuka" pangkat yang memuat variabel waktu.

Langkah mencari waktu. Untuk $P_0 \cdot a^t = P$: bagi dengan P_0, ambil logaritma kedua ruas, lalu bagi dengan $\log a$:

$$t = \frac{\log P - \log P_0}{\log a}$$

Contoh terselesaikan 4: pertama kali melewati target

Banyak pelanggan sebuah usaha katering sekolah pada Januari 2027 adalah 150, dan bertambah 8 % setiap bulan. (Data disusun untuk contoh.) Pada bulan ke berapa (dihitung dari Januari 2027 sebagai bulan ke-0) banyak pelanggan pertama kali **lebih dari 300**? Gunakan $\log 2 \approx 0{,}3010$ dan $\log 1{,}08 \approx 0{,}0334$.

Penyelesaian. Model: $P(t) = 150 \cdot 1{,}08^t$.

$$150 \cdot 1{,}08^t > 300 \;\Rightarrow\; 1{,}08^t > 2 \;\Rightarrow\; t > \frac{\log 2}{\log 1{,}08} \approx \frac{0{,}3010}{0{,}0334} \approx 9{,}01$$

Karena dihitung per bulan, t bilangan bulat. Bilangan bulat terkecil yang lebih dari 9,01 adalah 10. Cek langsung kedua bilangan bulat di sekitar batas:

t (bulan)	$1{,}08^t$	$P(t)$
9	$\approx 1{,}9990$	$\approx 299{,}85$ (belum lebih dari 300)
10	$\approx 2{,}1589$	$\approx 323{,}84$

Jawaban: bulan ke-10 (November 2027). Hasil 9,01 sangat dekat dengan 9, sehingga membulatkan ke bawah adalah kesalahan yang menggoda. Pengecoh lain memakai pola linear: 8 % dari 150 adalah 12 pelanggan per bulan, sehingga perlu $\frac{150}{12} = 12{,}5$, dibulatkan menjadi 13 bulan. Itu keliru, karena pertambahan setiap bulan terus membesar.

6. Grafik fungsi eksponen dan logaritma

	$y = a^x$	$y = {}^a\log x$
Domain	semua bilangan real	$x > 0$
Range	$y > 0$	semua bilangan real

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Titik tetap	$(0, 1)$	$(1, 0)$
Asimtot	datar $y = 0$	tegak $x = 0$
Naik atau turun	naik bila $a > 1$, turun bila $0 < a < 1$	naik bila $a > 1$, turun bila $0 < a < 1$

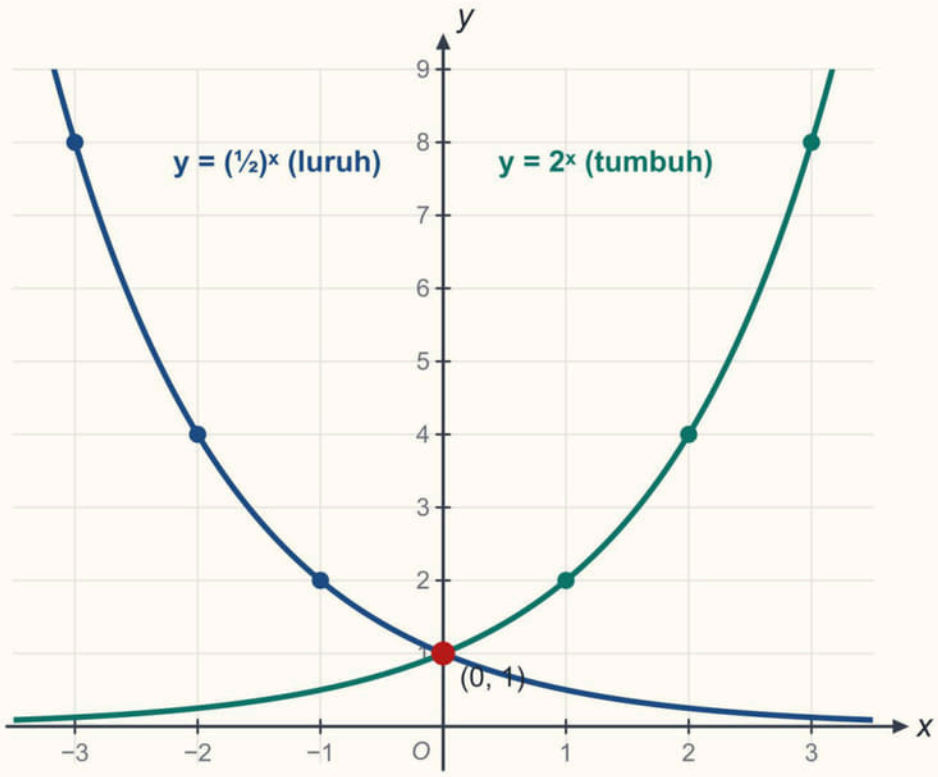
Tabel nilai untuk $a = 2$ menunjukkan bahwa kedua fungsi saling invers: baris atas dan baris bawah kedua tabel bertukar tempat.

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4	8

x	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4	8
${}^2\log x$	-2	-1	0	1	2	3

Karena itu, grafik $y = {}^a\log x$ adalah pencerminan grafik $y = a^x$ terhadap garis $y = x$. Gambar 1.37 memperlihatkan bentuk dasar grafik eksponen, dan Gambar 1.38 memperlihatkan pasangan titik yang bertukar koordinat.

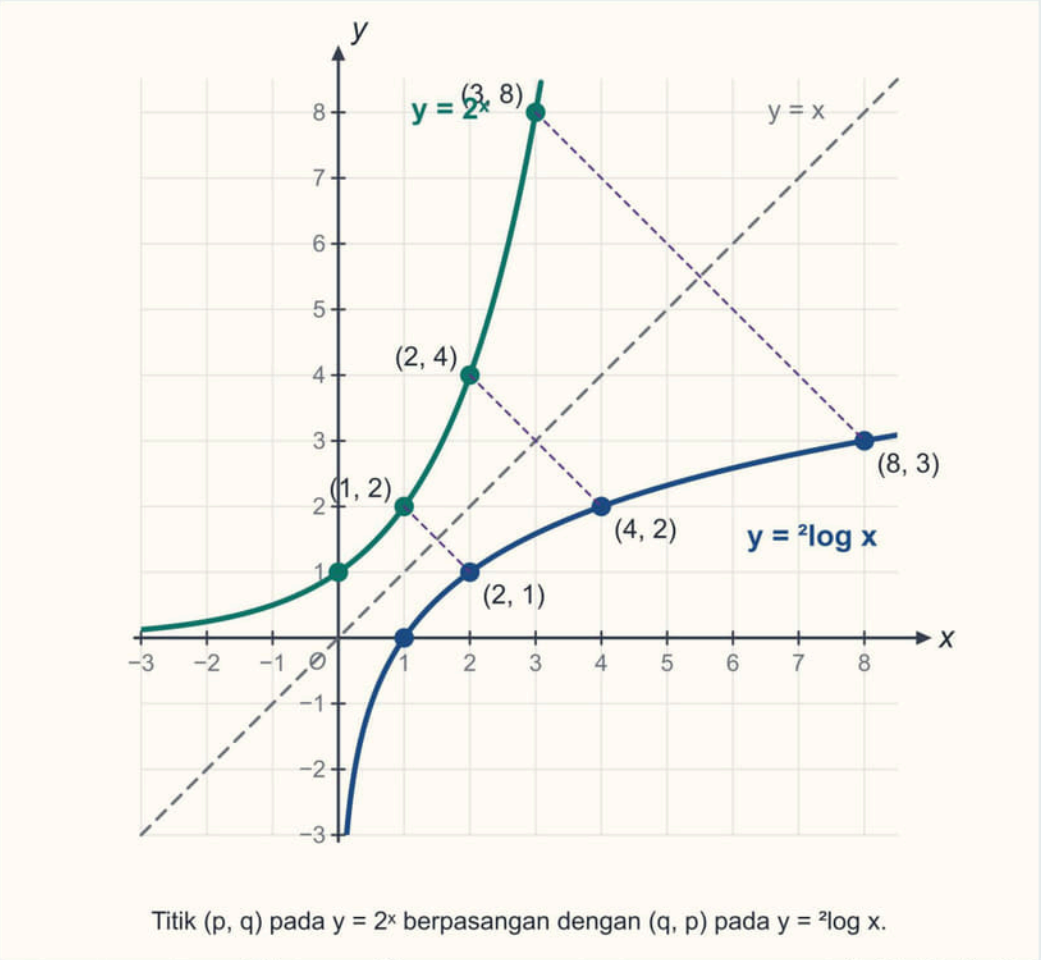
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Keduanya melalui (0, 1) dan selalu di atas sumbu X (asimtot datar y = 0).

Gambar 1.37 Grafik $y = 2^x$ (naik) dan $y = (\frac{1}{2})^x$ (turun). Keduanya melalui $(0, 1)$ dan tidak pernah menyentuh sumbu X. Kedua grafik saling bercermin terhadap sumbu Y, karena $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.38 Grafik $y = 2^x$ dan $y = {}^2\log x$ simetris terhadap garis $y = x$: titik $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 8)$ berpasangan dengan $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(8, 3)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Cara membuat sketsa model $P_0 \cdot a^{t/k}$: (1) tandai $(0, P_0)$ di sumbu tegak; (2) tandai $(k, P_0 a)$ dan $(2k, P_0 a^2)$; (3) hubungkan dengan kurva mulus. Untuk pertumbuhan, kurva makin curam. Untuk peluruhan, kurva makin landai dan mendekati sumbu mendatar tanpa pernah menyentuhnya.

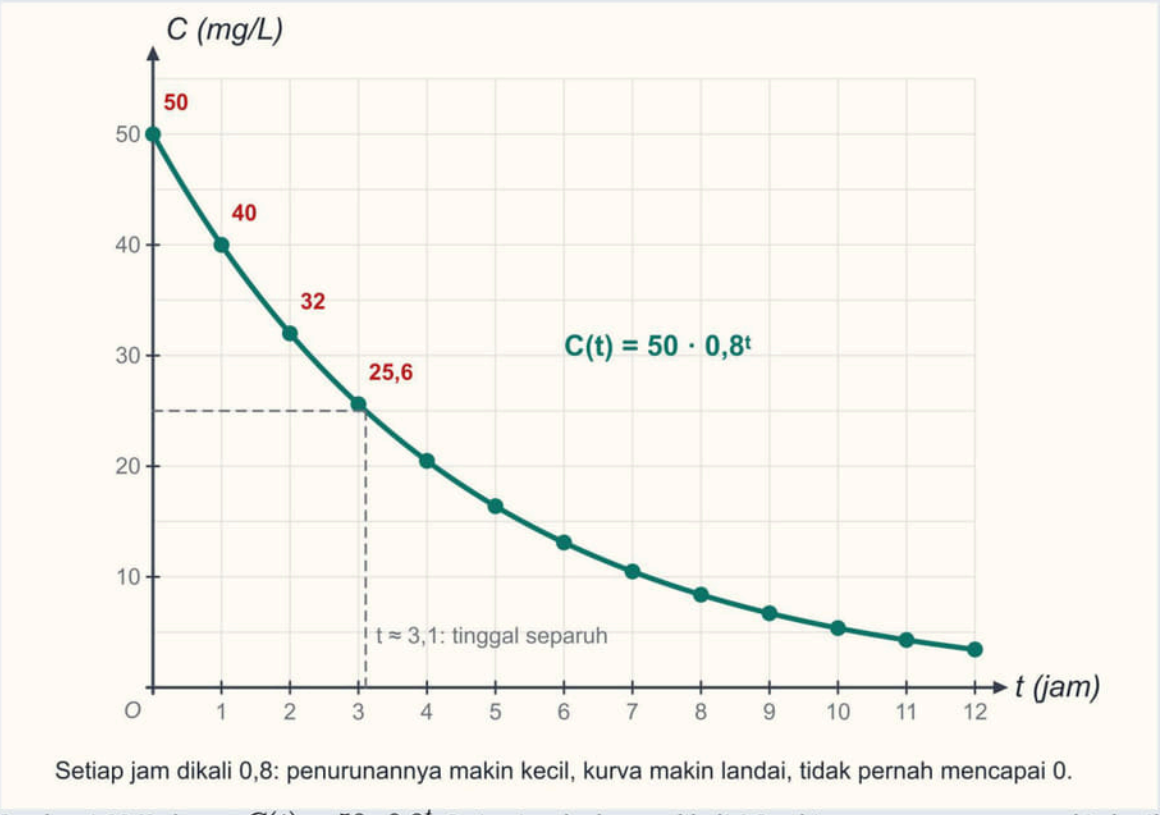
Logaritma meluruskan kurva. Dari $P = P_0 \cdot a^t$ diperoleh $\log P = \log P_0 + t \log a$. Jadi grafik $\log P$ terhadap t berupa **garis lurus** dengan kemiringan $\log a$.

Contoh terselesaikan 5: menilai pernyataan

Setelah kolam renang diberi cairan pembersih, kadar zat X di air kolam mula-mula 50 mg/L dan berkurang 20 % setiap jam. (Data disusun untuk contoh.) Model: $C(t) = 50 \cdot 0{,}8^t$, dengan t dalam jam. Gunakan $\log 2 \approx 0{,}3010$ dan $\log 0{,}8 \approx -0{,}0969$.

Penyelesaian. Hitung dulu: $C(1) = 40$, $C(2) = 32$, $C(3) = 25{,}6$. Gambar 1.39 menunjukkan kurva peluruhannya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.39 Kadar zat $C(t) = 50 \cdot 0{,}8^t$. Setiap jam kadarnya dikali 0,8, sehingga penurunannya makin kecil; kadar tinggal separuh (25 mg/L) sedikit setelah jam ke-3. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Pernyataan	Nilai	Alasan
Setelah 2 jam, kadar zat X menjadi 32 mg/L	Benar	$50 \times 0{,}8^2 = 50 \times 0{,}64 = 32$
Penurunan kadar pada jam pertama sama dengan penurunan pada jam kedua	Salah	jam pertama turun $50 - 40 = 10$, jam kedua turun $40 - 32 = 8$; persentasenya tetap, besarnya mengecil
Kadar menjadi setengah kadar awal sebelum 3 jam	Salah	$C(3) = 25{,}6 > 25$; tepatnya $t = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}8} = \frac{-0{,}3010}{-0{,}0969} \approx 3{,}11$ jam
Kadar zat X tidak pernah tepat 0 mg/L menurut model	Benar	$0{,}8^t > 0$ untuk setiap t; sumbu mendatar adalah asimtot datar
Grafik $\log C$ terhadap t berupa garis lurus yang turun	Benar	$\log C = \log 50 + t \log 0{,}8$, kemiringan $\log 0{,}8 < 0$

Pernyataan ketiga menunjukkan jebakan "kurang 20 % tiga kali berarti kurang 60 %". Peluruhan majemuk berkurang lebih lambat dari itu: setelah 3 jam tersisa 51,2 %, bukan 40 %.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal eksponen dan logaritma berkonteks

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. **Tulis model dalam bentuk $P_0 \cdot a^{t/k}$.** Sebutkan dengan kata-kata: "awal P_0, setiap k satuan waktu dikali a".
2. **Bila model belum ada, susun dari grafik atau tabel.** Cek perbandingan dua nilai berjarak sama untuk mendapatkan a.
3. **Tentukan arah hitungan.** Ditanya keadaan nanti: hitung maju. Ditanya keadaan awal: hitung mundur, atau ubah syarat awal menjadi batas pada data.
4. **Samakan satuan.** Periksa apakah model dalam ribu, juta, atau satuan biasa sebelum membandingkan dengan angka di pernyataan.
5. **Untuk mencari waktu, pakai logaritma, lalu cek bilangan bulat di sekitar hasilnya.** Perhatikan kata "lebih dari" atau "paling sedikit".
6. **Untuk PG kompleks atau Benar/Salah, nilai setiap pernyataan dengan hitungan.** Jangan menilai dari kesan "kelihatannya tumbuh cepat".

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Nilai awal disangka faktor	Pada $4 \cdot 2^{t/4}$, mengira populasi menjadi 4 kali setiap 4 tahun	Faktor adalah basis a; angka di depan adalah nilai awal
Persen ditulis sebagai faktor	Laju 1,25 % ditulis $1{,}25^t$; peluruhan 20 % ditulis $0{,}2^t$	Tumbuh: $1 + r$. Meluruh: $1 - r$
Satuan model terlewat	Model dalam ribu ekor dibandingkan langsung dengan 1.000.000	Ubah target ke satuan model: 1 juta = 1.000 ribu
Menghitung maju padahal ditanya keadaan awal	Memakai nilai awal grafik contoh untuk semua danau atau pasien	Yang sama hanya faktornya; hitung mundur dari data masing-masing
Pertumbuhan dianggap linear	Pertambahan per tahun dianggap tetap; setengah periode dianggap setengah faktor	Bandingkan perbandingan, bukan selisih
Pembulatan waktu ke bawah	$t > 9{,}01$ dijawab bulan ke-9	Cek nilai model di dua bilangan bulat terdekat
Batas "lebih dari" diperlakukan sebagai "paling sedikit"	Data yang tepat sama dengan batas ikut dipilih	Baca tanda: "lebih dari" tidak termasuk batas
Salah sifat logaritma	Mengira $^a\log 1 = 1$ atau $\log(m+n) = \log m + \log n$	$^a\log 1 = 0$; hanya perkalian yang menjadi penjumlahan

BEDAH SOAL ASLI

Soal pertama di bawah (SA-9) dijawab benar oleh 57,95 % peserta. Soal ini murni **membaca model**: setiap pernyataan menguji satu bagian dari $P_0 \cdot a^{t/k}$. Pernyataan pertama memasang jebakan nilai awal yang disangka faktor. Pernyataan ketiga menguji **satuan** (model dalam ribu

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

ekor). Sebelum membaca pembahasan, tulis dulu dengan kata-kata: "awal berapa, setiap berapa tahun dikali berapa".

►. Populasi kelinci di suatu pulau dimodelkan dengan fungsi eksponensial $K(t) = 4 \cdot 2^{t/4}$ dengan t menyatakan waktu dalam tahun dan $K(t)$ menyatakan populasi dalam ribu ekor. Bagaimana interpretasi yang tepat mengenai model populasi kelinci tersebut? Tentukan **Benar** atau **Salah** untuk setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Setiap 4 tahun populasi bertambah menjadi 4 kalinya.	○	○
Pada saat awal populasi kelinci berjumlah 4 ribu ekor.	○	○
Populasi mencapai 1 juta ekor sebelum 20 tahun dari awal pengamatan.	○	○

Pembahasan **Kunci: 1S 2B 3S**

Konsep: pada $K(t) = a \cdot b^{t/p}$, nilai a adalah populasi awal dan setiap p satuan waktu populasi dikalikan b.

Pernyataan 1. $\dfrac{K(t+4)}{K(t)} = 2^{(t+4)/4 - t/4} = 2^1 = 2$. Setiap 4 tahun populasi menjadi **2 kali**, bukan 4 kali → **Salah**. (Angka 4 di depan adalah populasi awal, bukan faktor pertumbuhan.)

Pernyataan 2. $K(0) = 4 \cdot 2^0 = 4$ ribu ekor → **Benar**.

Pernyataan 3. 1 juta ekor $= 1.000$ ribu ekor.
• $K(20) = 4 \cdot 2^5 = 128$ ribu ekor, jauh di bawah 1.000 ribu.
• Waktu mencapai 1 juta:
$4 \cdot 2^{t/4} = 1.000 \Rightarrow 2^{t/4} = 250 \Rightarrow \dfrac{t}{4} = {}^{2}\log 250 \approx 7{,}97 \Rightarrow t \approx 31{,}9$ tahun.
Jadi 1 juta baru tercapai sekitar 32 tahun → **Salah**.

Jebakan: lupa bahwa $K(t)$ dalam **ribu** ekor, sehingga mengira 1 juta $= 1.000.000$ dalam model.

Jawaban: Salah, Benar, Salah.

Soal berikutnya (SA-10) dijawab benar hanya oleh 30,60 % peserta. Polanya sama dengan Contoh terselesaikan 3. Kesulitannya ada tiga: (1) model tidak diberikan, jadi faktor harus dibaca dari grafik; (2) yang ditanya keadaan **awal**, padahal datanya keadaan tahun ke-3; (3) salah satu danau datanya sangat dekat dengan batas, sehingga perkiraan kasar akan menyesatkan. Hitung batasnya sekali, lalu bandingkan kelima danau.

►. Seorang peneliti lingkungan mengamati pertumbuhan tanaman eceng gondok di beberapa danau di sekitar wilayah X selama 3 tahun. Hasilnya menunjukkan bahwa pertumbuhan luas area yang tertutup eceng gondok dapat dimodelkan dengan fungsi eksponensial yang grafiknya seperti pada gambar (sumbu mendatar: tahun ke-; sumbu tegak: luas area dalam

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

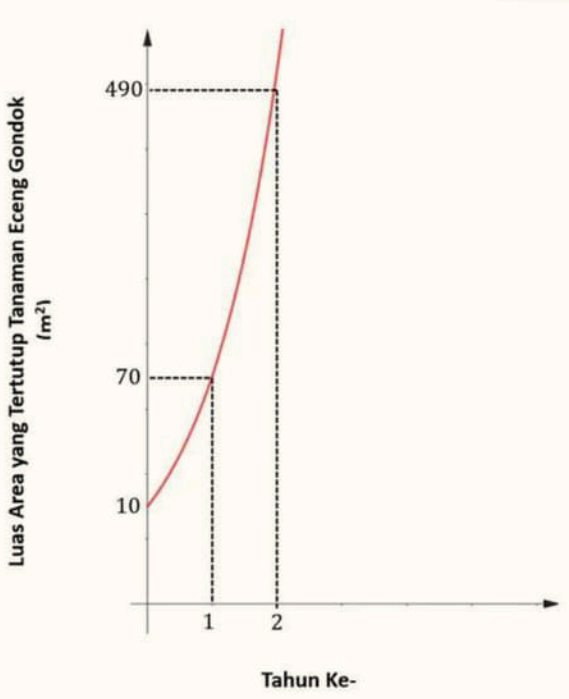
m^2).

Setelah 3 tahun pengamatan, peneliti mencatat luas area yang tertutup eceng gondok di beberapa wilayah perairan sebagai berikut.

Wilayah Perairan	Luas Area Tertutup Eceng Gondok (m^2)
Danau A	15.000
Danau B	16.500
Danau C	17.000
Danau D	17.500
Danau E	18.000

Dengan pola pertumbuhan yang sama, wilayah perairan manakah yang luas area tertutup eceng gondoknya **lebih dari 49 m^2** pada awal pengamatan?

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Danau A

☐ B. Danau B

☐ C. Danau C

☐ D. Danau D

☐ E. Danau E

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: C, D, E**

Langkah 1 – Tentukan model dari grafik. Titik $(0, 10)$, $(1, 70)$, $(2, 490)$: setiap tahun luasnya dikali $\frac{70}{10} = \frac{490}{70} = 7$. Jadi $L(t) = L_0 \cdot 7^t$, dengan L_0 luas awal.

Langkah 2 – Setelah 3 tahun. $L(3) = L_0 \cdot 7^3 = 343 L_0$, sehingga $L_0 = \frac{L(3)}{343}$.

Langkah 3 – Syarat $L_0 > 49$. $L(3) > 49 \cdot 343 = 16.807\ \text{m}^2$.

Langkah 4 – Bandingkan.
- Danau A: $15.000 < 16.807 \to L_0 \approx 43{,}7$ ✗
- Danau B: $16.500 < 16.807 \to L_0 \approx 48{,}1$ ✗ **(jebakan:** paling dekat dengan batas)
- Danau C: $17.000 > 16.807 \to L_0 \approx 49{,}6$ ✓
- Danau D: $17.500 \to L_0 \approx 51{,}0$ ✓
- Danau E: $18.000 \to L_0 \approx 52{,}5$ ✓

Cek ulang: $49 \cdot 343 = 49 \cdot 7^3 = 7^5 = 16.807$ ✓.

Jebakan lain: memakai model $10 \cdot 7^t$ langsung (luas awal 10 m^2) untuk semua danau; padahal yang sama hanya **faktor pertumbuhannya** (×7 per tahun).

Jawaban: Danau C, D, dan E.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memakai model peluruhan dengan waktu paruh 5 jam. Ikuti langkah 1–6 di atas: tulis nilai awal, faktor, dan lama periode, lalu nilai kelima pernyataan. Perhatikan pernyataan yang menguji perbedaan model eksponen dan model linear.

►. Kadar kafein dalam darah seseorang t jam setelah minum secangkir kopi dimodelkan $K(t) = 200\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}$ mg.

Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Setelah 10 jam, kadar kafein tinggal 50 mg.

☐ B. Kadar kafein berkurang 20 mg setiap jam.

☐ C. Kadar kafein menjadi 25 mg setelah 15 jam.

☐ D. Waktu agar kadar menjadi K mg adalah $t = 5 \log_2 \frac{200}{K}$ jam.

☐ E. Setelah 20 jam, kafein dalam darah sudah habis.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: A, C, D**

Konsep: pada $K(t) = K_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$, kadar menjadi setengahnya setiap T jam (waktu paruh). Untuk mencari t, ubah ke bentuk logaritma.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $K(10) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50$.
- B ✗ — model eksponen berkurang dengan **faktor** tetap, bukan selisih tetap; misalnya jam pertama berkurang ± 26 mg. *Jebakan:* menganggap model linear.
- C ✓ — $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5} = \frac{1}{8}$, jadi $t/5 = 3, t = 15$.
- D ✓ — $2^{t/5} = \frac{200}{K}$, jadi $\frac{t}{5} = \log_2 \frac{200}{K}$.
- E ✗ — $K(20) = 200 \cdot \frac{1}{16} = 12{,}5$ mg; model eksponen tidak pernah bernilai 0.

Jawaban: A, C, dan D.

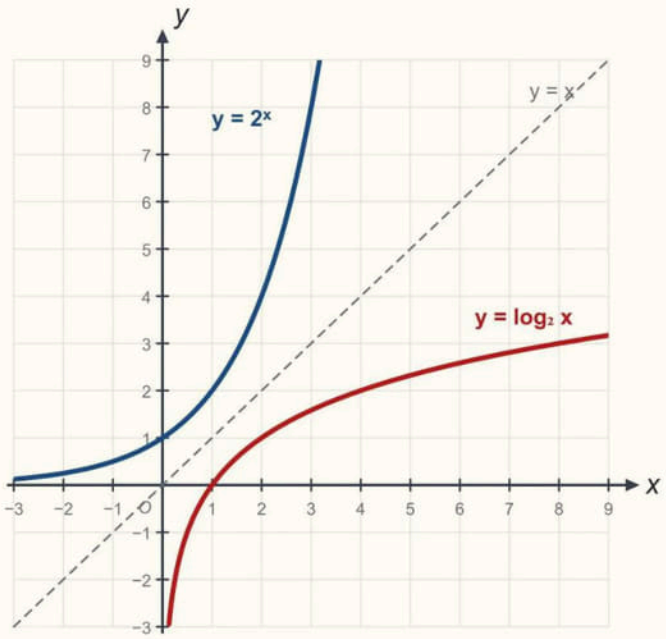
Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: setiap 5 jam kadar menjadi setengahnya, jadi 10 jam adalah dua kali waktu paruh (50 mg) dan 15 jam tiga kali waktu paruh (25 mg). Pernyataan 2 adalah jebakan model linear: pengurangan tiap jam tidak tetap. Pernyataan 5 menguji sifat model eksponen yang tidak pernah bernilai 0. Untuk waktu yang tidak bulat, ubah persamaan ke bentuk logaritma seperti pada pernyataan 4.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu modelnya dalam kata-kata (nilai awal, faktor, dan lama periode) atau sifat logaritma yang dipakai.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Gambar berikut menunjukkan grafik $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, dan garis $y = x$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Kedua grafik berpotongan di titik $(1, 1)$.	○	○
Grafik $y = \log_2 x$ melalui titik $(8, 3)$.	○	○
Kedua grafik simetris terhadap garis $y = x$.	○	○

2. Saldo tabungan Rp5.000.000 yang diberi bunga majemuk 6% per tahun setelah t tahun adalah $M(t) = 5.000.000 \cdot (1{,}06)^t$ rupiah (tanpa penarikan dan biaya).
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Bunga yang diterima pada tahun kedua sama dengan tahun pertama, yaitu Rp300.000.

☐ B. Setelah 2 tahun, saldo menjadi Rp5.618.000.

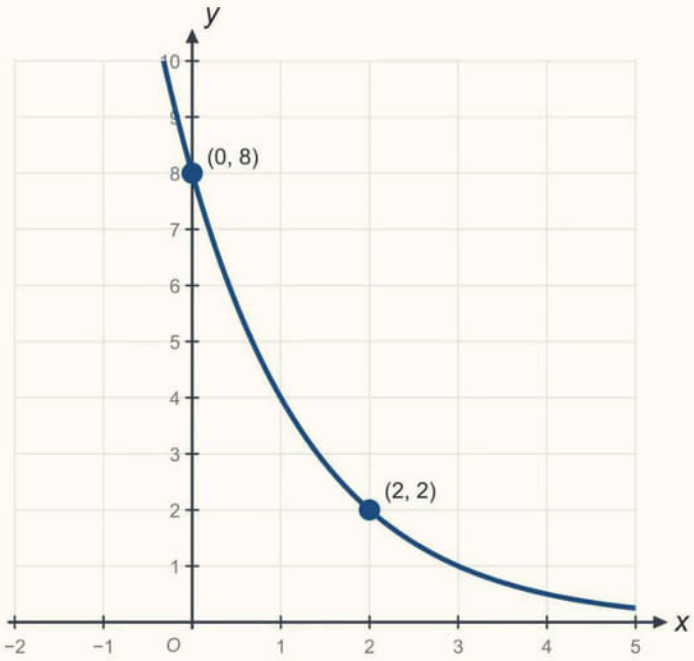
☐ C. Saldo menjadi Rp15.000.000 setelah $t = \log_{1{,}06} 3$ tahun.

☐ D. Setelah 10 tahun, saldo sudah lebih dari dua kali saldo awal.

☐ E. Saldo pada akhir tahun ke-$(t + 1)$ sama dengan 1,06 kali saldo pada akhir tahun ke-t.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Gambar berikut adalah grafik fungsi $y = a \cdot b^x$ yang melalui titik $(0, 8)$ dan $(2, 2)$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
$a = 8$.	○	○
$b = \frac{1}{4}$.	○	○
Grafik fungsi ini memotong sumbu X.	○	○

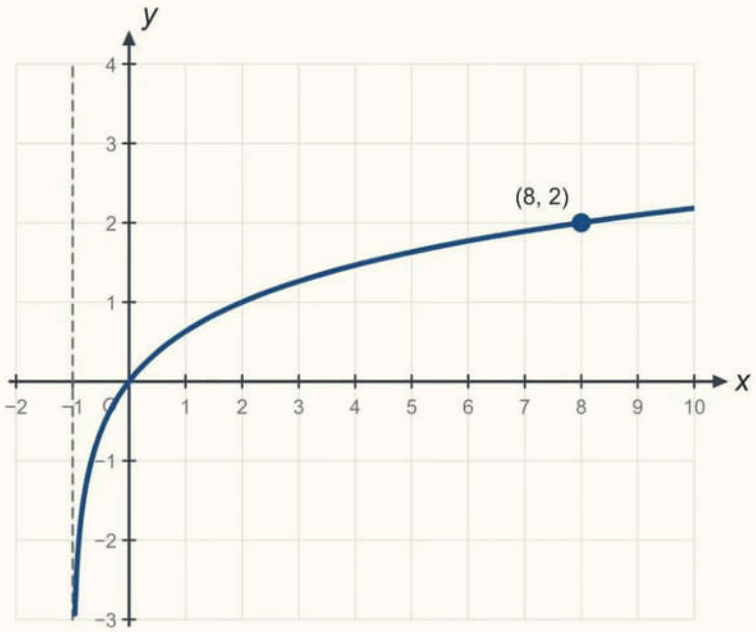
4. Taraf intensitas bunyi dirumuskan $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ desibel (dB), dengan I intensitas bunyi dan I_0 intensitas acuan yang tetap.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Jika intensitas bunyi menjadi 100 kali semula, taraf intensitasnya bertambah 20 dB.
☐ B. Jika intensitas bunyi menjadi 2 kali semula, taraf intensitasnya juga menjadi 2 kali semula.
☐ C. Sepuluh mesin identik yang masing-masing bertaraf 70 dB menghasilkan 80 dB bila dinyalakan bersamaan.
☐ D. Bunyi 60 dB mempunyai intensitas dua kali intensitas bunyi 30 dB.
☐ E. Bunyi berintensitas I_0 mempunyai taraf intensitas 0 dB.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Gambar berikut adalah grafik $y = \log_3(x+1)$; garis putus-putus adalah asimtotnya. Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Grafik melalui titik $O(0,0)$.	○	○
Grafik melalui titik $(8,2)$.	○	○
Asimtot tegak grafik adalah garis $x = 1$.	○	○

Kunci singkat: 1. 1S 2B 3B 2. B, C, E 3. 1B 2S 3S 4. A, C, E 5. 1B 2B 3S

✔ PERIKSA DIRI

- Pada model $P(t) = P_0 \cdot a^{t/k}$, dapatkah kamu menjelaskan mengapa nilainya dikali a setiap k satuan waktu, bukan dikali P_0?
- Bila data diberikan setelah 3 periode dan yang ditanya keadaan awal, bagaimana kamu mengubah syarat "awalnya lebih dari c" menjadi satu batas pada data?
- Setelah mendapat waktu dari logaritma, misalnya $t > 9{,}01$, nilai bulat mana yang kamu periksa, dan mengapa?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.8: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.8

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri

MATTL-1.9

◎ APA YANG DIUJI

Sub bab ini menggabungkan dua jenis fungsi yang grafiknya punya ciri khas. Grafik **fungsi nilai mutlak** berbentuk "patah" (huruf V atau W). Grafik **fungsi trigonometri** berulang (periodik), seperti pasang surut air laut, putaran bianglala, atau suhu harian. Di TKA, keduanya diuji lewat **grafik**: kamu membaca ciri grafik, menyusun modelnya, lalu menjawab pertanyaan "kapan" atau "berapa kali".

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-11	Menyimpulkan karakteristik dari suatu model fungsi trigonometri dalam konteks permasalahan sehari-hari	47,98 %

Hampir separuh peserta menjawab SA-11 dengan benar, tetapi separuh lainnya keliru. Bagian yang paling rawan bukan menghitung konstanta model, melainkan **menghitung urutan kejadian**: kedalaman tertentu tercapai **dua kali** dalam setiap periode, sehingga "kali ketiga" mudah salah dihitung. Fungsi nilai mutlak belum muncul di soal asli 2025, tetapi kisi-kisi resmi mencantumkannya.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menggambar grafik $y = |x - h| + k$ dan membedakan grafik $|f(x)|$ dengan $f(|x|)$;
- menentukan banyak penyelesaian $|f(x)| = k$ dari grafik;
- menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dalam konteks toleransi;
- menentukan sumbu tengah, amplitudo, periode, nilai maksimum, dan nilai minimum model $y = a + b\cos(kt)$ dari rumus atau dari grafik;
- menentukan saat ke-n suatu nilai tercapai dengan tabel waktu;
- menghitung lama waktu suatu besaran berada di atas atau di bawah batas tertentu.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

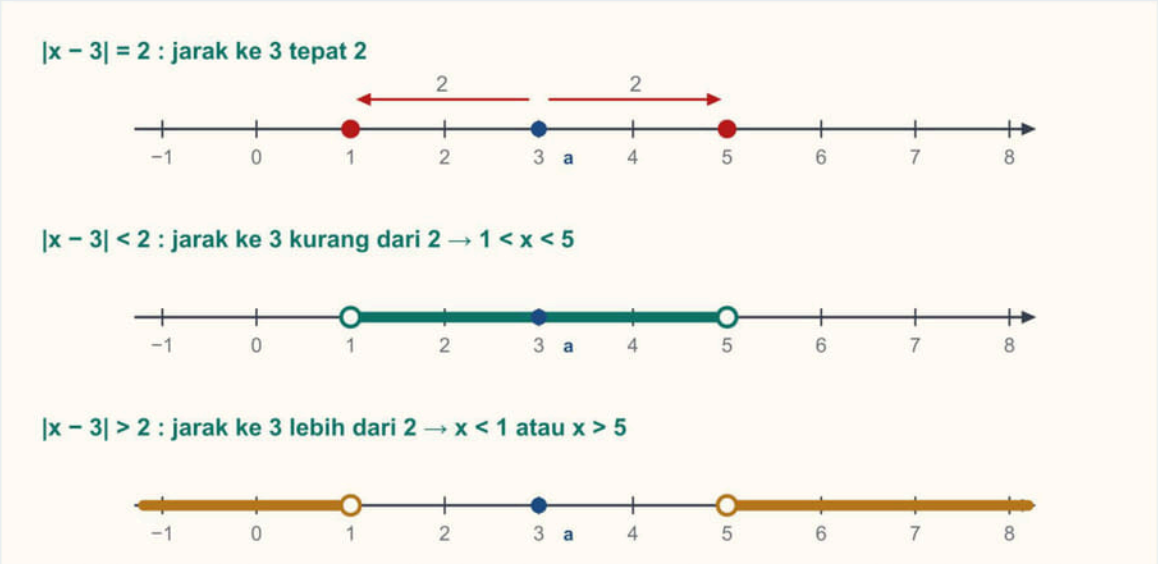
◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Nilai mutlak sebagai jarak

Nilai mutlak $|x|$ adalah **jarak** bilangan x ke 0 pada garis bilangan, jadi selalu tidak negatif:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Contoh: $|5| = 5$ dan $|-5| = 5$. Lebih umum, $|x - a|$ adalah jarak x ke a. Pandangan "jarak" ini membuat soal nilai mutlak jauh lebih mudah dibayangkan. Gambar 1.40 memperlihatkan tiga pertanyaan jarak yang paling sering muncul.



Gambar 1.40 Pada garis bilangan, $|x - 3|$ adalah jarak x ke 3. Jarak tepat 2 memberi dua titik; jarak kurang dari 2 memberi satu selang; jarak lebih dari 2 memberi dua selang. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Grafik $y = |x|$ berbentuk huruf V dengan titik puncak (titik terendah) $(0, 0)$. Grafik $y = |x - h| + k$ adalah V yang sama, digeser sehingga puncaknya di (h, k). Kedua kakinya bergradien 1 dan -1.

Contoh terselesaikan 1: grafik V

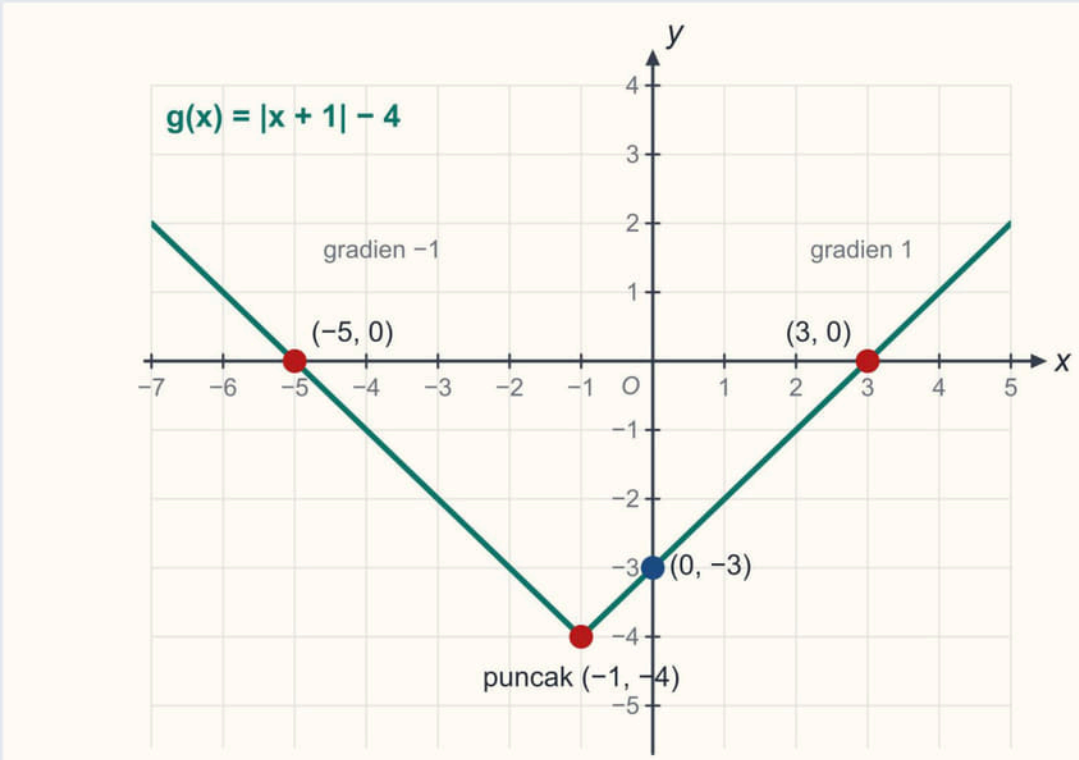
Buat sketsa $g(x) = |x + 1| - 4$.

Penyelesaian. Puncak di $(-1, -4)$. Titik potong sumbu Y: $g(0) = 1 - 4 = -3$. Titik potong sumbu X: $|x + 1| = 4$, artinya jarak x ke -1 sama dengan 4, jadi $x = 3$ atau $x = -5$.

x	-5	-3	-1	0	1	3
$g(x)$	0	-2	-4	-3	-2	0

Grafik turun lurus dari kiri sampai $(-1, -4)$, lalu naik lurus (lihat Gambar 1.41). Bagian grafik di bawah sumbu X adalah $-5 < x < 3$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.41 Grafik $g(x) = |x + 1| - 4$: grafik $y = |x|$ yang puncaknya digeser ke $(-1, -4)$. Kedua kakinya bergradien -1 dan 1. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Mutlak di luar dan mutlak di dalam fungsi

Dua bentuk ini sering tertukar, padahal cara menggambarnya berbeda.

Bentuk	Cara menggambar dari grafik f	Akibatnya
$y = \lvert f(x) \rvert$	bagian di **atas** sumbu X tetap; bagian di **bawah** sumbu X dicerminkan ke atas terhadap sumbu X	tidak ada bagian grafik di bawah sumbu X
$y = f(\lvert x \rvert)$	bagian di **kanan** sumbu Y ($x \geq 0$) tetap; bagian kiri dibuang, lalu diganti cerminan bagian kanan terhadap sumbu Y	grafik simetris terhadap sumbu Y

Mengapa? Pada $\lvert f(x) \rvert$, yang dimutlakkan adalah **nilai fungsinya** (sumbu tegak), jadi nilai negatif dibalik menjadi positif. Pada $f(\lvert x \rvert)$, yang dimutlakkan adalah **masukannya**. Nilai x dan $-x$ memberi masukan yang sama, sehingga $f(\lvert -x \rvert) = f(\lvert x \rvert)$.

Contoh terselesaikan 2: dua grafik dari satu parabola

Diketahui $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$. Puncak parabola $(1, -4)$, memotong sumbu X di -1 dan 3.

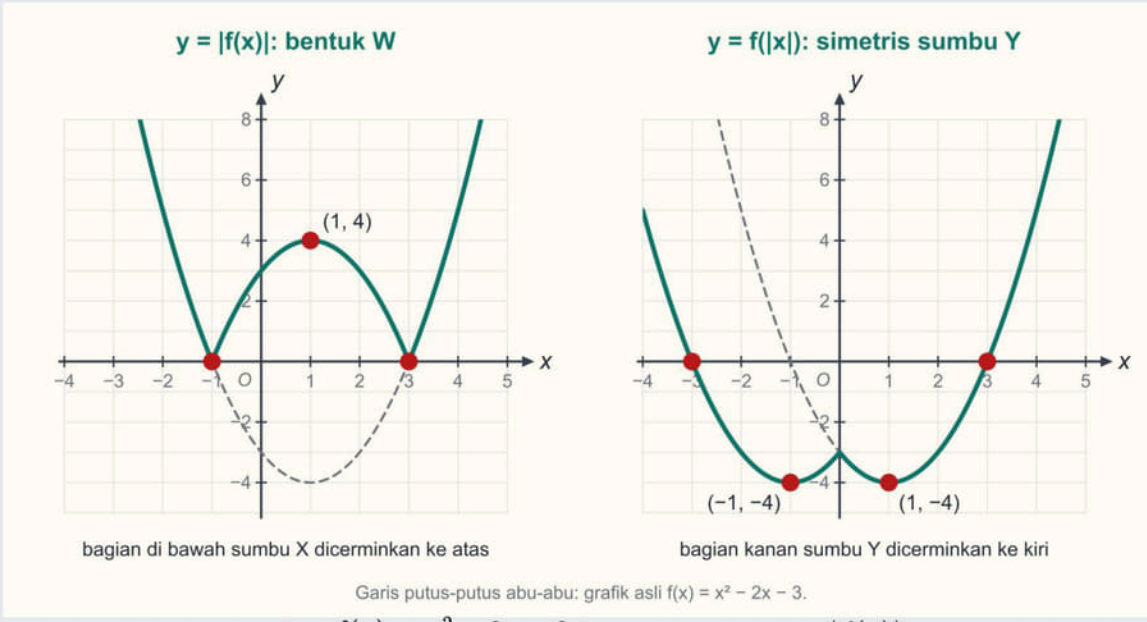
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5
$\lvert f(x) \rvert$	21	12	5	0	3	4	3	0	5
$f(\lvert x \rvert)$	5	0	-3	-4	-3	-4	-3	0	5

Bacaan tabel:

- Grafik $\lvert f(x) \rvert$ berbentuk huruf W. Lengkung di antara -1 dan 3 dibalik ke atas, sehingga puncak bawah $(1, -4)$ menjadi puncak atas $(1, 4)$.
- Grafik $f(\lvert x \rvert)$ memotong sumbu X di -3 dan 3 (bukan di -1), dengan dua titik terendah $(-1, -4)$ dan $(1, -4)$.

Kedua grafik digambar berdampingan pada Gambar 1.42. Bandingkan dengan grafik asli yang putus-putus: $\lvert f(x) \rvert$ hanya membalik bagian yang negatif, sedangkan $f(\lvert x \rvert)$ membuang bagian kiri dan menggantinya dengan cerminan bagian kanan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.42 Dari parabola $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (putus-putus): kiri, $y = |f(x)|$ berbentuk W; kanan, $y = f(|x|)$ simetris terhadap sumbu Y. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Banyak penyelesaian $|f(x)| = k$. Tarik garis mendatar $y = k$ dan hitung titik potongnya dengan grafik W:

Nilai k	Banyak penyelesaian	Alasan
$k < 0$	0	grafik tidak pernah di bawah sumbu X
$k = 0$	2	hanya di $x = -1$ dan $x = 3$
$0 < k < 4$	4	memotong keempat kaki W
$k = 4$	3	dua kaki luar dan puncak $(1, 4)$
$k > 4$	2	hanya kedua kaki luar

Cek aljabar untuk $k = 4$: $f(x) = 4$ memberi $x^2 - 2x - 7 = 0$ (dua akar), dan $f(x) = -4$ memberi $(x - 1)^2 = 0$ (satu akar, $x = 1$). Totalnya 3, cocok.

3. Persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak

Dengan pandangan jarak, untuk $b > 0$:

Bentuk	Arti jarak	Penyelesaian
$\|x - a| = b$	jarak ke a tepat b	$x = a - b$ atau $x = a + b$
$\|x - a| < b$	jarak ke a kurang dari b	$a - b < x < a + b$ (satu selang)
$\|x - a| > b$	jarak ke a lebih dari b	$x < a - b$ atau $x > a + b$ (dua selang)

Secara grafik, $|f(x)| < b$ berarti bagian grafik yang berada di **bawah** garis $y = b$.

Contoh terselesaikan 3: toleransi

(a) Sebuah pabrik mengisi kemasan gula 250 g. Kemasan lolos uji bila beratnya menyimpang paling banyak 4 g dari 250 g. (Data disusun untuk contoh.) Tulis syaratnya dan tentukan rentang berat yang lolos. (b) Selesaikan $|2x - 5| > 3$.

Penyelesaian.

(a) "Menyimpang paling banyak 4 g" berarti jarak berat m ke 250 tidak lebih dari 4: $|m - 250| \le 4$. Jadi $246 \le m \le 254$. Kemasan 245 g ditolak, kemasan 254 g lolos.

(b) $2x - 5 < -3$ atau $2x - 5 > 3$. Jadi $x < 1$ atau $x > 4$. Cek: $x = 0$ memberi $|-5| = 5 > 3$ (memenuhi); $x = 2$ memberi $|-1| = 1$ (tidak memenuhi).

4. Fungsi trigonometri: ukuran sudut dan nilai penting

Model trigonometri di TKA hampir selalu memakai **radian**: π radian $= 180^\circ$. Jadi $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, dan $2\pi = 360^\circ$.

Nilai sinus dan kosinus pada sudut penting (satu putaran penuh):

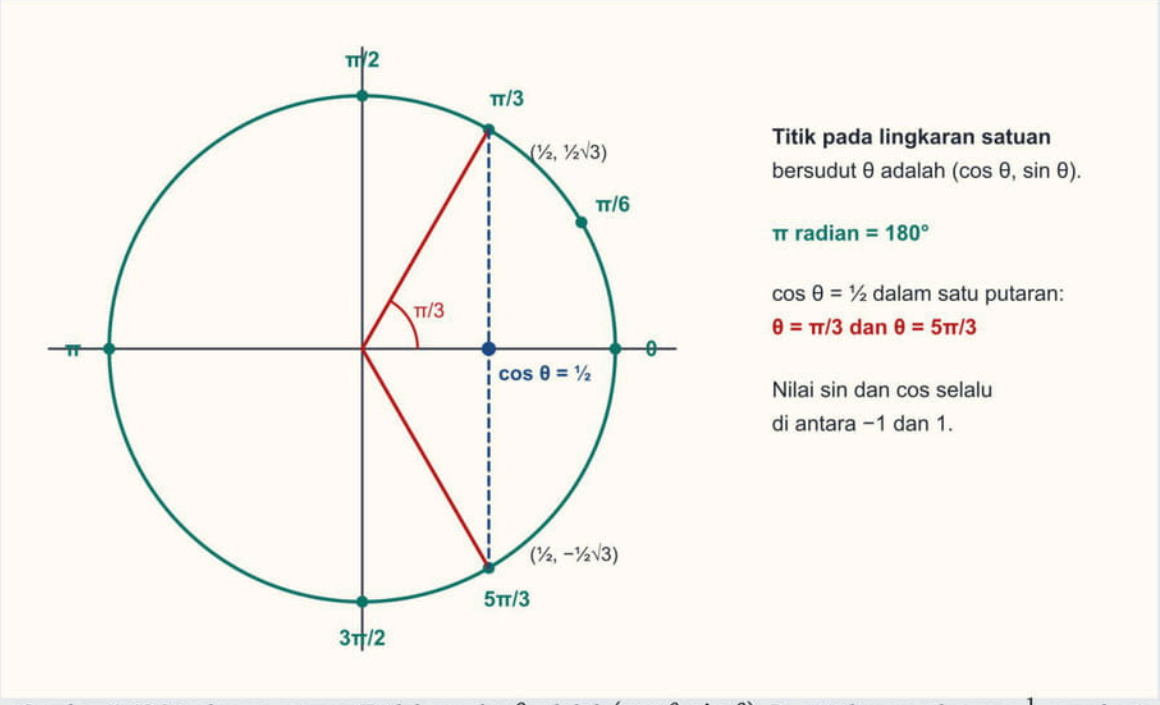
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1

Kamu juga perlu: $\cos\theta = \frac{1}{2}$ untuk $\theta = \frac{\pi}{3}$ dan $\theta = \frac{5\pi}{3}$ (dalam satu putaran), serta $\sin\theta = \frac{1}{2}$ untuk $\theta = \frac{\pi}{6}$ dan $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Nilai $\sin$ dan $\cos$ selalu di antara -1 dan 1, dan berulang setiap 2π.

Dari mana nilai-nilai itu? Bayangkan lingkaran berjari-jari 1 yang berpusat di titik asal (**lingkaran satuan**). Titik pada lingkaran yang sudutnya θ dari sumbu X positif mempunyai koordinat $(\cos\theta, \sin\theta)$ (Gambar 1.43). Karena titik itu tidak pernah keluar dari lingkaran berjari-jari 1, kedua koordinatnya selalu di antara -1 dan 1. Setelah berputar satu putaran penuh (2π), titik kembali ke tempat semula, jadi nilainya berulang. Satu radian adalah sudut yang busurnya sepanjang jari-jari; keliling lingkaran $2\pi r$, sehingga satu putaran $= 2\pi$ radian $= 360^\circ$.



Gambar 1.43 Lingkaran satuan. Titik bersudut θ adalah $(\cos\theta, \sin\theta)$. Dua titik yang absisnya $\frac{1}{2}$ memberi $\cos\theta = \frac{1}{2}$ untuk $\theta = \frac{\pi}{3}$ dan $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Model kosinus: sumbu tengah, amplitudo, periode

Besaran yang naik turun secara teratur (kedalaman air, ketinggian kabin, suhu harian) sering dimodelkan dengan

$$y = a + b\cos(kt)$$

Setiap konstanta punya arti pada grafik:

Ciri	Rumus	Arti pada grafik
Sumbu tengah	$y = a$	garis mendatar di tengah antara puncak dan lembah
Amplitudo	$\lvert b\rvert$	jarak puncak (atau lembah) ke sumbu tengah
Nilai maksimum	$a + \lvert b\rvert$	ketinggian puncak
Nilai minimum	$a - \lvert b\rvert$	ketinggian lembah
Periode	$T = \frac{2\pi}{k}$	lama satu siklus penuh
Keadaan di $t = 0$	$b > 0$: di puncak; $b < 0$: di lembah	titik awal grafik

Mengapa periodenya $\frac{2\pi}{k}$? Kosinus berulang bila sudutnya bertambah 2π. Sudutnya adalah kt, jadi kt harus bertambah 2π, yaitu t bertambah $\frac{2\pi}{k}$. **Mengapa maksimumnya $a + \lvert b\rvert$?** Karena $\cos(kt)$ paling besar 1 dan paling kecil -1.

Sebaliknya, bila yang diketahui grafiknya:

$$a = \frac{\text{maks} + \text{min}}{2}, \qquad \lvert b\rvert = \frac{\text{maks} - \text{min}}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{T}$$

Bentuk sinus $y = A\sin(Bx + C) + D$ dibaca dengan cara yang sama: sumbu tengah $y = D$, amplitudo $\lvert A\rvert$, periode $\frac{2\pi}{B}$. Grafik sinus **naik melalui sumbu tengah** saat sudutnya $Bx + C = 0$.

Jangan mencampur derajat dan radian. Bila model ditulis dalam derajat, misalnya $y = 5 + 2\cos(30t)^\circ$, periodenya $\frac{360}{30} = 12$, bukan $\frac{2\pi}{30}$.

Contoh terselesaikan 4: menyusun model dari grafik

Grafik kedalaman air di sebuah dermaga (dalam meter, t jam setelah pukul 00.00) berbentuk kosinus. Grafik itu mencapai puncak 9 m di $t = 0$, lembah 3 m di $t = 4$, dan puncak lagi di $t = 8$. (Data disusun untuk contoh.) Tentukan modelnya dalam bentuk $y = a + b\cos(kt)$.

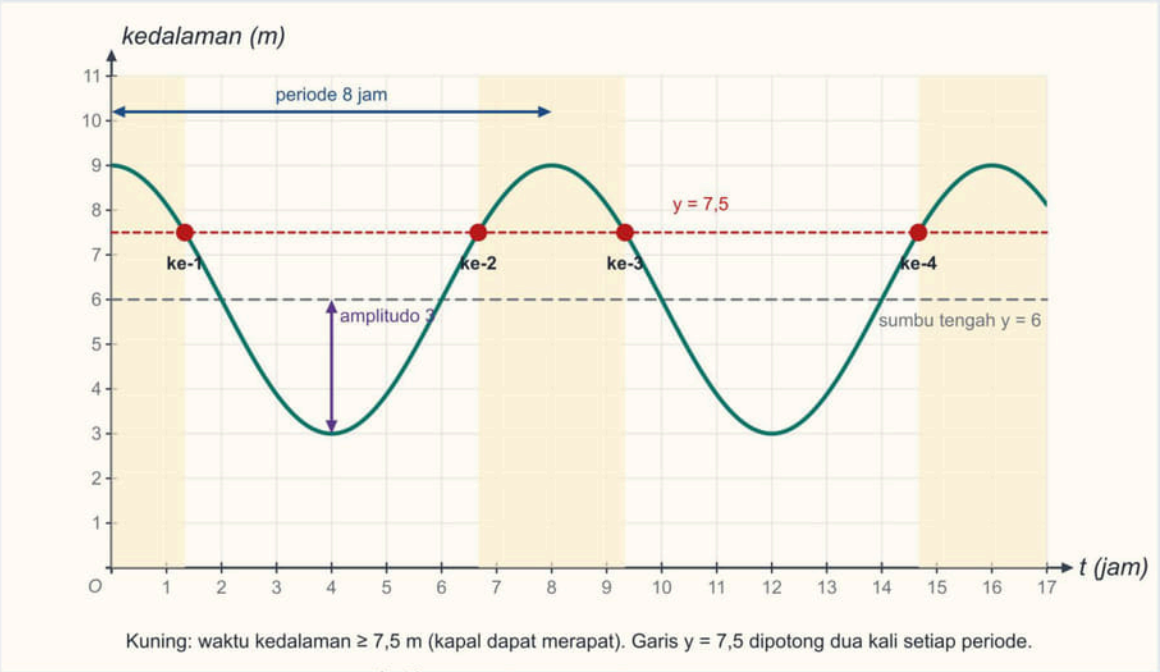
Penyelesaian.

- Sumbu tengah: $a = \frac{9+3}{2} = 6$.
- Amplitudo: $\lvert b\rvert = \frac{9-3}{2} = 3$. Grafik di puncak saat $t = 0$, jadi $b = 3$ (positif).
- Periode: puncak ke puncak berikutnya 8 jam, jadi $k = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$y = 6 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

Cek: $t = 2$ memberi $6 + 3\cos\frac{\pi}{2} = 6$ (sumbu tengah, saat turun); $t = 4$ memberi $6 + 3\cos\pi = 3$ (lembah). Cocok dengan grafik. Model ini digambar pada Gambar 1.44 dan dipakai lagi pada Contoh 5 dan 6.



Gambar 1.44 Grafik $y = 6 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ untuk $0 \le t \le 17$: sumbu tengah $y = 6$, amplitudo 3, periode 8 jam. Garis $y = 7{,}5$ dipotong dua kali setiap periode (ke-1 sampai ke-4); daerah kuning adalah waktu kedalaman paling sedikit 7,5 m. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

6. Saat ke-n mencapai nilai tertentu: pakai tabel waktu

Dalam satu periode, garis mendatar $y = c$ yang berada **di antara** nilai minimum dan maksimum memotong grafik **dua kali**: sekali saat grafik turun, sekali saat grafik naik. Nilai maksimum dan minimum hanya tercapai sekali per periode. Karena itu, pertanyaan "kapan untuk ketiga kalinya" tidak boleh dijawab dengan menebak. Susun **tabel waktu**.

Langkahnya:

1. Ubah $y = c$ menjadi persamaan $\cos(kt) = \text{nilai}$.
2. Cari semua sudut dalam satu putaran $[0, 2\pi)$ yang memenuhi.
3. Ubah setiap sudut menjadi waktu t, lalu tambahkan periode T berulang kali.
4. Urutkan semua waktu dari yang terkecil dan beri nomor: ke-1, ke-2, ke-3, dan seterusnya.

Contoh terselesaikan 5: kali ketiga

Dengan model dermaga $y = 6 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$, kapan kedalaman air mencapai 7,5 m untuk ketiga kalinya setelah pukul 00.00?

Penyelesaian. $6 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) = 7{,}5$ memberi $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Dalam satu putaran, sudutnya $\frac{\pi}{3}$ atau $\frac{5\pi}{3}$:

$$\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{4}{3}, \qquad \frac{\pi t}{4} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{20}{3}$$

Tambahkan periode 8 jam untuk mendapatkan waktu berikutnya:

Urutan	t (jam)	Pukul	Keadaan air
ke-1	$\frac{4}{3}$	01.20	sedang surut (turun dari 9 m)
ke-2	$\frac{20}{3}$	06.40	sedang pasang (naik dari 3 m)
ke-3	$\frac{4}{3} + 8 = \frac{28}{3}$	09.20	sedang surut
ke-4	$\frac{20}{3} + 8 = \frac{44}{3}$	14.40	sedang pasang

Jadi kali ketiga terjadi pada $t = 9\frac{1}{3}$ jam, yaitu pukul 09.20. Pengecoh yang umum: menjawab $\frac{4}{3} + 2 \times 8$ (menganggap hanya sekali per periode) atau $\frac{20}{3}$ (menganggap kali kedua sebagai kali ketiga).

7. Lama waktu di atas atau di bawah batas

Pertanyaan "berapa lama" diselesaikan dengan **pertidaksamaan**. Cari dua waktu batasnya dalam satu periode, lalu tentukan bagian mana yang memenuhi dengan melihat grafik (di sekitar puncak atau di sekitar lembah).

Contoh terselesaikan 6: menilai pernyataan

Kapal barang hanya dapat merapat di dermaga pada Contoh 4 bila kedalaman air **paling sedikit 7,5 m**. Nilailah pernyataan berikut untuk model $y = 6 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Penyelesaian. Syarat $y \geq 7{,}5$ berarti $\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$. Dalam satu periode $0 \leq t \leq 8$, syarat ini dipenuhi di sekitar puncak: $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$ dan $\frac{20}{3} \leq t \leq 8$. Lamanya $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ jam per periode.

Pernyataan	Nilai	Alasan
Periode pasang surut di dermaga itu 8 jam	Benar	$T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$
Amplitudo kedalaman air 6 m	Salah	6 m adalah sumbu tengah; amplitudonya $\frac{9-3}{2} = 3$ m
Kedalaman minimum pertama kali tercapai pukul 04.00	Benar	$\cos\pi = -1$ pada $t = 4$
Dalam selang $0 \leq t \leq 24$, kedalaman maksimum tercapai tepat 3 kali	Salah	puncak di $t = 0, 8, 16, 24$, jadi 4 kali karena kedua ujung selang termasuk
Kapal dapat merapat selama sepertiga waktu setiap periode	Benar	$\frac{8/3}{8} = \frac{1}{3}$

Pernyataan keempat menunjukkan pentingnya **ujung selang**. Selalu periksa apakah $t = 0$ dan ujung kanan selang ikut dihitung. Untuk pernyataan kelima, bandingkan dengan cara yang keliru: bila grafik dianggap garis lurus (turun 6 m dalam 4 jam), kedalaman 7,5 m tercapai pada $t = 1$, sehingga kapal hanya dapat merapat 2 jam per periode (seperempat periode). Grafik kosinus melengkung: di dekat puncak kedalaman berubah lambat, sehingga air bertahan lebih lama di atas 7,5 m.

Contoh terselesaikan 7: bentuk sinus dari grafik

Sebagian grafik $y = A\sin(Bx + C) + D$ dengan $A > 0$ dan $B > 0$ naik melalui $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, lalu mencapai maksimum $\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$. Nilai minimumnya -1. Tentukan rumusnya.

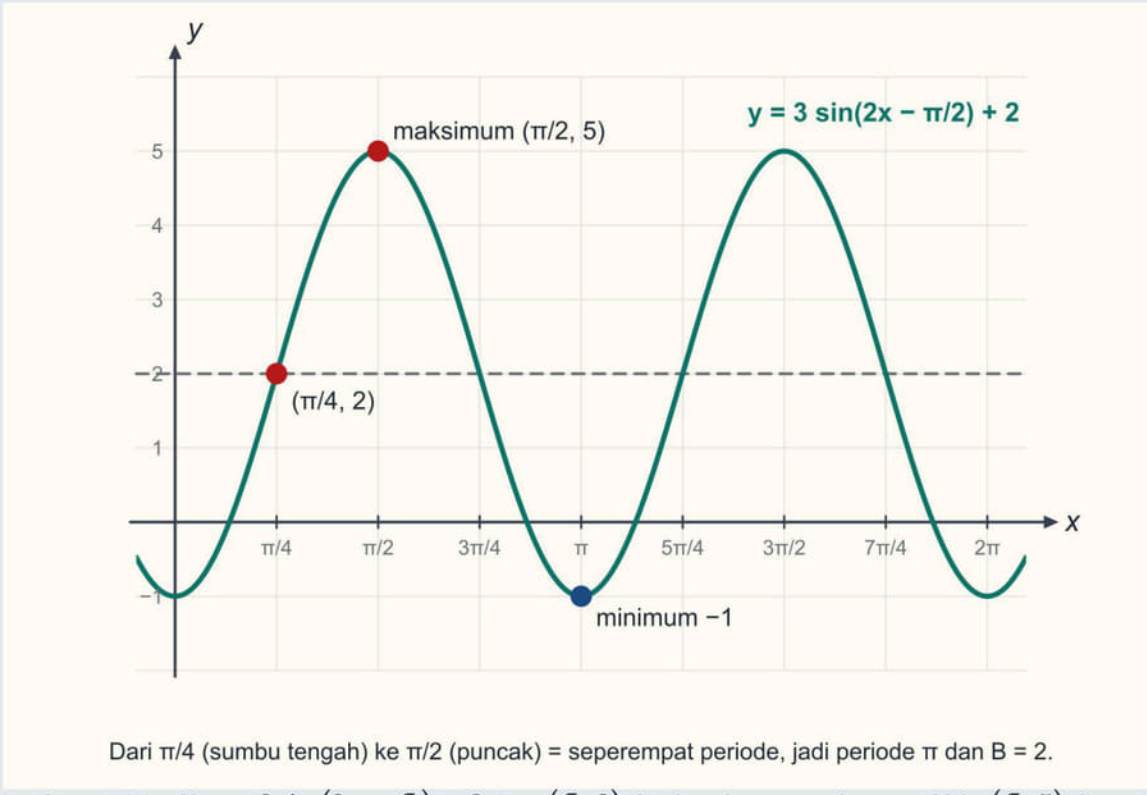
Penyelesaian.

- Sumbu tengah: $D = \frac{5+(-1)}{2} = 2$. Titik $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ memang ada di sumbu tengah.
- Amplitudo: $A = \frac{5-(-1)}{2} = 3$.
- Dari sumbu tengah (naik) ke maksimum adalah **seperempat** periode: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Jadi periode $T = \pi$ dan $B = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
- Sinus naik melalui sumbu tengah saat sudutnya 0: $2 \cdot \frac{\pi}{4} + C = 0$, jadi $C = -\frac{\pi}{2}$.

$$y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

Cek: $x = \frac{\pi}{2}$ memberi $3\sin\frac{\pi}{2} + 2 = 5$ (maksimum); $x = \pi$ memberi $3\sin\frac{3\pi}{2} + 2 = -1$ (minimum). Cocok. Grafiknya pada Gambar 1.45.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 1.45 Grafik $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$. Dari $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ (naik melewati sumbu tengah) ke $\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$ (puncak) adalah seperempat periode. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal nilai mutlak dan trigonometri

1. **Nilai mutlak: pikirkan jarak.** $|x - a|$ adalah jarak x ke a. Untuk grafik, mulai dari grafik fungsi di dalam tanda mutlak.
2. **Bedakan $|f(x)|$ dan $f(|x|)$.** Yang pertama mencerminkan bagian **bawah** ke atas; yang kedua mencerminkan bagian **kanan** ke kiri.
3. **Banyak penyelesaian: tarik garis mendatar.** Periksa nilai k khusus (0, tinggi puncak) secara terpisah, karena di situ banyaknya berubah.
4. **Model trigonometri: tulis empat ciri dulu.** Sumbu tengah, amplitudo, periode, dan keadaan di $t = 0$. Dari grafik: rata-rata puncak dan lembah, setengah selisihnya, jarak puncak ke puncak.
5. **Pertanyaan "ke-n": susun tabel waktu.** Cari kedua sudut dalam satu putaran, tambahkan periode, urutkan, beri nomor.
6. **Pertanyaan "berapa lama": cari dua waktu batas**, lalu tentukan bagian yang memenuhi dengan melihat apakah syaratnya di sekitar puncak atau lembah.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Menghitung urutan dari kejadian yang salah	Kali ketiga dihitung mulai dari kali kedua, atau nilai di sumbu tengah dianggap sekali per periode	Tabel waktu bernomor: ke-1, ke-2, ke-3
Periode dalam derajat dan radian tercampur	$\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ dianggap berperiode $\frac{360}{6} = 60$	Radian: $T = \frac{2\pi}{k}$. Derajat: $T = \frac{360}{k}$
Sumbu tengah disangka amplitudo	Pada $6 + 3\cos(\ldots)$, menyebut amplitudo 6	Amplitudo adalah koefisien kosinus (dimutlakkan)
Tanda b diabaikan	Model berawal di lembah ditulis $a + b\cos(kt)$ dengan $b > 0$	Cek nilai di $t = 0$: puncak berarti $b > 0$, lembah berarti $b < 0$
Grafik trigonometri dianggap garis lurus	Lama di atas batas dihitung dengan perbandingan ketinggian	Selesaikan pertidaksamaan dengan nilai sudut
Seluruh grafik $\lvert g(x)\rvert$ dicerminkan	Bagian di atas sumbu X ikut dibalik	Hanya bagian di bawah sumbu X yang dicerminkan
$\lvert f(x)\rvert$ dan $f(\lvert x\rvert)$ tertukar	Mencerminkan bagian kiri pada $\lvert f(x)\rvert$	Mutlak di luar: cermin sumbu X; mutlak di dalam: cermin sumbu Y
Ujung selang terlewat	Banyak puncak dalam $0 \le t \le 24$ dihitung 3	Periksa apakah $t = 0$ dan ujung kanan termasuk

BEDAH SOAL ASLI

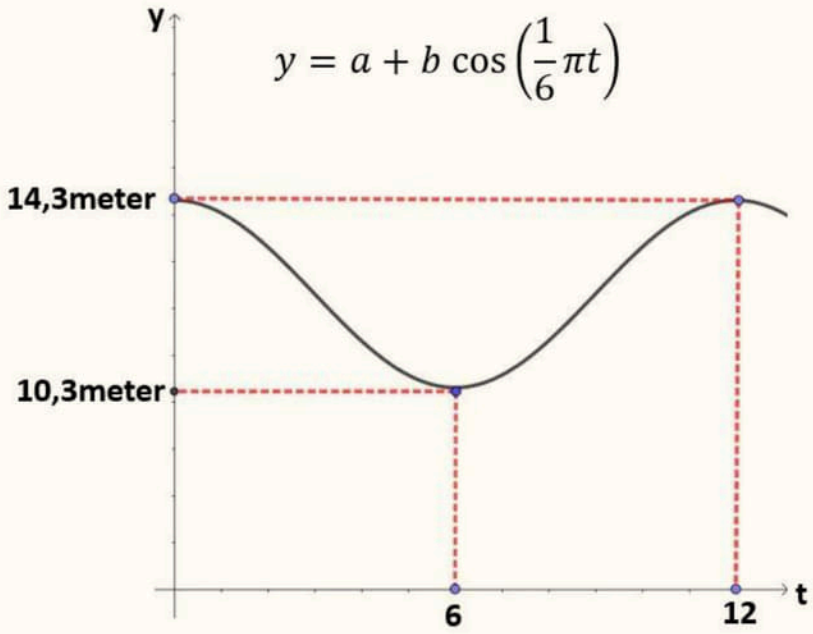
Soal berikut (SA-11) dijawab benar oleh 47,98 % peserta. Konstanta a dan b mudah dibaca dari grafik. Bagian yang paling rawan adalah **kali ketiga**: kedalaman 12,3 m tepat berada di sumbu tengah, sehingga tercapai dua kali dalam setiap periode 12 jam. Tentukan dulu modelnya seperti Contoh terselesaikan 4, lalu susun tabel waktu seperti Contoh terselesaikan 5 sebelum memilih jawaban.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Grafik berikut menyatakan perubahan kedalaman air laut di sebuah teluk, dengan model $y = a + b\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$.

Pada grafik tersebut, y menyatakan kedalaman air laut dalam meter, t dalam jam, serta a dan b adalah konstanta. Nilai $t = 6$ menyatakan 6 jam setelah pukul 00.00, demikian pula untuk nilai t lainnya.

Waktu saat kedalaman air laut mencapai 12,3 meter untuk ketiga kalinya setelah pukul 00.00 adalah ....



A. 3 jam
B. 9 jam
C. 10 jam
D. 12 jam
E. 15 jam

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: E**

Langkah 1 – Tentukan a dan b dari grafik. Maksimum $14{,}3$ (di $t = 0$) dan minimum $10{,}3$ (di $t = 6$).

- $a = \dfrac{14{,}3 + 10{,}3}{2} = 12{,}3$ (garis tengah)
- $b = \dfrac{14{,}3 - 10{,}3}{2} = 2$ (amplitudo; positif karena di $t = 0$ grafik di puncak)

Model: $y = 12{,}3 + 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$.

Langkah 2 – Selesaikan $y = 12{,}3.\, 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = 0$

$\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = 3 + 6k$

Langkah 3 – Urutkan. $t = 3$ (pertama), $t = 9$ (kedua), $t = 15$ (ketiga).

Cek: $y(15) = 12{,}3 + 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = 12{,}3 + 0 = 12{,}3$ ✓.

Analisis pilihan: 3 jam dan 9 jam adalah saat pertama dan kedua; 12 jam adalah saat kedalaman maksimum; 10 jam tidak memenuhi ($\cos\frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2}, y = 13{,}3$).

Jebakan: mengira 12,3 m hanya tercapai sekali per periode. Garis tengah dilalui **dua kali** per periode (saat turun dan saat naik).

Jawaban: E.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memadukan pertidaksamaan nilai mutlak dengan model suhu yang berubah terhadap waktu. Ubah dulu syarat $|T - 5| \le 3$ menjadi dua pertidaksamaan, lalu ganti T dengan rumusnya.

►. Vaksin di sebuah puskesmas harus disimpan pada suhu T yang memenuhi $|T - 5| \le 3$ (°C). Setelah listrik padam, lemari pendingin dinyalakan kembali dan suhunya t jam kemudian dimodelkan $T(t) = 12 - 2t$ untuk $0 \le t \le 6$.
Selang waktu ketika suhu memenuhi syarat penyimpanan adalah ....

A. $0 \le t \le 2$
B. $2 \le t \le 8$
C. $t \ge 2$
D. $2 \le t \le 5$
E. $-5 \le t \le -2$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: D**

Konsep: $|A| \le c$ setara $-c \le A \le c$. Saat membagi pertidaksamaan dengan bilangan negatif, arah tanda dibalik.

Langkah 1. $|12 - 2t - 5| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 7 - 2t \le 3$.

Langkah 2. Kurangi 7: $-10 \le -2t \le -4$; bagi -2 (arah dibalik): $5 \ge t \ge 2$.

Cek ulang: $T(2) = 8$ dan $T(5) = 2$, keduanya batas syarat ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: itu selang ketika suhu masih terlalu tinggi.
- B: batas suhu 2 °C dan 8 °C dipakai langsung sebagai nilai t.
- C: hanya memakai batas atas suhu; untuk $t > 5$ suhu di bawah 2 °C.
- E: tanda salah saat membagi dengan -2 (arah pertidaksamaan harus dibalik, bukan tandanya).

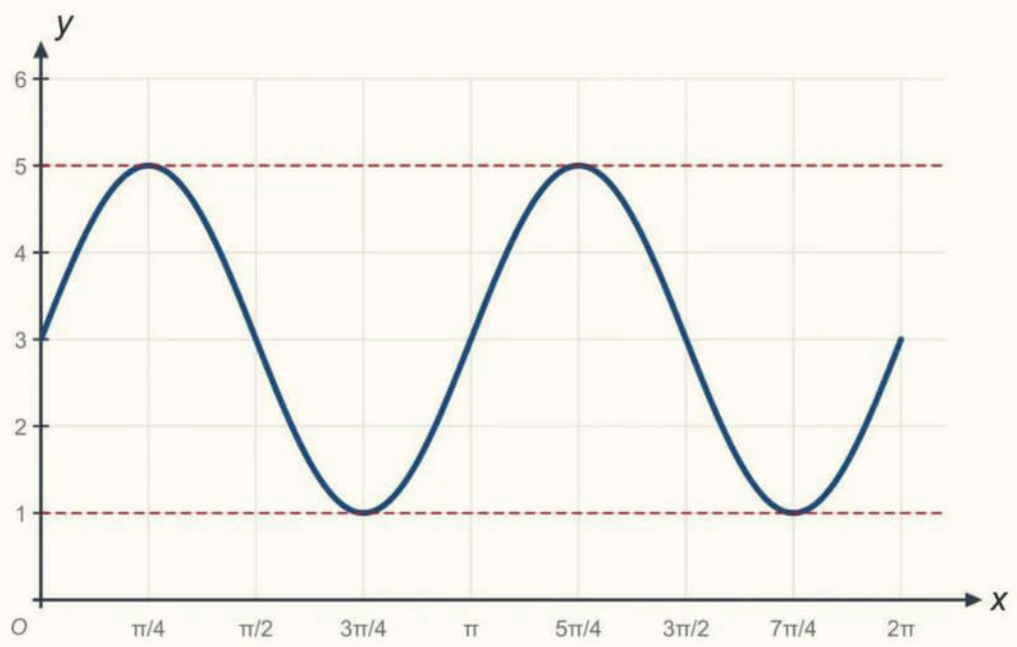
Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: saat membagi dengan -2, **arah** tanda pertidaksamaan berbalik, tetapi bilangan batasnya tidak berubah tanda (pengecoh E). Pengecoh B muncul bila batas suhu 2 °C dan 8 °C langsung dianggap batas waktu. Cek di kedua ujung selang, $T(2) = 8$ dan $T(5) = 2$, cepat memastikan jawabannya.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk soal nilai mutlak, sketsakan grafiknya dulu. Untuk soal trigonometri, tulis dulu sumbu tengah, amplitudo, dan periodenya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Gambar berikut adalah grafik $y = a\sin(bx) + c$ untuk $0 \le x \le 2\pi$, dengan $a > 0$ dan $b > 0$.
Nilai $a + b + c$ adalah ....



A. 7
B. 9
C. 6
D. $\dfrac{11}{2}$
E. 5

2. Himpunan penyelesaian $2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ adalah ....

A. $\left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$
B. $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$
C. $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \pi\right\}$
D. $\left\{0, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$
E. $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

Kunci singkat: 1. A 2. C

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Dari grafik f, bagaimana kamu menggambar $|f(x)|$, dan apa bedanya dengan $f(|x|)$?
- Pada model $y = a + b\cos(kt)$, nilai y mana yang tercapai dua kali dalam setiap periode, dan nilai mana yang hanya sekali?
- Bila ditanya "kapan untuk ketiga kalinya", bagaimana kamu menyusun tabel waktu agar tidak salah urutan?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 1.9: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-1.9

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kuis Akhir Bab 1

MATTL-KB1

Jumlah soal: 25 **Waktu anjuran:** 60 menit

Kerjakan sendiri dan berwaktu. Setelah selesai, cocokkan dengan kunci di Bagian D, isi tabel skor, lalu lihat anjuran di bawahnya.

Kerjakan Kuis Bab 1 di LMS

Skor dan progresmu tersimpan di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-KB1

1. Koperasi sekolah memesan kaus olahraga untuk tiga kelas dengan banyak kaus tiap ukuran seperti pada tabel. Harga satu kaus ukuran S, M, dan L berturut-turut Rp60.000,00, Rp65.000,00, dan Rp70.000,00. Pesanan ditulis sebagai matriks P berordo 3×3 (baris = kelas, kolom = ukuran) dan harga sebagai matriks kolom H.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Kelas	S	M	L
X-A	10	15	5
X-B	8	12	12
X-C	12	10	6

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Matriks PH menyatakan biaya tiap kelas, dan biaya terbesar adalah kelas X-B.
☐ B. Total biaya pesanan ketiga kelas sekaligus adalah Rp5.715.000,00.
☐ C. Biaya pesanan kelas X-A lebih besar Rp145.000,00 daripada kelas X-C.
☐ D. Jika harga kaus L naik Rp5.000,00, biaya kelas X-B bertambah Rp60.000,00.
☐ E. Perkalian HP juga dapat dihitung, dan hasilnya sama dengan matriks PH.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Diketahui
$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2b \end{pmatrix}$.
Nilai $a + b$ adalah ....

A. 0
B. -1
C. 4
D. -6
E. 2

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $AB = BA = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
☐ B. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
☐ C. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ D. $\det(AB) = 1$
☐ E. $AB - BA$ berupa matriks diagonal.

4. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Nilai $\det(2A)$ adalah ....

A. 28
B. 14
C. 56
D. 10
E. 112

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Unsur baris ke-2 kolom ke-3 dari A^{-1} adalah ....

A. $-\dfrac{3}{13}$

B. $\dfrac{4}{13}$

C. $\dfrac{3}{13}$

D. $-\dfrac{4}{13}$

E. $-\dfrac{3}{11}$

6. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$, sehingga $\det(3A) = 3$

☐ B. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

☐ C. Jika $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, unsur-unsur X dari atas adalah 1 dan -1.

☐ D. $\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

☐ E. $(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

7. Sebuah warung menjual dua paket sembako seperti pada gambar. Harga beras per kilogram dan minyak goreng per liter sama di kedua paket. Misalkan harga 1 kg beras dan 1 liter minyak goreng berturut-turut x dan y ribu rupiah.
Persamaan matriks yang tepat untuk menentukan x dan y adalah ....



A. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

B. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 38 \\ 63 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 38 \\ 63 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 63 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 38 \\ 63 \end{pmatrix}$

8. Diketahui sistem persamaan linear $3x - 2y = 4$ dan $x + y = 3$. Sistem itu diselesaikan dengan aturan Cramer, dengan D determinan matriks koefisien serta D_x dan D_y determinan yang kolom x atau kolom y-nya diganti konstanta.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
$D = 5$	○	○
$D_y = 9$	○	○
Penyelesaian sistem itu adalah $x = 2$ dan $y = 1$.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

9. Sistem persamaan linear
$(k-1)x+4y=8$ dan $3x+(k+3)y=12$
mempunyai tak hingga banyak penyelesaian.
Nilai k yang memenuhi adalah ....

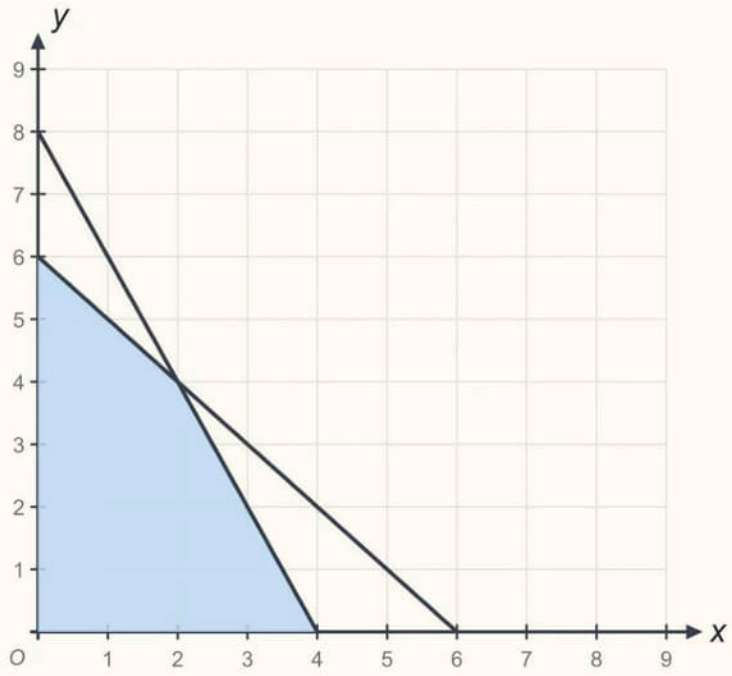
A. -5
B. 3
C. 3 atau -5
D. -3
E. 5

10. Kelompok tani di sebuah desa membuat pupuk kompos dan pupuk cair dari limbah dapur. Satu karung kompos memerlukan 3 kg limbah dan 1 jam kerja, sedangkan satu jeriken pupuk cair memerlukan 1 kg limbah dan 2 jam kerja. Setiap pekan tersedia 60 kg limbah dan 40 jam kerja. Keuntungan satu karung kompos Rp15.000,00 dan satu jeriken pupuk cair Rp20.000,00.
Keuntungan maksimum per pekan adalah ....

A. Rp400.000,00
B. Rp480.000,00
C. Rp500.000,00
D. Rp300.000,00
E. Rp700.000,00

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

11. Daerah yang diarsir pada gambar adalah daerah penyelesaian model produksi harian sebuah toko roti, dengan x = banyak loyang roti tawar dan y = banyak loyang roti manis. Keuntungan dinyatakan dalam ribu rupiah.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Salah satu kendalanya adalah $2x + y \geq 8$.
☐ B. Titik $(2, 4)$ adalah salah satu titik pojok daerah itu.
☐ C. Keuntungan maksimum $f = 2x + 3y$ pada daerah itu adalah 18.
☐ D. Keuntungan maksimum $g = 3x + y$ dicapai di titik $(2, 4)$.
☐ E. Titik $(3, 3)$ termasuk daerah penyelesaian tersebut.

12. Suku banyak $f(x)$ jika dibagi $x^2 - 4$ bersisa $3x + 1$, dan jika dibagi $x + 3$ bersisa 2. Sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^2 + x - 6$ adalah ....

A. $3x + 1$
B. $5x + 1$
C. $-5x + 17$
D. $x + 5$
E. $-7x - 19$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

13. Hasil bagi suku banyak $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$ oleh $(2x + 1)$ adalah ....

A. $2x^2 - 6x + 3$
B. $x^2 - 2x - \frac{1}{2}$
C. $2x^2 - 4x - 1$
D. $x^2 - 3x + 1{,}5$
E. $x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

14. Biaya produksi x unit kursi rotan dinyatakan dengan $B(x) = 0{,}02x^3 - x^2 + 30x + 500$, dan pendapatan penjualannya $R(x) = 60x$, keduanya dalam ribu rupiah. Laba $L(x) = R(x) - B(x)$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

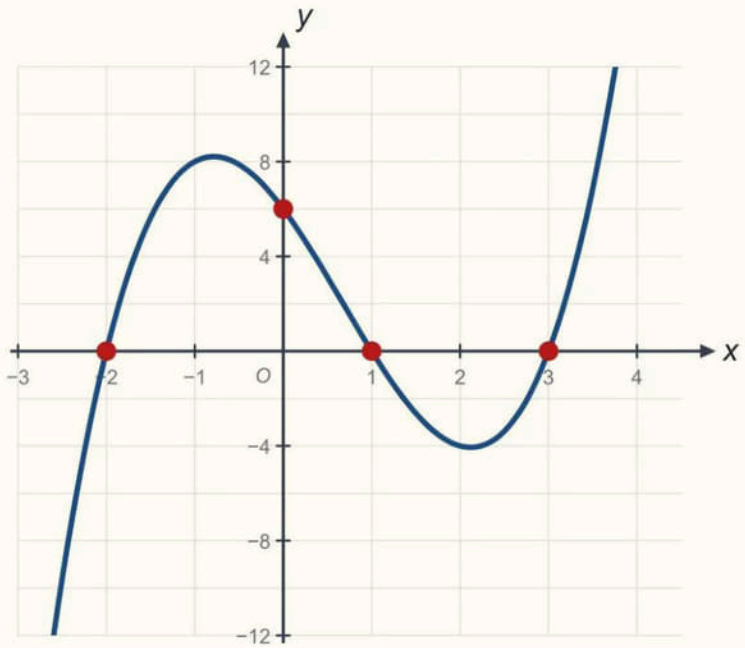
☐ A. $L(x) = -0{,}02x^3 + x^2 + 30x - 500$
☐ B. Saat memproduksi 10 unit, usaha itu untung Rp120.000,00.
☐ C. Sisa pembagian $L(x)$ oleh $(x - 20)$ sama dengan laba saat memproduksi 20 unit.
☐ D. Laba saat memproduksi 20 unit adalah Rp340.000,00.
☐ E. $2B(x)$ menyatakan biaya untuk memproduksi $2x$ unit kursi.

15. Diketahui $(x + 2)$ adalah faktor suku banyak $f(x) = x^3 + px^2 - 4x - 12$.
Akar-akar lain persamaan $f(x) = 0$ adalah ....

A. 2 dan -3
B. -2 dan 3
C. 2 dan 3
D. -2 dan -3
E. 3 dan -4

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

16. Gambar berikut adalah grafik suku banyak $f(x)$ berderajat tiga. Grafik memotong sumbu X di $x = -2, x = 1$, dan $x = 3$, serta memotong sumbu Y di $(0, 6)$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

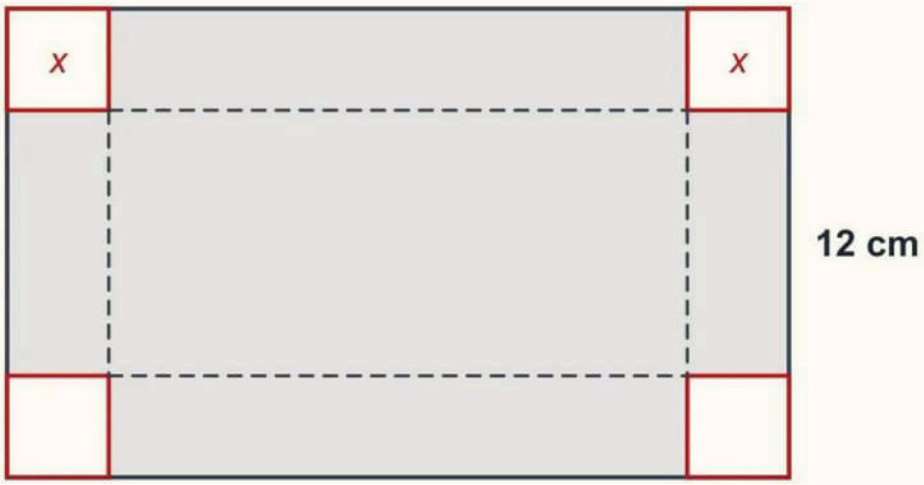


Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
☐ B. $f(x)$ habis dibagi $x^2 - x - 6$.
☐ C. Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x - 2)$ adalah 4.
☐ D. Jumlah ketiga akar $f(x) = 0$ sama dengan 2.
☐ E. $f(x) < 0$ untuk setiap x dengan $1 < x < 3$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

17. Dari selembar seng berukuran 20 cm × 12 cm, dipotong persegi bersisi x cm di keempat pojoknya, lalu sisinya dilipat menjadi kotak tanpa tutup. Volume kotak itu harus 192 cm^3 dan x bilangan bulat.
Ukuran alas kotak itu adalah ....



sisi dilipat ke atas pada garis putus-putus (gambar tidak berskala)

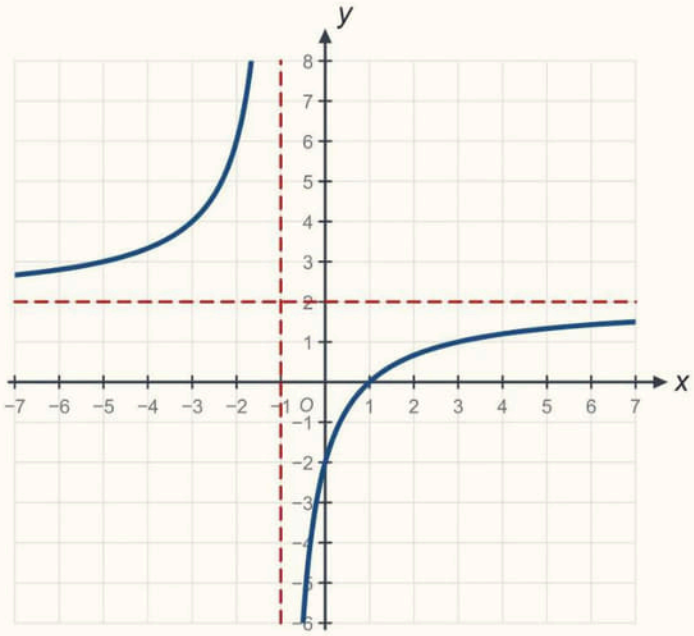
A. 16 cm × 8 cm
B. 18 cm × 10 cm
C. 12 cm × 4 cm
D. 14 cm × 6 cm
E. 10 cm × 2 cm

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

18. Gambar berikut adalah grafik fungsi $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+1}$ beserta kedua asimtotnya (garis putus-putus).

Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Daerah hasil (range) f adalah semua bilangan real kecuali 1.	○	○
Grafik f memotong sumbu Y di titik $(0, -2)$.	○	○
Untuk setiap $x > -1$, nilai $f(x)$ kurang dari 2.	○	○

19. Diketahui $f(x) = \sqrt{x-1}$ dan $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

Domain fungsi $(g \circ f)(x)$ adalah ....

A. $\{x \mid x \geq 1,\ x \neq 3\}$
B. $\{x \mid x \geq 1,\ x \neq 4\}$
C. $\{x \mid x > 1,\ x \neq 10\}$
D. $\{x \mid x \neq 3\}$
E. $\{x \mid x \geq 1,\ x \neq 10\}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

20. Banyak kutu daun pada tanaman cabai di sebuah rumah kaca diamati setiap pekan. Pertumbuhannya mengikuti fungsi eksponen $N(t) = N_0 \cdot a^{t/k}$ yang grafiknya seperti pada gambar (t dalam pekan).
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Banyak kutu daun menjadi dua kali lipat setiap 3 pekan.	○	○
Pada $t = 1{,}5$ pekan, banyak kutu daun tepat 300 ekor.	○	○
Jika pola itu berlanjut, pada pekan ke-9 banyak kutu daun 1.600 ekor.	○	○

21. Harga sebuah sepeda motor bekas pada awal 2026 adalah Rp20.000.000,00 dan setiap tahun turun 10% dari harga tahun sebelumnya. Harga sepeda motor itu pertama kali kurang dari Rp10.000.000,00 setelah .... tahun (gunakan $\log 2 \approx 0{,}301$ dan $\log 0{,}9 \approx -0{,}0458$)

A. 6
B. 7
C. 5
D. 8
E. 10

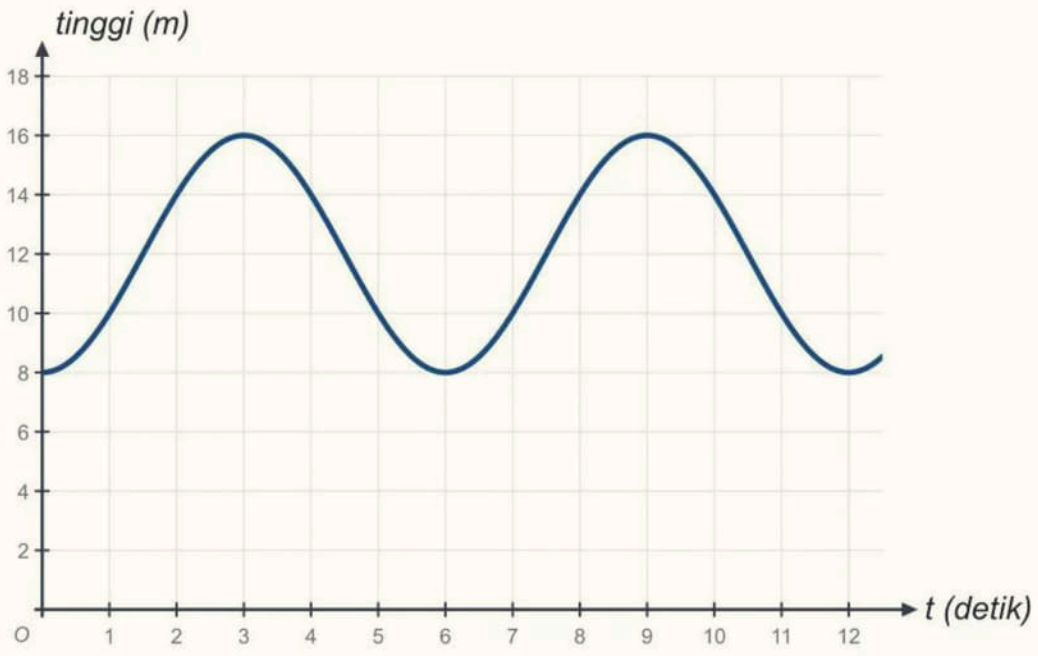
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

22. Diketahui fungsi $f(x) = {}^{2}\log(x+4) - 1$.
Pernyataan yang benar tentang f adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Grafik f mempunyai asimtot tegak dengan persamaan $x = 4$.
☐ B. Domain fungsi f adalah $x > -4$.
☐ C. Nilai fungsi di $x = 12$ adalah $f(12) = 4$.
☐ D. Grafik f memotong sumbu X di $(-2, 0)$.
☐ E. Grafik f memotong sumbu Y di $(0, 1)$.

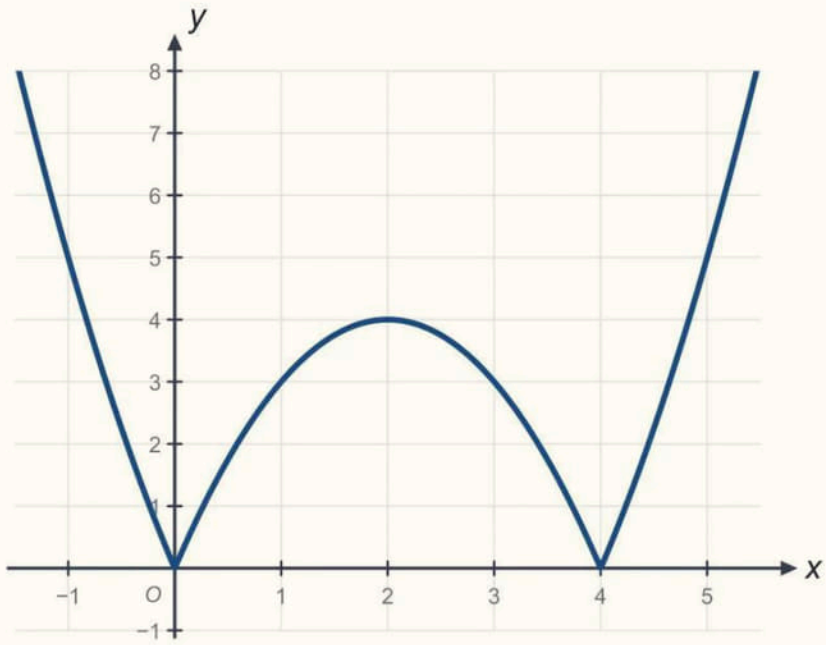
23. Grafik berikut menunjukkan ketinggian ujung sebuah bilah kincir angin dari tanah selama 12 detik pertama, dengan model $y = a - b\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, t dalam detik dan y dalam meter.
Selama $0 \le t \le 12$, lama ujung bilah itu berada **lebih tinggi** dari 14 m adalah .... detik



A. 2
B. 3
C. 6
D. 8
E. 4

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

24. Gambar berikut adalah grafik fungsi $y = |x^2 - 4x|$.
Banyak penyelesaian persamaan $|x^2 - 4x| = 3$ adalah ....



A. 2
B. 3
C. 0
D. 4
E. 1

25. Suhu ruang server sebuah sekolah (°C) dimodelkan dengan $T(t) = 22 + 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, dengan t jam setelah pukul 06.00.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Suhu tertinggi ruang server adalah 25 °C.
☐ B. Periode perubahan suhu adalah 6 jam.
☐ C. Suhu mencapai 23,5 °C pertama kali pukul 07.00.
☐ D. Suhu terendah, yaitu 19 °C, tercapai pukul 12.00.
☐ E. Dalam satu periode, suhu berada di atas 23,5 °C selama 4 jam.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tabel skor dan anjuran

Sub bab / subtopik	Nomor soal	Benar	Jika kurang separuh benar
Sub bab 1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks	1, 2, 3	___ / 3	Ulangi hlm. 8
Sub bab 1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3	4, 5, 6	___ / 3	Ulangi hlm. 25
Sub bab 1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks	7, 8, 9	___ / 3	Ulangi hlm. 39
Sub bab 1.4 · Program linear	10, 11	___ / 2	Ulangi hlm. 55
Sub bab 1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa	12, 13, 14	___ / 3	Ulangi hlm. 77
Sub bab 1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial	15, 16, 17	___ / 3	Ulangi hlm. 94
Sub bab 1.7 · Domain, range, dan grafik fungsi polinom, rasional, dan akar	18, 19	___ / 2	Ulangi hlm. 112
Sub bab 1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks	20, 21, 22	___ / 3	Ulangi hlm. 128
Sub bab 1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri	23, 24, 25	___ / 3	Ulangi hlm. 147

Skor 70 % atau lebih: lanjut ke bab berikutnya. Skor 50–69 %: ulangi sub bab pada tabel yang kurang dari separuh benar. Skor di bawah 50 %: baca ulang bab ini dari awal. (Angka ini anjuran belajar, bukan prediksi nilai TKA.)

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bab 2 · Geometri dan Pengukuran

MATTL-B2

Setelah mempelajari bab ini, kamu dapat:

- memakai vektor untuk posisi, jarak, dan perbandingan
- menulis persamaan lingkaran dan garis singgungnya
- menghitung luas dan keliling bagian lingkaran pada benda nyata
- menentukan bayangan titik, garis, dan kurva oleh transformasi dan komposisinya

Peta bab

Sub bab	Judul
2.1	Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan
2.2	Hasil kali skalar dan sudut dua vektor
2.3	Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis
2.4	Garis singgung lingkaran
2.5	Luas dan keliling bagian lingkaran
2.6	Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi
2.7	Matriks transformasi dan komposisi

Bab 2 di LMS

Buka seluruh latihan bab ini di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-B2

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan

MATTL-2.1

◎ APA YANG DIUJI

Di TKA, vektor jarang muncul sebagai "hitunglah $\vec{a} + \vec{b}$". Vektor dipakai untuk **menyatakan posisi dan perpindahan**: titik sudut bangun datar, lintasan kereta, letak katup pada pipa, atau posisi drone. Kamu diminta menghitung panjang, mencari titik yang belum diketahui, dan membandingkan jarak.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-12	Menentukan vektor-vektor diagonal yang terdapat pada suatu ruang berbentuk balok	22,38 %
SA-13	Menentukan hasil operasi nilai-nilai parameter pembentuk vektor-vektor yang berelasi dalam bangun segiempat	31,71 %
SA-14	Menganalisis lintasan yang panjang vektornya memenuhi kriteria tertentu menggunakan konsep perbandingan vektor	27,14 %

Ketiga angka itu berada di bawah sepertiga. Artinya, dari setiap 10 peserta, hanya 2 atau 3 yang menjawab benar. Hitungannya sebenarnya pendek. Kesalahan yang paling mungkin terjadi pada tiga hal: **menulis vektor dari dua titik** (urutan pengurangan), **menerjemahkan sifat bangun** (sejajar, sama kaki) ke bahasa vektor, dan **memakai perbandingan** (titik pembagi, jarak sebanding waktu).

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menulis vektor posisi dan vektor $\overrightarrow{AB}$ dari koordinat dua titik, di bidang maupun di ruang;
- menghitung panjang vektor, jarak dua titik, dan vektor satuan;
- memakai penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar untuk mencari titik sudut jajargenjang atau trapesium;
- menentukan titik yang membagi ruas garis dengan perbandingan $m : n$, di dalam maupun di luar ruas;
- menghitung jarak pada gerak lurus berkecepatan tetap dengan prinsip "jarak sebanding waktu";
- menilai beberapa pernyataan sekaligus (PG kompleks atau Benar/Salah) tentang vektor dalam konteks.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Vektor posisi dan vektor dari dua titik

Vektor adalah besaran yang mempunyai **panjang** dan **arah**. Vektor digambar sebagai anak panah dari titik pangkal ke titik ujung. Di bidang, vektor ditulis dengan dua komponen. Di ruang, vektor ditulis dengan tiga komponen (x, y, z).

Vektor posisi titik A adalah vektor dari titik asal O ke A. Vektor posisi titik $A(1, -2, 3)$ ditulis $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

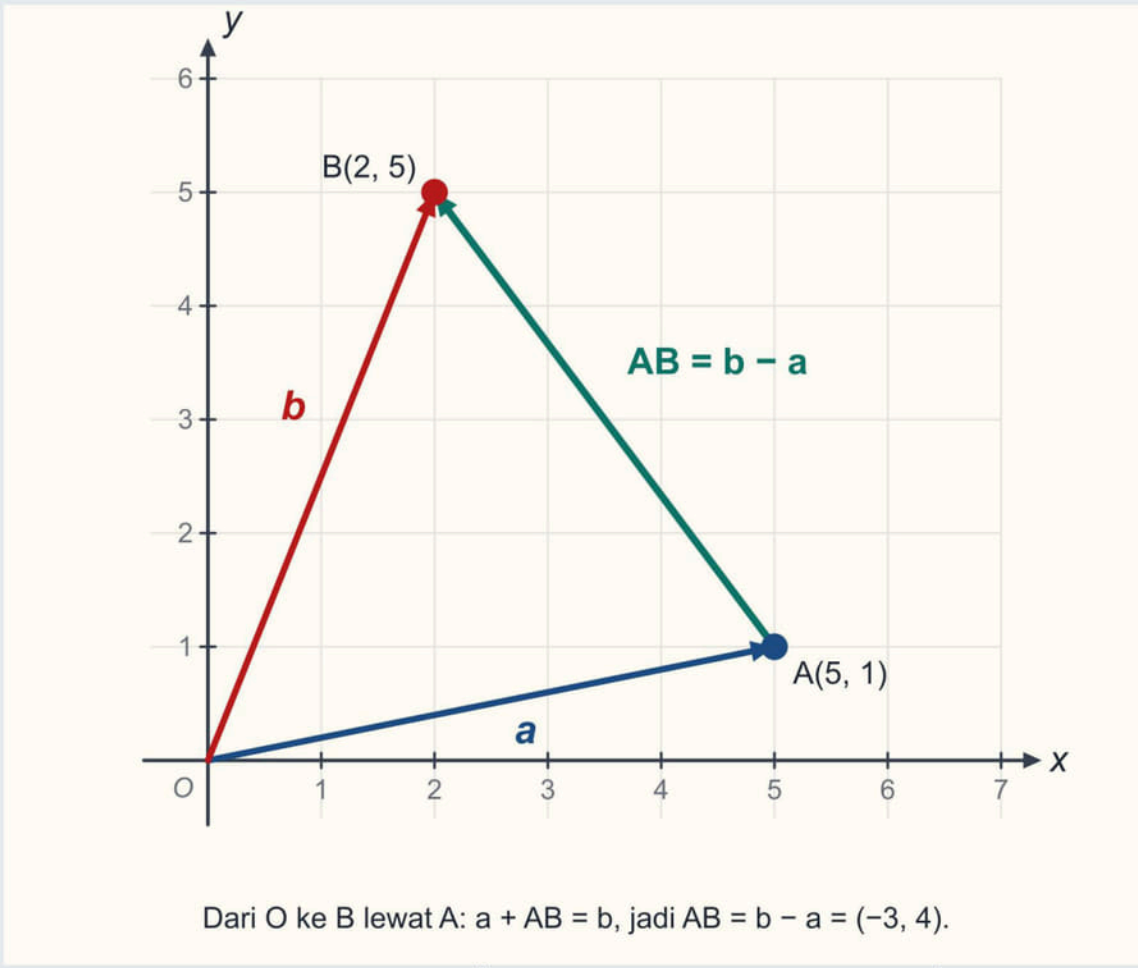
Komponen vektor posisi sama persis dengan koordinat titiknya. Vektor kolom dan vektor baris $(1, -2, 3)$ artinya sama; soal TKA memakai keduanya.

Vektor dari titik A ke titik B. Untuk berjalan dari O ke B, kamu boleh lewat A: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Jadi

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

Ingat dengan kalimat: **ujung dikurangi pangkal**. Vektor $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ sama panjang dengan $\overrightarrow{AB}$, tetapi arahnya berlawanan. Gambar 2.1 memperlihatkan segitiga O, A, B yang menjadi dasar rumus itu.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



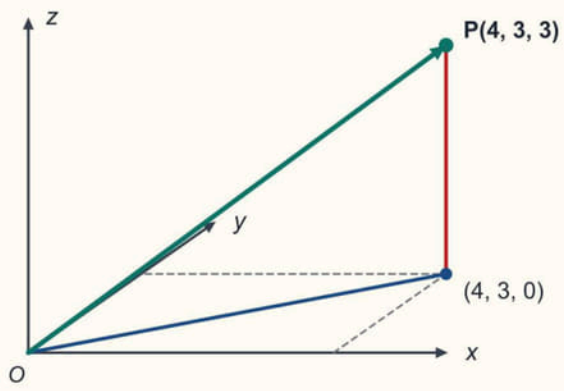
Gambar 2.1 Vektor posisi $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ serta $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Untuk $A(5,1)$ dan $B(2,5)$, $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ dan panjangnya $\sqrt{9+16} = 5$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Panjang vektor. Panjang (besar) vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ diperoleh dari teorema Pythagoras dua kali, yaitu sekali di alas lalu sekali ke atas (lihat Gambar 2.2):

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Di bidang, suku z^2 dihapus. **Jarak titik A ke B** sama dengan $|\overrightarrow{AB}|$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Langkah 1 (di alas, biru):
√(4² + 3²) = 5

Langkah 2 (naik, merah):
√(5² + 3²) = √34

|OP| = √(x² + y² + z²)
= √(16 + 9 + 9) = √34

Gambar 2.2 Titik $P(4,3,3)$ di ruang. Dari O ke $(4,3,0)$ di alas panjangnya $\sqrt{4^2+3^2}=5$; lalu naik 3 satuan, sehingga $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{4^2+3^2+3^2}=\sqrt{34}$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 1: vektor dan jaraknya

Diketahui $A(1,-2,3)$ dan $B(3,4,0)$. Tentukan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, dan jarak AB.

Penyelesaian. Ujung dikurangi pangkal:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-(-2) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jaraknya $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$ satuan. Perhatikan tanda pada komponen kedua: $4-(-2) = 6$, bukan 2.

2. Operasi vektor dan sifat bangun datar

- **Penjumlahan dan pengurangan:** jumlahkan atau kurangkan komponen yang seletak.
- **Aturan segitiga:** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Huruf "tengah" yang sama (B) seolah-olah habis.
- **Perkalian skalar:** $k\vec{v}$ berarti setiap komponen dikalikan k. Bila $k > 0$, arahnya sama dengan $\vec{v}$. Bila $k < 0$, arahnya berlawanan. Panjangnya menjadi $|k|$ kali.
- **Kesamaan vektor:** dua vektor sama bila semua komponennya sama, artinya **sama panjang dan searah**, di mana pun letaknya.
- **Sejajar:** $\vec{u}$ sejajar $\vec{v}$ bila $\vec{u} = k\vec{v}$ untuk suatu bilangan k. Tiga titik A, B, C **segaris** bila $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Satu peringatan penting: panjang jumlah **tidak** sama dengan jumlah panjang. Umumnya $|\vec{u}+\vec{v}| \neq |\vec{u}| + |\vec{v}|$. Keduanya sama hanya bila $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ searah. Pada soal gaya, **resultan** (gaya total) adalah jumlah vektornya, bukan jumlah besarnya.

Sifat bangun datar sekarang dapat ditulis dalam bahasa vektor:

Bangun	Sifat	Bahasa vektor
Jajargenjang $ABCD$	sisi berhadapan sejajar dan sama panjang	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ dan $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
Jajargenjang $ABCD$	diagonal	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
Jajargenjang $ABCD$	diagonal saling membagi dua	titik tengah AC = titik tengah BD
Trapesium $ABCD$ ($AB \parallel DC$)	sisi sejajar	$\overrightarrow{DC} = k\,\overrightarrow{AB}$ dengan $k > 0$
Trapesium sama kaki	kaki sama panjang, tetapi **tidak** sejajar	$\lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ dan $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AD}$

Titik tengah AB adalah $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, yaitu rata-rata koordinat kedua titik.

Contoh terselesaikan 2: titik keempat jajargenjang

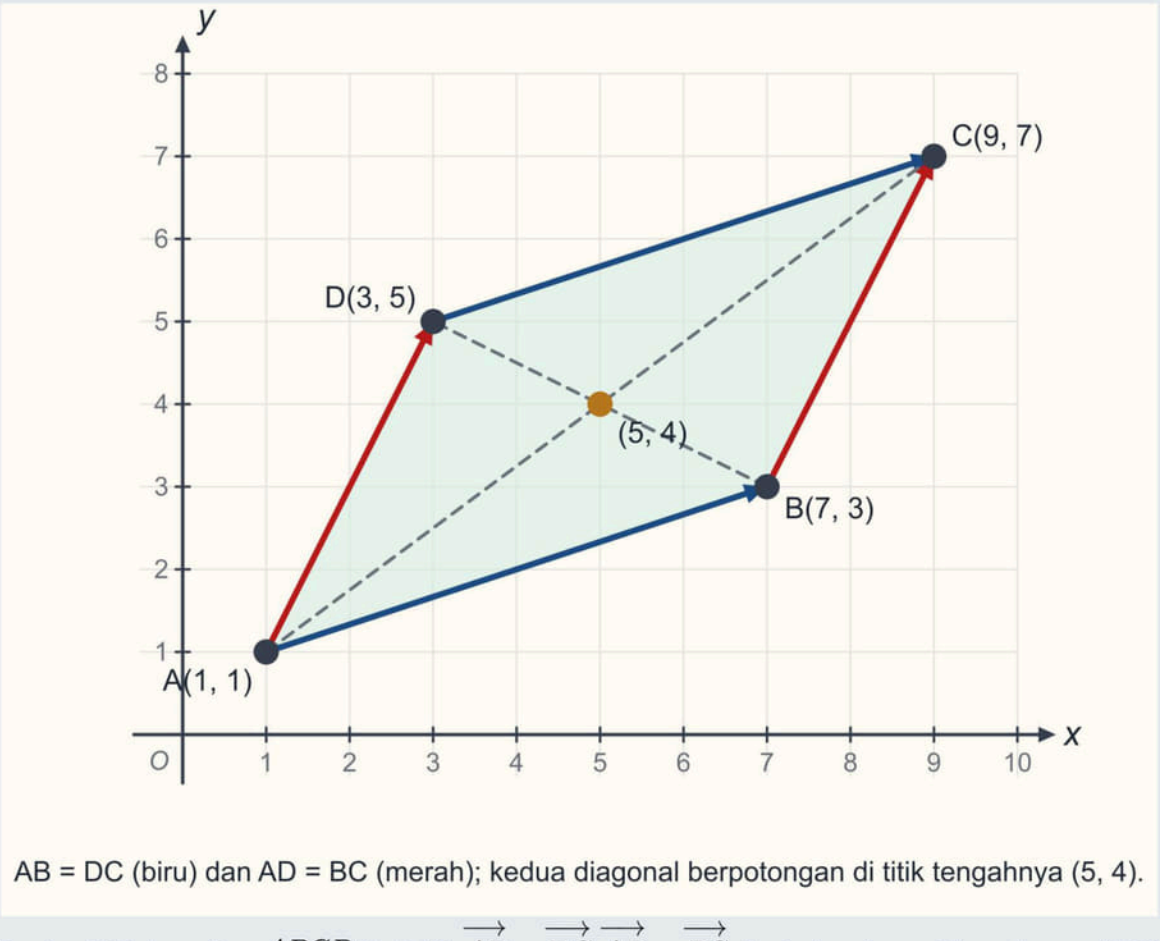
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Jajargenjang $ABCD$ mempunyai $A(1,1)$, $B(7,3)$, dan $D(3,5)$. Tentukan titik C, panjang kedua diagonal, dan titik potong diagonal.

Penyelesaian. Dari $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ diperoleh $\vec{c} = \vec{d} + (\vec{b} - \vec{a})$:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Jadi $C(9,7)$. Cek dengan aturan diagonal: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (6,2) + (2,4) = (8,6)$, dan memang $C = A + (8,6) = (9,7)$. Jajargenjangnya digambar pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Jajargenjang $ABCD$ Contoh 2: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, dan kedua diagonal berpotongan di titik tengahnya $(5,4)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Panjang diagonal: $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{64 + 36} = 10$ dan $|\overrightarrow{BD}| = |(-4,2)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Titik tengah AC adalah $(5,4)$ dan titik tengah BD juga $(5,4)$. Itulah titik potong diagonal.

Contoh terselesaikan 3: trapesium sama kaki

Trapesium sama kaki $ABCD$ mempunyai $A(1,1)$, $B(9,1)$, $D(3,5)$, dengan $AB \parallel DC$ dan $AD = BC$. Jika $\overrightarrow{BC} = (a,b)$, tentukan $a + b$.

Penyelesaian. Karena $DC \parallel AB$ dan AB mendatar, titik C setinggi D, yaitu $y = 5$. Trapesium sama kaki simetris terhadap garis tegak yang melalui tengah AB, yaitu $x = 5$. Titik D berada 2

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

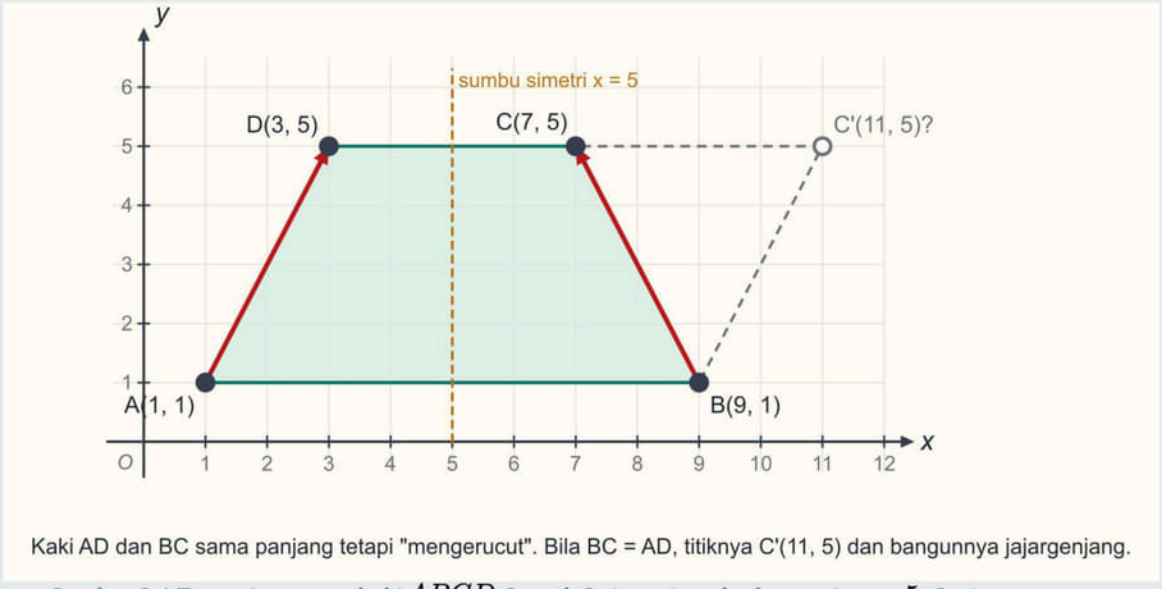
satuan di kanan A, maka C berada 2 satuan di kiri B: $C(7, 5)$.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-9 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi $a + b = -2 + 4 = 2$. Cek: $|\overrightarrow{AD}|^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ dan $|\overrightarrow{BC}|^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$.

Kedua kaki sama panjang. $\overrightarrow{DC} = (4, 0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, jadi sejajar.

Jebakan yang perlu kamu kenali: bila kamu menulis $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (2, 4)$, kamu memperoleh $C(11, 5)$ dan $a + b = 6$. Syarat "kaki sama panjang" memang terpenuhi, tetapi bangunnya menjadi **jajargenjang**, bukan trapesium sama kaki. Kaki trapesium sama kaki sama panjang, tetapi arahnya "mengerucut", tidak sejajar. Bandingkan kedua kemungkinan itu pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Trapesium sama kaki $ABCD$ Contoh 3 simetris terhadap garis $x = 5$. Garis putus-putus menunjukkan jebakan $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ yang menghasilkan $C'(11, 5)$ dan sebuah jajargenjang. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Panjang yang memuat parameter dan vektor satuan

Bila komponen vektor memuat parameter (misalnya m), syarat panjang menghasilkan **persamaan kuadrat**. Biasanya ada dua nilai m. Keduanya harus kamu periksa: apakah keduanya memenuhi semua syarat soal?

Contoh terselesaikan 4: panjang bernilai parameter

Diketahui $A(1, 0, 2)$ dan vektor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} m-2 \\ m-2 \\ m+1 \end{pmatrix}$$

dengan $|\overrightarrow{AB}| = 9$. Komponen ketiga $\overrightarrow{AB}$ positif (titik B lebih tinggi daripada A). Tentukan m dan koordinat B.

Penyelesaian. Kuadratkan kedua ruas agar akarnya hilang:

$$(m-2)^2 + (m-2)^2 + (m+1)^2 = 81$$

Jabarkan: $2(m^2 - 4m + 4) + (m^2 + 2m + 1) = 3m^2 - 6m + 9$. Jadi $3m^2 - 6m + 9 = 81$, atau $3m^2 - 6m - 72 = 0$. Bagi 3:

$$m^2 - 2m - 24 = 0 \;\Rightarrow\; (m-6)(m+4) = 0 \;\Rightarrow\; m = 6 \text{ atau } m = -4$$

Cek kedua nilai. Untuk $m = 6$: $\overrightarrow{AB} = (4, 4, 7)$, panjangnya $\sqrt{16 + 16 + 49} = 9$. Untuk $m = -4$: $\overrightarrow{AB} = (-6, -6, -3)$, panjangnya $\sqrt{36 + 36 + 9} = 9$. Keduanya memenuhi syarat panjang, tetapi hanya $m = 6$ yang komponen ketiganya positif. Jadi $m = 6$ dan $B = A + \overrightarrow{AB} = (5, 4, 9)$.

Pelajaran dari contoh ini: bila soal **tidak** memberi syarat tambahan, jawabannya memang "$m = 6$ atau $m = -4$". Pilihan jawaban sering memuat pasangan dengan tanda tertukar (misalnya "-6 atau 4"), yaitu hasil salah tanda saat memfaktorkan. Cegah dengan memasukkan kembali setiap nilai ke rumus panjang.

Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya 1. Vektor satuan searah $\vec{v}$ adalah

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Vektor satuan dipakai untuk "memberi arah" pada besaran yang panjangnya sudah diketahui. Misalnya, sebuah drone terbang dengan laju 12 m/s searah vektor $(2, 1, -2)$. Panjang $(2, 1, -2)$ adalah $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. Vektor kecepatannya $12 \cdot \frac{1}{3}(2, 1, -2) = (8, 4, -8)$ m/s. Komponen ketiga negatif berarti drone itu turun 8 m setiap detik.

4. Titik pada ruas garis dan titik pembagi $m : n$

Setiap titik P pada **garis** AB dapat ditulis

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$\vec{p} = \vec{a} + t\,\overrightarrow{AB}$$

dengan t bilangan real. Nilai t menunjukkan "berapa bagian dari perjalanan A ke B" yang sudah ditempuh:

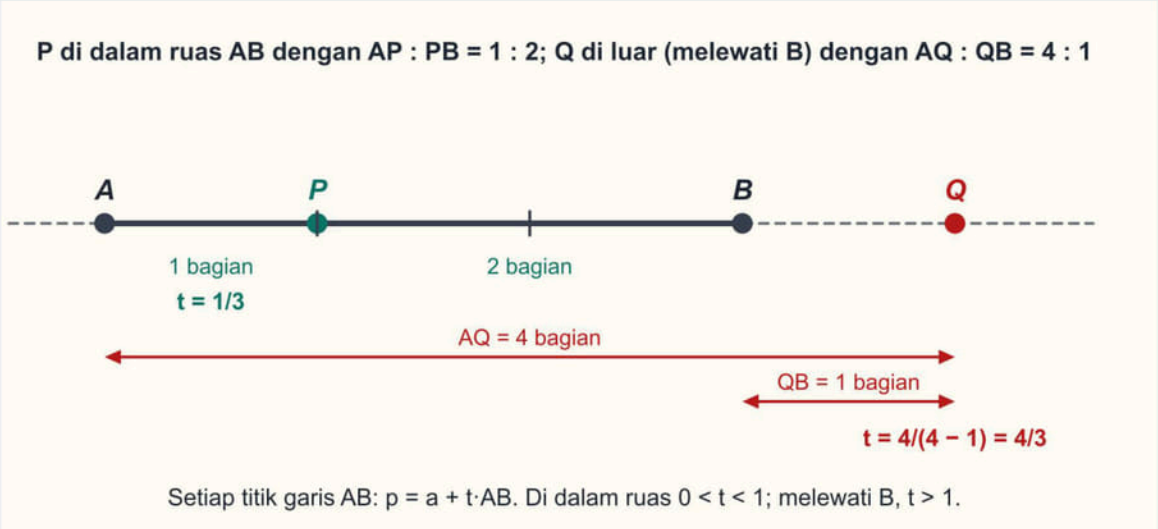
Nilai t	Letak P
$t = 0$	di A
$0 < t < 1$	di antara A dan B (pada ruas)
$t = 1$	di B
$t > 1$	di perpanjangan, melewati B
$t < 0$	di perpanjangan, sebelum A

Pembagian di dalam. Bila P pada ruas AB dengan $AP : PB = m : n$, ruas AB terbagi menjadi $m + n$ bagian dan AP mengambil m bagian. Jadi $t = \frac{m}{m+n}$. Bila disederhanakan, diperoleh rumus yang sering ditulis di buku:

$$\vec{p} = \frac{n\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m + n}$$

Perhatikan bahwa $\vec{a}$ dikalikan n (angka yang **jauh** darinya), bukan m. Cara t lebih aman karena tidak perlu menghafal susunan ini.

Dari mana rumus itu? Masukkan $t = \frac{m}{m+n}$ ke $\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$: $\vec{p} = \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b} = \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}$. Jadi rumus "silang" itu hanyalah bentuk lain dari $\vec{a} + t\,\overrightarrow{AB}$. Gambar 2.5 memperlihatkan bagian-bagian ruas untuk pembagian di dalam dan di luar.



Gambar 2.5 Titik P membagi ruas AB di dalam dengan $AP : PB = 1 : 2$ ($t = \frac{1}{3}$); titik Q membagi di luar dengan $AQ : QB = 4 : 1$ ($t = \frac{4}{3}$). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembagian di luar. Bila P di perpanjangan AB melewati B dengan $AP : PB = m : n$ (dengan $m > n$), maka AP lebih panjang daripada AB. Karena $AB = AP - PB$, ruas AB setara dengan $m - n$ bagian. Jadi $t = \frac{m}{m-n}$, dan

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{b} - n\,\vec{a}}{m - n}$$

Bila soal berbentuk Benar/Salah, kamu cukup memakai t lalu mengecek panjang AP dan PB.

Memeriksa apakah sebuah titik terletak pada ruas. Hitung t dari **setiap** komponen. Titik terletak pada garis AB hanya bila ketiga nilai t itu sama. Titik terletak pada **ruas** (bukan hanya pada garis) bila nilai t yang sama itu juga memenuhi $0 \le t \le 1$.

Contoh terselesaikan 5: pembagian di dalam dan di luar

Diketahui $A(-1, 2, 4)$ dan $B(5, -4, 1)$.

(a) Tentukan P pada ruas AB dengan $AP : PB = 1 : 2$.

(b) Tentukan Q pada perpanjangan AB melewati B dengan $AQ : QB = 4 : 1$.

(c) Apakah titik $(3, -2, 3)$ terletak pada ruas AB?

Penyelesaian. Langkah awal: $\overrightarrow{AB} = (6, -6, -3)$ dan $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9$.

(a) $AP : PB = 1 : 2$ berarti $t = \frac{1}{3}$ (bukan $\frac{1}{2}$):

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Cek dengan rumus: $\frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(3, 0, 9) = (1, 0, 3)$. Hasilnya sama.

(b) $AQ : QB = 4 : 1$ di luar berarti $t = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cek panjang: $AQ = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$ dan $QB = 12 - 9 = 3$. Perbandingannya $12 : 3 = 4 : 1$. Benar.

(c) Dari komponen x: $-1 + 6t = 3$, jadi $t = \frac{2}{3}$. Dari komponen y: $2 - 6t = -2$, jadi $t = \frac{2}{3}$. Dari komponen z: $4 - 3t = 3$, jadi $t = \frac{1}{3}$. Nilai t tidak sama, jadi titik itu **tidak** terletak pada garis AB, apalagi pada ruasnya. Dua komponen yang cocok belum cukup.

5. Gerak lurus dengan kecepatan tetap: jarak sebanding waktu

Benda yang bergerak **lurus** dengan **kecepatan tetap** menempuh jarak yang sama setiap menit. Akibatnya, jarak yang ditempuh **sebanding** dengan waktunya. Bila perjalanan dari A ke E memerlukan waktu total T, posisi setelah w menit adalah

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{w}{T}\overrightarrow{AE}$$

dan jarak yang sudah ditempuh adalah $\frac{w}{T}\,|\overrightarrow{AE}|$. Ini sama dengan titik pembagi pada bagian 4, hanya saja t sekarang berupa **perbandingan waktu**.

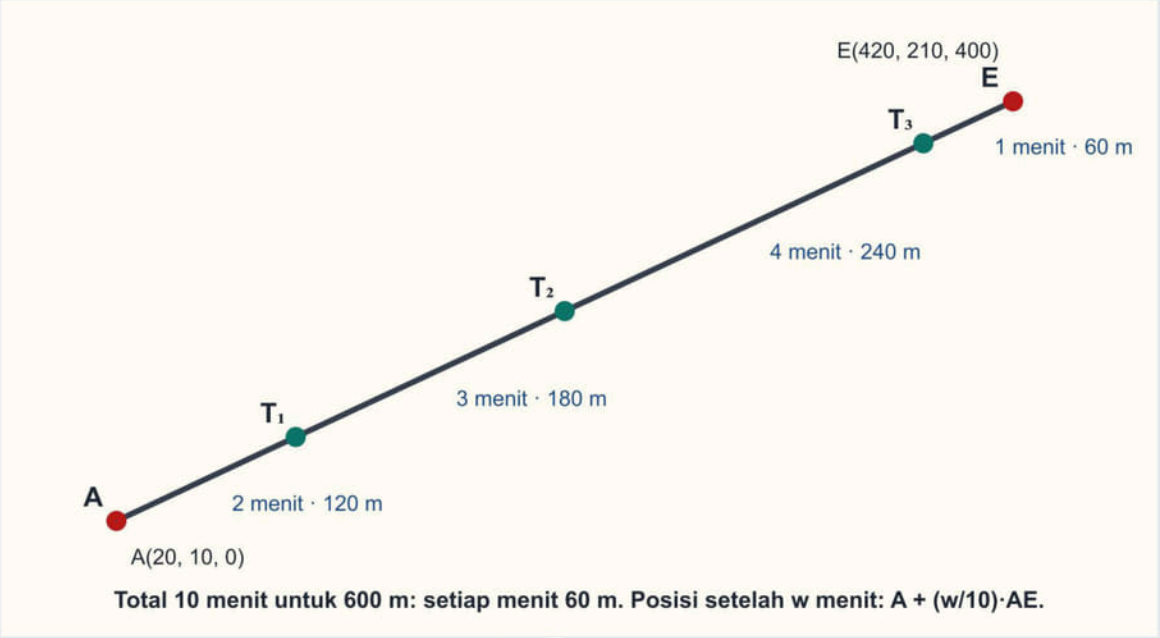
Dua hal yang sering terlupa:

1. **Dua titik yang tidak bersebelahan:** waktunya dijumlahkan dulu. Jarak C ke E memakai waktu $C \to D$ ditambah waktu $D \to E$.
2. **Membandingkan dengan sebuah batas tanpa kalkulator:** bila $|\overrightarrow{AE}|$ berbentuk akar, kuadratkan kedua ruas ketaksamaan. Karena kedua ruas positif, arah tanda ketaksamaan tidak berubah.

Contoh terselesaikan 6: kereta gantung (menilai pernyataan)

Sebuah kereta gantung wisata bergerak lurus dengan kecepatan tetap dari stasiun bawah $A(20, 10, 0)$ ke stasiun atas $E(420, 210, 400)$. Satuan koordinat meter dan sumbu z menyatakan ketinggian. Kereta melewati tiang T_1, T_2, dan T_3 secara berurutan. Waktu tempuh $A \to T_1, T_1 \to T_2, T_2 \to T_3$, dan $T_3 \to E$ berturut-turut 2, 3, 4, dan 1 menit. (Data disusun untuk contoh.)

Penyelesaian. $\overrightarrow{AE} = (400, 200, 400)$ dan $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{160.000 + 40.000 + 160.000} = \sqrt{360.000} = 600$ m. Waktu total $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ menit, jadi kereta menempuh 60 m setiap menit. Jarak tiap ruas: $AT_1 = 120$ m, $T_1T_2 = 180$ m, $T_2T_3 = 240$ m, dan $T_3E = 60$ m. Pembagian lintasan itu digambar pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Lintasan lurus kereta gantung dari A ke E. Karena kecepatannya tetap, panjang tiap ruas sebanding dengan waktu tempuhnya. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Titik T_1 dicapai setelah 2 dari 10 menit, jadi $t = \frac{2}{10}$:

$$\overrightarrow{OT_1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{10}\begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Pernyataan	Nilai	Alasan
Kecepatan kereta gantung 1 m/s	Benar	60 m per menit = 60 m per 60 detik = 1 m/s
Koordinat tiang T_1 adalah $(80, 40, 80)$	Salah	$(80, 40, 80)$ adalah $\overrightarrow{AT_1}$. Posisi T_1 = A + vektor itu = $(100, 50, 80)$
Jarak T_1 ke T_3 lebih dari 400 m	Benar	waktunya $3 + 4 = 7$ menit, jaraknya $7 \times 60 = 420$ m
Jarak T_2 ke T_3 lebih dari 250 m	Salah	$4 \times 60 = 240$ m
Ketinggian kereta bertambah 40 m setiap menit	Benar	komponen z naik 400 m dalam 10 menit

Pernyataan kedua adalah pengecoh yang paling sering menjebak: **vektor perpindahan** belum sama dengan **posisi**. Posisi baru selalu "posisi awal + perpindahan".

Contoh terselesaikan 7: membandingkan jarak berbentuk akar

Sebuah drone survei terbang lurus dengan kecepatan tetap dari $P(1, 1, 1)$ ke $Q(5, 3, 2)$ (satuan km) dalam 6 menit. Berapa menit (bilangan bulat) paling lama sejak berangkat agar jarak tempuhnya masih kurang dari 3 km?

Penyelesaian. $\overrightarrow{PQ} = (4, 2, 1)$, jadi $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$ km. Setelah w menit, jarak tempuhnya $\frac{w}{6}\sqrt{21}$. Syaratnya:

$$\frac{w}{6}\sqrt{21} < 3 \;\Leftrightarrow\; w\sqrt{21} < 18 \;\Leftrightarrow\; 21w^2 < 324 \;\Leftrightarrow\; w^2 < 15{,}4\ldots$$

Bilangan bulat terbesar yang memenuhi adalah $w = 3$ (karena $3^2 = 9$, sedangkan $4^2 = 16$ sudah terlalu besar). Cek dengan desimal: setelah 3 menit jaraknya $\approx 2{,}29$ km, setelah 4 menit $\approx 3{,}06$ km. Jadi jawabannya 3 menit. Teknik kuadrat ini persis yang diperlukan pada soal kereta di bagian bedah soal asli.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal vektor

1. **Tulis koordinat semua titik yang diketahui**, lalu tentukan titik mana yang dicari. Bila ada gambar, salin label titiknya.
2. **Bentuk vektor dengan "ujung dikurangi pangkal".** Tulis dulu $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, baru isi

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

angkanya. Kurung angka negatif agar tandanya tidak hilang.

3. **Terjemahkan kata-kata ke bahasa vektor:** "sejajar" → kelipatan; "sama kaki" → panjang sama; "jajargenjang" → vektor sama; "membagi $m : n$" → $t = \frac{m}{m+n}$; "kecepatan tetap" → t = perbandingan waktu.
4. **Hitung secukupnya.** Bila yang ditanya hanya panjang, tidak perlu mencari koordinat. Bila yang ditanya posisi, jangan lupa menambahkan posisi titik pangkal.
5. **Periksa setiap jawaban yang muncul.** Persamaan kuadrat memberi dua nilai; titik pembagi harus memberi perbandingan yang benar; titik pada ruas harus memberi t yang sama di semua komponen.
6. **Untuk PG kompleks atau Benar/Salah, nilai setiap pernyataan secara terpisah.** Gunakan kuadrat untuk membandingkan jarak berbentuk akar dengan suatu batas.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Urutan pengurangan terbalik	$\overrightarrow{AB}$ ditulis $\vec{a} - \vec{b}$, sehingga semua tanda terbalik	Ucapkan "ujung dikurangi pangkal" setiap kali menulis vektor
Perpindahan dianggap posisi	Koordinat titik ditulis sama dengan $\frac{w}{T}\overrightarrow{AE}$ (pengecoh Contoh 6)	Posisi = posisi pangkal + perpindahan
Salah tanda saat memfaktorkan	$m^2 - 2m - 24 = 0$ difaktorkan menjadi $(m + 6)(m - 4)$	Masukkan kembali setiap nilai m ke rumus panjang
Memilih m tanpa syarat	Kedua nilai diambil padahal soal mensyaratkan komponen positif, atau sebaliknya	Baca ulang semua syarat setelah persamaan kuadrat selesai
$AP : PB = 1 : 2$ dianggap $t = \frac{1}{2}$	Titik tengah dipakai sebagai titik pembagi	$t = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{3}$
Pembagian dalam dan luar tertukar	Rumus $\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ dipakai untuk titik di perpanjangan	Gambar dulu letak titiknya; untuk luar $t = \frac{m}{m-n}$
Pasangan titik tidak bersebelahan	Jarak CE dihitung dengan waktu $D \to E$ saja	Jumlahkan semua waktu di antara kedua titik
Jumlah panjang dianggap panjang jumlah	Resultan gaya 3 N dan 4 N yang saling tegak lurus dianggap 7 N (padahal 5 N)	Jumlahkan vektornya dulu, baru hitung panjangnya
Trapesium sama kaki dikira jajargenjang	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ dipakai sebagai syarat "sama kaki"	Sama kaki = sama **panjang**, bukan vektor sama; pakai simetri
"Pada garis" dikira "pada ruas"	Titik dengan $t < 0$ atau $t > 1$ dianggap terletak pada pipa	Cek $0 \le t \le 1$ dan t sama di semua komponen

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

• BEDAH SOAL ASLI

Soal pertama (SA-12) hanya dijawab benar oleh 22,38 % peserta. Polanya sama dengan Contoh terselesaikan 4: panjang vektor diketahui, komponennya memuat m. Kesulitannya ada di aljabar: menjabarkan $(m+3)^2$ dengan benar, lalu memfaktorkan tanpa salah tanda. Pilihan jawaban sengaja memuat pasangan bertanda terbalik. Periksa kedua nilai m yang kamu peroleh dengan memasukkannya kembali.

►. Diketahui vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2m \\ m+3 \\ m \end{pmatrix}$.

Jika $|\vec{AB}| = 9$ satuan panjang, maka nilai m yang memenuhi adalah ....

A. -4 atau -3
B. -4 atau 3
C. -3 atau 4
D. 3 atau 4
E. 4 atau -4

Pembahasan **Kunci: B**

Rumus panjang vektor: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Langkah 1 – Kuadratkan.
$(2m)^2 + (m+3)^2 + m^2 = 81$

Langkah 2 – Jabarkan.
$4m^2 + m^2 + 6m + 9 + m^2 = 81 \Rightarrow 6m^2 + 6m - 72 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 12 = 0.$

Langkah 3 – Faktorkan. $(m+4)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -4$ atau $m = 3$.

Cek ulang:

• $m = 3$: $\vec{AB} = (6, 6, 3)$, panjang $\sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9$ ✓

• $m = -4$: $\vec{AB} = (-8, -1, -4)$, panjang $\sqrt{64+1+16} = 9$ ✓

Analisis pilihan: C muncul dari salah tanda saat memfaktorkan ($(m-4)(m+3)$); A, D, E tidak memenuhi panjang 9 (mis. $m = 4$: $\sqrt{64+49+16} = \sqrt{129}$).

Jawaban: B.

Soal berikutnya (SA-13) dijawab benar oleh 31,71 % peserta. Polanya sama dengan Contoh terselesaikan 3. Gambarnya tidak diberikan, jadi kamu harus membuat sketsa sendiri dari A, $\overrightarrow{AB}$, dan $\overrightarrow{AD}$. Kuncinya ada di dua kata: **trapesium** (sisi DC sejajar AB, jadi C setinggi D) dan **sama kaki** (simetris terhadap garis tengah AB). Setelah C diketahui, $\overrightarrow{BC}$ adalah ujung dikurangi pangkal. Jangan lupa koefisien 2 pada $2b$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Diketahui trapesium sama kaki $ABCD$ dengan $AD = BC$ dan titik $A(0,0)$. Vektor-vektor pembentuk trapesium adalah $\vec{AD} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{AB} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$, dan $\vec{BC} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Nilai dari $a^2 + 2b = \ldots$

A. 5
B. 7
C. 9
D. 10
E. 13

Pembahasan **Kunci: C**

Langkah 1 – Koordinat titik. $A(0,0)$, $B(6,0)$, $D(1,4)$.

Langkah 2 – Titik C. Pada trapesium $ABCD$, $DC \parallel AB$ sehingga C setinggi D ($y = 4$). Karena sama kaki, kaki BC adalah cerminan AD terhadap sumbu simetri $x = 3$. D berjarak 1 satuan ke kanan dari A, maka C berjarak 1 satuan ke kiri dari B: $C(5,4)$.

Langkah 3 – Vektor $\vec{BC}$. $\vec{BC} = C - B = \begin{pmatrix}5-6\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, jadi $a = -1, b = 4$.

Langkah 4. $a^2 + 2b = 1 + 8 = 9$.

Cek ulang: $|\vec{BC}| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} = |\vec{AD}|$ ✓ dan $\vec{DC} = (4,0) \parallel \vec{AB}$ ✓.

Analisis pilihan:
- 5 ✗: lupa mengalikan b dengan 2 ($1 + 4$).
- 7, 10, 13 ✗: berasal dari koordinat C yang keliru. Selalu cek $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$ dan $DC \parallel AB$.

Jawaban: C.

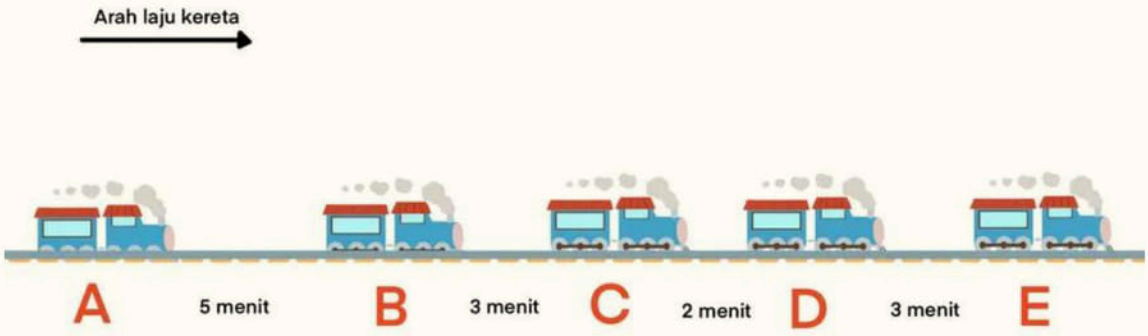
Soal ketiga (SA-14) dijawab benar oleh 27,14 % peserta. Soal ini memadukan tiga hal: panjang vektor di ruang, jarak sebanding waktu (bagian 5), dan perbandingan dengan batas 3,5 km. Panjang $\overrightarrow{AE}$ berbentuk akar, jadi pakai teknik kuadrat dari Contoh 7. Perhatikan pilihan CE: kedua stasiun itu tidak bersebelahan, sehingga waktunya harus dijumlahkan. Kerjakan dulu sebelum membaca pembahasannya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah kereta api melaju dengan kecepatan konstan pada lintasan lurus dari stasiun A sampai stasiun E. Koordinat stasiun A dan E (dalam km) berturut-turut adalah $(2, 3, 5)$ dan $(11, 6, 8)$. Gambar menunjukkan waktu tempuh (dalam menit) kereta tersebut antarstasiun.

Pasangan stasiun manakah yang jaraknya kurang dari 3,5 km?

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. AB
☐ B. BC
☐ C. CD
☐ D. DE
☐ E. CE

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: B, C, D**

Konsep: karena kecepatan konstan dan lintasan lurus, jarak antarstasiun sebanding dengan waktu tempuhnya (perbandingan vektor pada satu garis).

Langkah 1 – Panjang $\vec{AE}$. $\vec{AE} = (11-2, 6-3, 8-5) = (9, 3, 3)$

$|\vec{AE}| = \sqrt{81+9+9} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11} \approx 9{,}95$ km

Langkah 2 – Total waktu. $5+3+2+3 = 13$ menit, jadi setiap menit kereta menempuh $\dfrac{\sqrt{99}}{13} \approx 0{,}765$ km.

Langkah 3 – Jarak tiap pasangan.

- AB (5 menit): $\frac{5}{13}\sqrt{99} \approx 3{,}83$ km ✗
- BC (3 menit): $\approx 2{,}30$ km ✓
- CD (2 menit): $\approx 1{,}53$ km ✓
- DE (3 menit): $\approx 2{,}30$ km ✓
- CE (2 + 3 = 5 menit): $\approx 3{,}83$ km ✗

Cek tanpa desimal: jarak $< 3{,}5 \iff \frac{w}{13}\sqrt{99} < 3{,}5 \iff w^2 \cdot 99 < 3{,}5^2 \cdot 169 = 2.070{,}25 \iff w^2 < 20{,}9 \iff w \le 4$ menit. Jadi hanya pasangan dengan waktu ≤ 4 menit: BC, CD, DE ✓.

Jebakan: CE bukan stasiun bersebelahan; waktunya $2+3=5$ menit, bukan 3 menit.

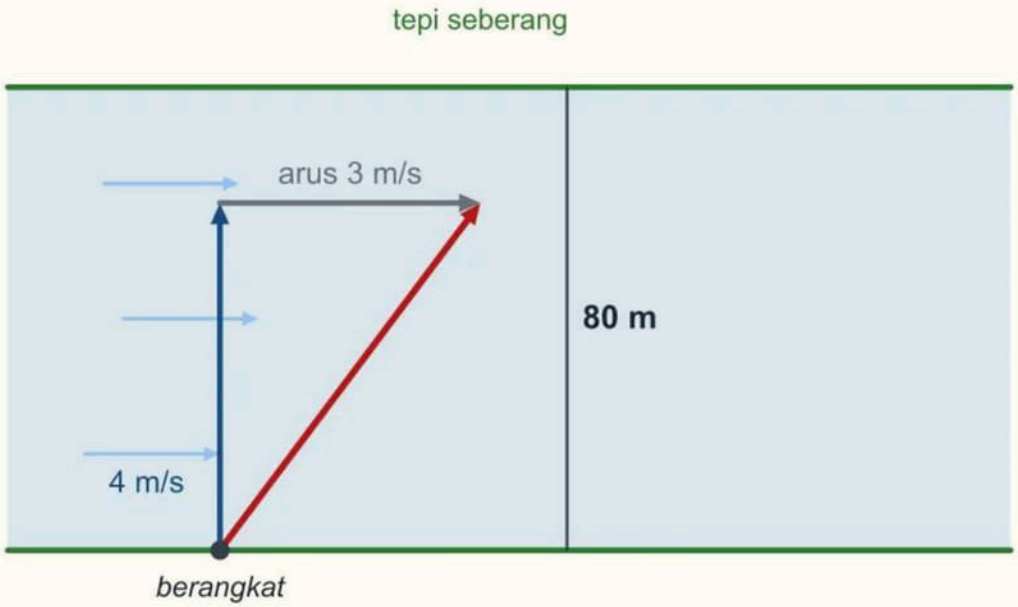
Jawaban: BC, CD, dan DE.

BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memakai penjumlahan vektor kecepatan. Ikuti langkah 1–6 di atas: tulis kedua vektor kecepatan dalam komponen, jumlahkan, lalu pisahkan komponen yang menentukan waktu menyeberang dan komponen yang menentukan pergeseran.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah perahu menyeberangi sungai selebar 80 m. Mesin perahu memberi kecepatan 4 m/s tegak lurus tepi sungai (relatif terhadap air), sedangkan arus sungai 3 m/s sejajar tepi (lihat gambar).
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Kecepatan perahu terhadap tepi sungai adalah 5 m/s.
☐ B. Perahu tiba di seberang setelah 16 detik.
☐ C. Perahu terbawa arus sejauh 60 m dari titik tepat di seberang titik berangkat.
☐ D. Jarak lurus yang ditempuh perahu adalah 100 m.
☐ E. Tanpa arus sungai, perahu akan tiba di seberang lebih cepat.

Pembahasan **Kunci: A, C, D**

Konsep: kecepatan terhadap tepi = jumlah vektor kecepatan perahu relatif air dan kecepatan arus. Komponen tegak lurus tepi menentukan waktu menyeberang; komponen sejajar tepi menentukan pergeseran.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — resultan $(3, 4)$ mempunyai panjang $\sqrt{9 + 16} = 5$.
- B ✗ — yang membawa perahu menyeberang hanya komponen 4 m/s: $\frac{80}{4} = 20$ detik. *Jebakan:* membagi 80 dengan 5.
- C ✓ — $3 \cdot 20 = 60$ m.
- D ✓ — perpindahan $(60, 80)$, panjangnya $\sqrt{3.600 + 6.400} = 100$ m.
- E ✗ — waktu menyeberang tetap $\frac{80}{4} = 20$ detik; arus hanya menggeser tempat tiba.

Jawaban: A, C, dan D.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: waktu menyeberang hanya ditentukan komponen yang **tegak lurus** tepi (4 m/s), sehingga arus tidak memperlambat penyeberangan; arus hanya menggeser tempat tiba sejauh 60 m. Pengecoh 16 detik muncul bila lebar sungai dibagi laju resultan 5 m/s. Jarak lurus 100 m dihitung dari vektor perpindahan $(60, 80)$, bukan dengan menjumlahkan 60 dan 80.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci, dan tulis dulu koordinat semua titik serta vektor yang terlibat.

1. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ q \end{pmatrix}$, dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Jika $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, nilai $p + q$ adalah ....

A. -8
B. 9
C. -2
D. -5
E. -7

2. Sebuah drone pemetaan terbang lurus dari titik $P(1, 2, 5)$ ke titik $Q(7, 10, 5)$, lalu turun tegak lurus ke titik $R(7, 10, 0)$ di tanah. Satuan koordinat adalah 10 meter.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

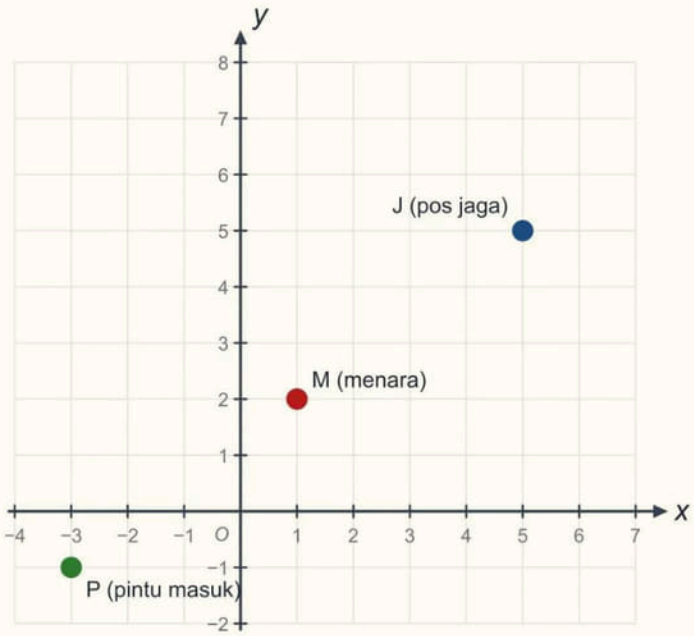
☐ A. $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.
☐ B. Jarak P ke Q adalah 140 meter.
☐ C. Jarak lurus dari P ke R adalah $5\sqrt{5}$ satuan.
☐ D. Titik tengah lintasan dari P ke Q adalah $(3, 4, 5)$.
☐ E. Panjang seluruh lintasan $P \to Q \to R$ adalah 150 meter.

3. Titik $A(1, -2, 3)$, $B(3, 0, -1)$, dan $C(k, 4, m)$ terletak pada satu garis lurus.
Nilai $k + m$ adalah ....

A. 22
B. 0
C. 7
D. -9
E. -2

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. Pada peta berpetak sebuah taman nasional (1 satuan = 100 m), pintu masuk berada di titik P, menara pengawas di M, dan pos jaga di J, seperti pada gambar.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Jarak pintu masuk ke menara pengawas adalah 500 m.

☐ B. Menara pengawas terletak tepat di tengah ruas garis dari pintu masuk ke pos jaga.

☐ C. $\vec{MJ} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

☐ D. Titik Q dengan $\vec{PQ} = \frac{1}{4}\vec{PJ}$ adalah $(-1, 1)$.

☐ E. Vektor satuan searah $\vec{PJ}$ adalah $\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

5. Segitiga ABC mempunyai titik sudut $A(2, 1, -1)$, $B(4, -3, 5)$, dan $C(0, 5, 2)$. Titik G adalah titik berat segitiga itu.

Panjang vektor $\vec{OG}$ adalah ....

A. 9
B. 3
C. $\sqrt{5}$
D. $\sqrt{14}$
E. 5

Kunci singkat: 1. D 2. A, C, E 3. E 4. A, B, E 5. B

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Dapatkah kamu menjelaskan mengapa $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, bukan $\vec{a} - \vec{b}$, dengan memakai aturan segitiga?
- Bila $AP : PB = 2 : 3$, berapa nilai t untuk titik P di dalam ruas? Bagaimana bila P di perpanjangan melewati B dengan $AP : PB = 3 : 2$?
- Pada soal gerak berkecepatan tetap, apakah kamu sudah menjumlahkan waktu untuk titik yang tidak bersebelahan dan menambahkan posisi awal saat mencari koordinat?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 2.1: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-2.1

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 2.2 · Hasil kali skalar dan sudut dua vektor

MATTL-2.2

◎ APA YANG DIUJI

Hasil kali skalar (disebut juga *hasil kali titik* atau *dot product*) adalah alat untuk menjawab pertanyaan tentang **sudut**: apakah dua batang saling tegak lurus, apakah sudutnya lancip atau tumpul, berapa kosinus sudut antara dua diagonal sebuah balok, dan seberapa besar bagian sebuah gaya yang searah dengan gerak.

Soal asli TKA 2025 belum memuat soal yang khusus menguji hasil kali skalar. Namun, kisi-kisi resmi mencantumkan **operasi vektor** di bidang dan ruang, dan hasil kali skalar termasuk operasi itu. Di paket prediksi, materi ini muncul dalam soal bangun ruang (diagonal balok), soal gaya, dan soal titik terdekat. Hasil kali skalar juga dipakai lagi di sub bab lingkaran: rumus jarak titik ke garis berasal dari proyeksi.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menghitung hasil kali skalar dengan rumus komponen dan memahami artinya secara geometri;
- menentukan kosinus sudut dua vektor serta menyimpulkan tegak lurus, lancip, atau tumpul dari tandanya;
- mencari parameter agar dua vektor tegak lurus atau membentuk sudut tertentu;
- menghitung proyeksi skalar dan proyeksi vektor dalam konteks;
- memasang sistem koordinat pada balok atau kubus untuk menghitung sudut antardiagonal;
- menilai beberapa pernyataan sekaligus tentang sudut dan panjang vektor.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Dua rumus untuk satu nilai

Untuk $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, hasil kali skalar didefinisikan sebagai

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Kalikan komponen yang seletak, lalu **jumlahkan**. Hasilnya sebuah **bilangan** (skalar), bukan vektor. Itulah asal namanya.

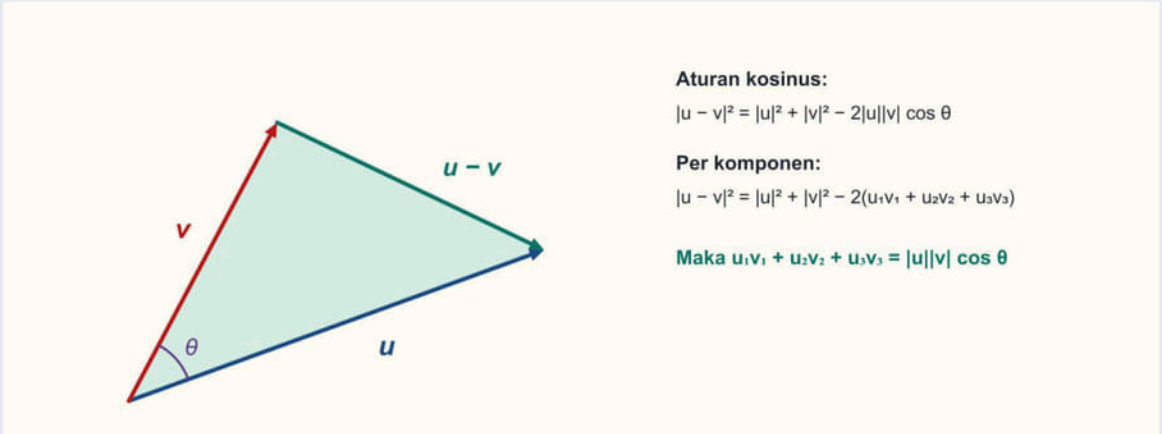
Apa yang diukur hasil kali skalar? Bayangkan dua orang menarik sebuah gerobak. Bila keduanya menarik ke arah yang sama, tarikan saling membantu penuh. Bila arahnya tegak lurus, tarikan yang satu sama sekali tidak membantu gerak ke arah yang lain. Hasil kali skalar mengukur **seberapa searah** dua vektor, dikalikan panjang keduanya. Itulah sebabnya dalam fisika usaha sebuah gaya ditulis $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$: hanya bagian gaya yang searah perpindahan yang menghasilkan usaha.

Untuk vektor satuan sumbu, $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, berlaku $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ (searah, panjang 1) dan $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ (saling tegak lurus). Bila $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ dan $\vec{v}$ ditulis serupa, menjabarkan $\vec{u} \cdot \vec{v}$ suku demi suku menyisakan hanya pasangan yang searah, yaitu $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Inilah alasan rumus komponen di atas.

Nilai yang sama juga dapat dihitung dari panjang dan sudut. Bila θ adalah sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ (dengan $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$), maka

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

Mengapa kedua rumus sama? Bentuk segitiga dengan sisi $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{u} - \vec{v}$. Aturan kosinus memberi $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$. Bila ruas kiri dijabarkan per komponen, diperoleh $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$. Bandingkan kedua bentuk itu, maka $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$. Segitiga yang dipakai dalam penurunan ini tampak pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{u} - \vec{v}$ membentuk segitiga. Aturan kosinus pada segitiga itu, dibandingkan dengan perhitungan per komponen, menghasilkan $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Gabungan kedua rumus memberi rumus sudut:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Sifat yang sering dipakai:

1. $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$. Panjang vektor dapat dicari dari hasil kali skalar dengan dirinya sendiri.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ dan $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.
3. $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
4. $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$. Sifat ini berguna bila yang diketahui hanya panjang dan sudut, bukan komponen (misalnya pada segi enam atau jajargenjang).

Contoh terselesaikan 1: sudut dua vektor

Tentukan sudut antara $\vec{u} = (2, 1, -2)$ dan $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

Penyelesaian. Hasil kali skalarnya $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 = 3$. Panjangnya $|\vec{u}| = \sqrt{4+1+4} = 3$ dan $|\vec{v}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$. Maka

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \theta = 45^\circ$$

Perhatikan bahwa panjang selalu memakai akar. Bila akarnya lupa ditulis, pembaginya menjadi $9\cdot 2 = 18$ dan nilai kosinusnya salah.

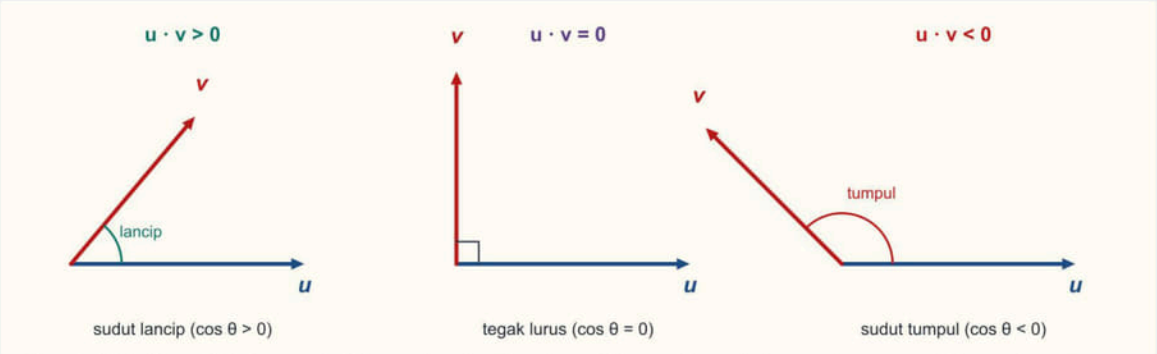
2. Tanda hasil kali skalar menentukan jenis sudut

Karena $|\vec{u}|$ dan $|\vec{v}|$ selalu positif, tanda $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sama dengan tanda $\cos\theta$:

$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\cos\theta$	Sudut
positif	positif	lancip ($0^\circ \le \theta < 90^\circ$)
nol	nol	siku-siku: $\vec{u}$ **tegak lurus** $\vec{v}$
negatif	negatif	tumpul ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) atau tepat berlawanan arah
sama dengan $-\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert$	-1	tepat 180°: berlawanan arah

Baris terakhir penting. Hasil kali negatif **tidak** berarti berlawanan arah. Berlawanan arah hanya terjadi bila $\cos\theta = -1$, yaitu bila $\vec{u} = k\vec{v}$ dengan $k < 0$. Ketiga keadaan tanda digambarkan pada Gambar 2.8.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.8 Hasil kali skalar positif berarti sudut lancip, nol berarti tegak lurus, dan negatif berarti sudut tumpul. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Sudut antara vektor dan sumbu koordinat juga dapat dibaca dengan cara ini. Sumbu Z positif diwakili $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Hasil kali $\vec{u} \cdot \vec{k}$ sama dengan komponen ketiga $\vec{u}$. Jadi sudut $\vec{u}$ dengan sumbu Z positif tumpul tepat ketika komponen ketiganya negatif.

Contoh terselesaikan 2: mencari parameter

Diketahui $\vec{u} = (p, 2, 3)$ dan $\vec{v} = (2, p, -4)$. Tentukan p agar (a) $\vec{u}$ tegak lurus $\vec{v}$; (b) sudut antara keduanya tumpul.

Penyelesaian. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2p + 2p - 12 = 4p - 12$.

(a) Tegak lurus: $4p - 12 = 0$, jadi $p = 3$. Cek: $\vec{u} = (3, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 3, -4)$, dan $6 + 6 - 12 = 0$.

(b) Tumpul: $4p - 12 < 0$, jadi $p < 3$. Masih perlu dicek: apakah ada p yang membuat kedua vektor tepat berlawanan arah? Bila $\vec{u} = k\vec{v}$, komponen ketiga memberi $3 = -4k$, jadi $k = -\frac{3}{4}$. Komponen pertama memberi $p = 2k = -\frac{3}{2}$. Komponen kedua memberi $2 = kp = -\frac{3}{4}p$, jadi $p = -\frac{8}{3}$. Dua nilai p itu tidak sama, jadi kedua vektor tidak pernah berlawanan arah. Jawabannya: sudut tumpul untuk semua $p < 3$.

3. Proyeksi: "bagian" sebuah vektor yang searah vektor lain

Bayangkan cahaya datang tegak lurus pada $\vec{v}$. Bayangan $\vec{u}$ di atas $\vec{v}$ disebut **proyeksi** $\vec{u}$ pada $\vec{v}$.

- **Proyeksi skalar** (panjang proyeksi, bertanda) $\vec{u}$ pada $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

- **Proyeksi vektor** $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ (searah $\vec{v}$):

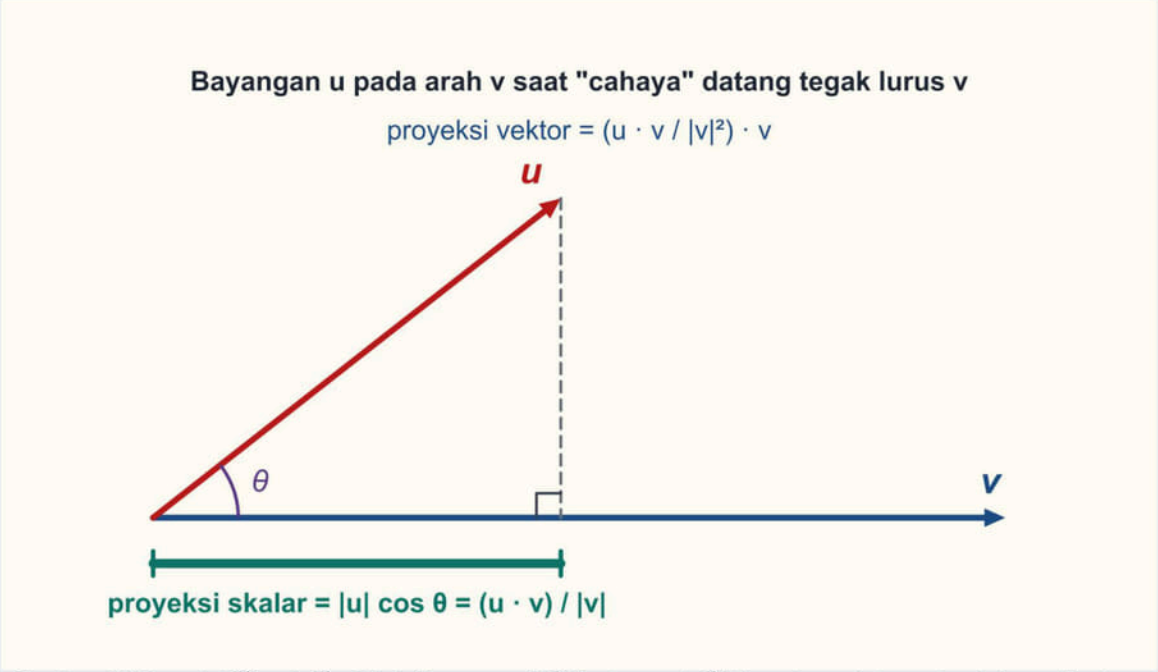
$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$$

Rumus ini berasal dari $|\vec{u}|\cos\theta$, yaitu sisi samping segitiga siku-siku yang sisi miringnya $|\vec{u}|$. Kalimat kuncinya: **proyeksi pada $\vec{v}$ dibagi panjang $\vec{v}$**. Vektor yang "menerima bayangan" adalah pembaginya. Bila hasil kalinya negatif, proyeksi skalarnya negatif, artinya bayangannya mengarah berlawanan dengan $\vec{v}$.

Mengapa proyeksi vektor dibagi $|\vec{v}|^2$? Proyeksi vektor harus searah $\vec{v}$ dan panjangnya sama

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

dengan proyeksi skalar. Vektor yang searah $\vec{v}$ dan panjangnya 1 adalah $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (sub bab 2.1). Kalikan vektor satuan itu dengan panjang yang diinginkan: $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v}$. Jadi satu faktor $|\vec{v}|$ berasal dari proyeksi skalar, dan satu lagi dari vektor satuan (Gambar 2.9).



Gambar 2.9 Proyeksi $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ adalah "bayangan" $\vec{u}$ di atas garis $\vec{v}$ bila cahaya datang tegak lurus. Panjang bayangan itu $|\vec{u}|\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 3: usaha dan komponen gaya

Sebuah kotak didorong dengan gaya $\vec{F} = (10, 5, -2)$ newton sehingga berpindah sejauh $\vec{s} = (3, 4, 0)$ meter. (Data disusun untuk contoh.) Usaha dalam fisika adalah $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Tentukan usaha, besar komponen gaya yang searah perpindahan, dan proyeksi vektornya.

Penyelesaian. Usahanya $W = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 = 50$ joule. Panjang perpindahan $|\vec{s}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ m. Komponen gaya searah perpindahan adalah proyeksi skalar $\vec{F}$ pada $\vec{s}$:

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{50}{5} = 10 \text{ N}$$

Proyeksi vektornya $\frac{50}{25}(3, 4, 0) = (6, 8, 0)$ N. Cek: panjangnya $\sqrt{36 + 64} = 10$ N, sama dengan proyeksi skalar. Besar gaya total $|\vec{F}| = \sqrt{129} \approx 11{,}36$ N lebih besar daripada 10 N. Hal ini masuk akal, karena hanya sebagian gaya yang searah gerak.

Titik terdekat. Titik C pada garis AB yang paling dekat ke titik O adalah titik yang membuat $\overrightarrow{OC}$ **tegak lurus** $\overrightarrow{AB}$. Alasannya: untuk titik lain pada garis itu, jaraknya ke O menjadi sisi miring sebuah segitiga siku-siku, jadi lebih panjang. Caranya: tulis $C = A + t\,\overrightarrow{AB}$ (sub bab 2.1), lalu selesaikan $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Misalnya, untuk $A(4, 0, 0)$ dan $B(0, 4, 0)$: $\overrightarrow{AB} = (-4, 4, 0)$ dan $C = (4 - 4t, 4t, 0)$. Syarat tegak lurus memberi $-4(4 - 4t) + 4 \cdot 4t = 32t - 16 = 0$, jadi $t = \frac{1}{2}$ dan $C(2, 2, 0)$. Jarak terdekatnya $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

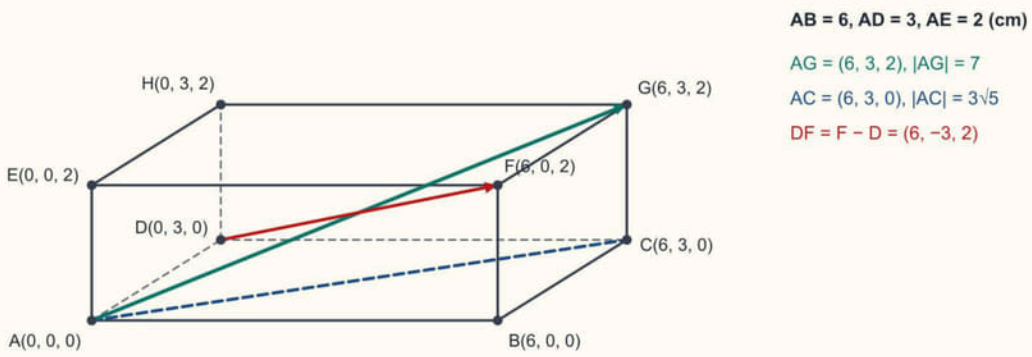
4. Sudut dalam bangun ruang: pasang koordinat dulu

Soal balok atau kubus menjadi mudah bila kamu memasang sistem koordinat. Untuk balok $ABCD.EFGH$ (alas $ABCD$, rusuk tegak AE, BF, CG, DH):

1. Letakkan A di $(0, 0, 0)$.
2. Sumbu x sepanjang AB, sumbu y sepanjang AD, sumbu z sepanjang AE.
3. Bila $AB = p$, $AD = q$, dan $AE = r$, maka $B(p, 0, 0)$, $C(p, q, 0)$, $D(0, q, 0)$, $E(0, 0, r)$, $F(p, 0, r)$, $G(p, q, r)$, $H(0, q, r)$.

Setelah itu, setiap diagonal adalah "ujung dikurangi pangkal". Panjang diagonal ruang $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ langsung keluar dari rumus panjang vektor. Gambar 2.10 memperlihatkan balok Contoh 4 lengkap dengan koordinat kedelapan titik sudutnya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.10 Balok $ABCD.EFGH$ dengan A di titik asal, $AB = 6$, $AD = 3$, dan $AE = 2$. Diagonal ruang $\overrightarrow{AG}$, diagonal alas $\overrightarrow{AC}$, dan diagonal ruang $\overrightarrow{DF}$ dihitung sebagai "ujung dikurangi pangkal". Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 4: diagonal balok

Balok $ABCD.EFGH$ mempunyai $AB = 6$ cm, $AD = 3$ cm, dan $AE = 2$ cm. Tentukan (a) kosinus sudut antara diagonal ruang AG dan diagonal alas AC; (b) kosinus sudut antara $\overrightarrow{AG}$ dan $\overrightarrow{DF}$.

Penyelesaian. Dengan koordinat di atas: $\overrightarrow{AG} = (6, 3, 2)$ dengan panjang $\sqrt{36 + 9 + 4} = 7$, dan $\overrightarrow{AC} = (6, 3, 0)$ dengan panjang $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

(a) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = 36 + 9 + 0 = 45$. Maka

$$\cos\theta = \frac{45}{7 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{15}{7\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \approx 0{,}958$$

(b) $D(0,3,0)$ dan $F(6,0,2)$, jadi $\overrightarrow{DF} = F - D = (6, -3, 2)$, dengan panjang 7. Komponen kedua negatif karena koordinat y titik F (yaitu 0) lebih kecil daripada koordinat y titik D (yaitu 3). $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DF} = 36 - 9 + 4 = 31$, jadi

$$\cos\theta = \frac{31}{7 \cdot 7} = \frac{31}{49}$$

Untuk **kubus**, sudut antara dua diagonal ruang selalu memenuhi $\cos\theta = \frac{1}{3}$. Cek dengan kubus bersisi 1: $(1,1,1) \cdot (1,-1,1) = 1$ dan kedua panjangnya $\sqrt{3}$, jadi $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

Catatan: soal kadang menanyakan sudut antara dua **garis**, bukan dua vektor. Sudut antara dua garis selalu diambil yang lancip. Bila hasil kosinusnya negatif, ambil nilai mutlaknya. Bila soal menyebut vektor dengan arah tertentu, misalnya $\overrightarrow{AG}$ dan $\overrightarrow{BH}$, pakai hasilnya apa adanya.

Contoh terselesaikan 5: sudut segitiga dari koordinat

Diketahui $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, dan $C(0,0,1)$. Tentukan besar sudut BAC dan jenis segitiga ABC.

Penyelesaian. Sudut BAC adalah sudut antara $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$; keduanya harus **berpangkal di A**.

1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 1, 0)$ dan $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 0, 1)$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 0 + 0 = 1$, sedangkan $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$.
3. $\cos\angle BAC = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, jadi $\angle BAC = 60^\circ$.

Karena $|\overrightarrow{BC}| = |(0,-1,1)| = \sqrt{2}$ juga, ketiga sisinya sama panjang: segitiga ABC sama sisi, dan ketiga sudutnya 60°, cocok dengan hasil hitungan. Jebakan yang sering terjadi adalah

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

memakai $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{AC}$ (pangkalnya berbeda). Hasil kalinya menjadi -1, kosinusnya $-\frac{1}{2}$, dan sudutnya keliru menjadi 120°, yaitu sudut pelurus dari sudut yang benar.

5. Menilai pernyataan tentang sudut

Contoh terselesaikan 6: menilai pernyataan

Diketahui $\vec{u} = (1, -2, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$, dan $\vec{w} = (4, 0, -3)$.

Penyelesaian. Hitung dulu bahan dasarnya: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 4 + 2 = 0$, dan $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4 + 0 - 6 = -2$.

Pernyataan	Nilai	Alasan
$\vec{u}$ tegak lurus $\vec{v}$	Benar	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$\lvert\vec{u} + \vec{v}\rvert = 6$	Salah	$\vec{u} + \vec{v} = (3, 0, 3)$, panjangnya $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$. Nilai 6 adalah $3 + 3$
Sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{w}$ tumpul	Benar	$\vec{u} \cdot \vec{w} = -2 < 0$
Karena $\vec{u} \cdot \vec{w}$ negatif, $\vec{u}$ dan $\vec{w}$ berlawanan arah	Salah	$\cos\theta = \frac{-2}{15}$, bukan -1; sudutnya hanya sedikit lebih dari 90°
Proyeksi skalar $\vec{w}$ pada $\vec{u}$ adalah $-\frac{2}{5}$	Salah	dibagi $\lvert\vec{u}\rvert = 3$, jadi $-\frac{2}{3}$. Nilai $-\frac{2}{5}$ adalah proyeksi $\vec{u}$ pada $\vec{w}$

Pernyataan kedua dapat juga dicek dengan sifat 4: $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 9 + 2 \cdot 0 + 9 = 18$. Untuk vektor yang tegak lurus, sifat ini tidak lain adalah teorema Pythagoras.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal hasil kali skalar

1. **Tulis komponen setiap vektor.** Bila soal memberi bangun ruang, pasang koordinat dulu (titik A di asal, tiga rusuk sebagai sumbu).
2. **Hitung tiga bahan dasar:** $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}|$, dan $|\vec{v}|$. Hampir semua pertanyaan (sudut, tegak lurus, proyeksi) memakai ketiganya.
3. **Baca tanda sebelum menghitung sudut.** Pertanyaan "lancip/tumpul/tegak lurus" cukup dijawab dari tanda $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
4. **Untuk proyeksi, tentukan dulu "proyeksi apa pada apa".** Pembaginya adalah panjang vektor yang menerima proyeksi.
5. **Untuk parameter, susun persamaan atau ketaksamaan dari $\vec{u} \cdot \vec{v}$,** lalu cek setiap nilai yang diperoleh terhadap syarat lain (panjang, arah).
6. **Untuk PG kompleks atau Benar/Salah, nilai setiap pernyataan dengan hitungan.** Pengecoh sering berupa angka yang "hampir benar" karena salah pembagi atau salah tanda.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Jebakan khas

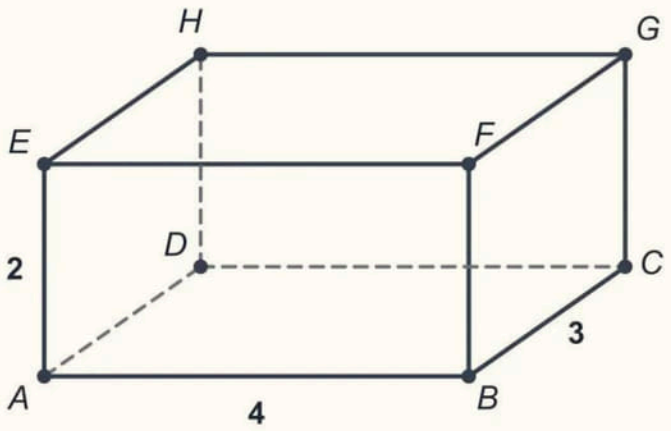
Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Hasil kali negatif dianggap berlawanan arah	$\vec{u} \cdot \vec{w} = -2$ disimpulkan "berlawanan arah"	Berlawanan arah hanya bila $\cos\theta = -1$
Lupa akar pada panjang	Pembagi $\cos\theta$ ditulis $\lvert\vec{u}\rvert^2\lvert\vec{v}\rvert^2$	Hitung panjang dulu dengan akar, baru bagi
Pembagi proyeksi tertukar	Proyeksi $\vec{w}$ pada $\vec{u}$ dibagi $\lvert\vec{w}\rvert$	Pembagi = panjang vektor yang menerima proyeksi
Hasil kali skalar ditulis sebagai vektor	$(2,1,-2)\cdot(1,1,0)$ ditulis $(2,1,0)$	Kalikan seletak lalu **jumlahkan**; hasilnya satu bilangan
Tanda komponen diagonal salah	$\overrightarrow{BH}$ ditulis $(4,3,12)$ padahal $H-B$ memberi komponen x negatif	Tulis koordinat kedua titik, lalu ujung dikurangi pangkal
Panjang jumlah = jumlah panjang	$\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert + \lvert\vec{v}\rvert$	Pakai $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2 = \lvert\vec{u}\rvert^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \lvert\vec{v}\rvert^2$
Koordinat balok dipasang tidak konsisten	Panjang BC dipakai di sumbu x padahal AB yang di sumbu x	Tetapkan: $AB \to x$, $AD \to y$, $AE \to z$, lalu tulis kedelapan titik
Sudut garis disamakan dengan sudut vektor	Kosinus negatif dilaporkan sebagai sudut antara dua garis	Sudut antara dua garis diambil yang lancip (pakai nilai mutlak)

BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memakai seluruh bagian 4: memasang koordinat pada balok, menulis vektor dari titik-titik sudutnya, lalu menghitung hasil kali skalar, sudut, dan proyeksi. Kerjakan dulu, lalu bandingkan dengan pembahasannya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 4$, $BC = 3$, dan $AE = 2$ diletakkan pada sistem koordinat ruang: A titik asal, B pada sumbu X positif, D pada sumbu Y positif, dan E pada sumbu Z positif (lihat gambar).
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\vec{AG} \cdot \vec{AC} = 25$.

☐ B. $\vec{AF} \cdot \vec{BH} = -12$.

☐ C. Sudut antara $\vec{AG}$ dan $\vec{AE}$ adalah 60°.

☐ D. Proyeksi skalar $\vec{AG}$ pada $\vec{AB}$ sama dengan panjang AB.

☐ E. $\vec{AC}$ tegak lurus $\vec{BH}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: A, B, D**

Konsep: tulis koordinat setiap titik sudut ($A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $C(4,3,0)$, $D(0,3,0)$, $E(0,0,2)$, $F(4,0,2)$, $G(4,3,2)$, $H(0,3,2)$), bentuk vektornya, lalu pakai $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $\vec{AG} = (4,3,2)$, $\vec{AC} = (4,3,0)$; hasil kali skalar $16 + 9 + 0 = 25$.
- B ✓ — $\vec{AF} = (4,0,2)$, $\vec{BH} = H - B = (-4,3,2)$; $-16 + 0 + 4 = -12$.
- C ✗ — $\cos\theta = \dfrac{(4,3,2)\cdot(0,0,2)}{\sqrt{29}\cdot 2} = \dfrac{2}{\sqrt{29}} \approx 0{,}37 \neq \frac{1}{2}$.
- D ✓ — $\dfrac{\vec{AG}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \dfrac{16}{4} = 4 = AB$.
- E ✗ — $\vec{AC}\cdot\vec{BH} = -16 + 9 + 0 = -7 \neq 0$. *Jebakan:* diagonal yang "bersilangan" dikira tegak lurus.

Jawaban: A, B, dan D.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: semua pernyataan diselesaikan dengan alat yang sama, yaitu koordinat kedelapan titik sudut. Pernyataan 5 adalah jebakan "kelihatannya tegak lurus": dua ruas yang tampak bersilangan pada gambar belum tentu tegak lurus, dan hanya hasil kali skalar nol yang dapat memastikannya. Pernyataan 4 menunjukkan arti proyeksi skalar: bayangan diagonal ruang AG pada rusuk AB tepat sepanjang rusuk itu.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu tiga bahan dasar: hasil kali skalar dan panjang kedua vektor.

1. Vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ memenuhi $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, dan $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$.

☐ B. Sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 30°.

☐ C. $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$.

☐ D. $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{b} = 15$.

☐ E. Proyeksi skalar $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah $\frac{3}{2}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$.

☐ B. $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ membentuk sudut tumpul.

☐ C. Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -3 \end{pmatrix}$ tegak lurus $\vec{a}$ bila $p = -4$.

☐ D. Proyeksi vektor $\vec{b}$ pada $\vec{a}$ adalah $\frac{5}{3}\vec{a}$.

☐ E. Proyeksi skalar $\vec{b}$ pada $\vec{a}$ adalah $\frac{5}{3}$.

Kunci singkat: 1. A, C, D 2. A, C, E

✔ PERIKSA DIRI

- Dapatkah kamu menentukan apakah sudut dua vektor lancip, siku-siku, atau tumpul hanya dari tanda hasil kali skalarnya? Kapan dua vektor benar-benar berlawanan arah?
- Pada proyeksi skalar $\vec{u}$ pada $\vec{v}$, panjang vektor mana yang menjadi pembagi, dan mengapa?
- Bila soal memberi balok $ABCD.EFGH$, dapatkah kamu menulis koordinat kedelapan titik sudutnya dalam satu menit?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 2.2: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-2.2

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis

MATTL-2.3

◎ APA YANG DIUJI

Soal lingkaran di TKA biasanya dimulai dari **gambar** atau **konteks** (jangkauan sinyal menara, penutup lubang yang menempel di dinding, desa-desa pada denah). Kamu diminta menyusun persamaan lingkaran, membaca pusat dan jari-jari dari persamaan, lalu menentukan letak sebuah titik atau garis terhadap lingkaran itu.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-15	Mengidentifikasi persamaan-persamaan lingkaran yang sepusat	26,92 %

Hanya sekitar 1 dari 4 peserta menjawab benar. Padahal hitungannya pendek: cukup membaca pusat dari gambar, lalu membaca pusat setiap pilihan. Kesalahan yang paling mungkin: **tanda pusat dari bentuk umum** sering terbalik, **diameter** dibaca sebagai jari-jari, dan **"sepusat"** disangka "sama persis".

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menulis persamaan lingkaran bentuk baku dan bentuk umum, serta mengubah yang satu ke yang lain;
- membaca pusat dan jari-jari dari bentuk umum tanpa salah tanda;
- menyusun persamaan lingkaran dari berbagai syarat: pusat dan titik, diameter, tiga titik, sepusat, menyinggung sumbu atau garis;
- menentukan kedudukan titik terhadap lingkaran (di dalam, pada, di luar);
- menentukan kedudukan garis terhadap lingkaran (memotong, menyinggung, tidak memotong) dan panjang tali busurnya;
- menilai beberapa pernyataan sekaligus tentang lingkaran.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Lingkaran sebagai himpunan titik yang berjarak sama

Lingkaran adalah himpunan semua titik yang jaraknya sama terhadap satu titik tetap. Titik tetap itu disebut **pusat**, dan jarak yang sama itu disebut **jari-jari** r. **Diameter** adalah dua kali jari-jari.

Titik (x, y) terletak pada lingkaran berpusat (a, b) dan berjari-jari r bila jaraknya ke pusat sama dengan r. Dengan rumus jarak (sub bab 2.1) lalu dikuadratkan, diperoleh **bentuk baku**:

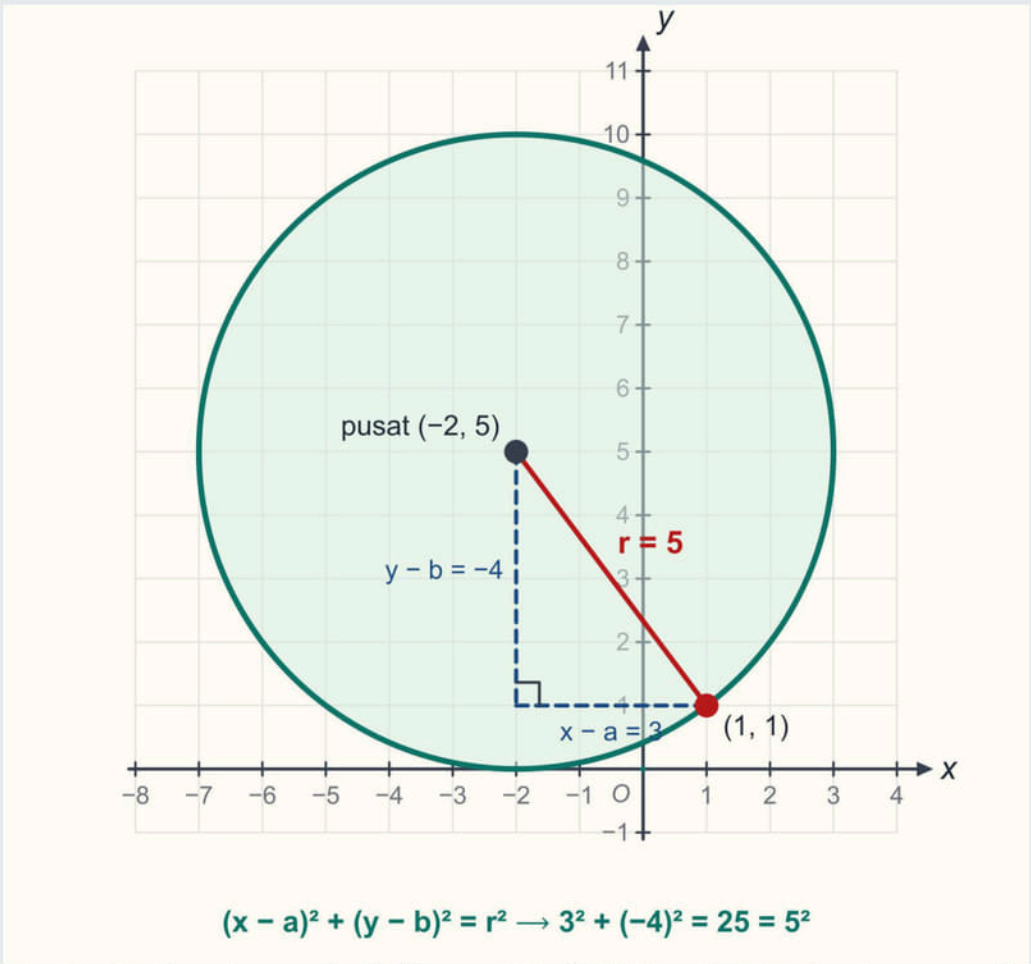
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Bila pusatnya $O(0, 0)$, bentuknya menjadi $x^2 + y^2 = r^2$.

Perhatikan tanda: pusat (a, b) muncul sebagai $x - a$ dan $y - b$. Jadi $(x+3)^2$ berarti $a = -3$. Ruas kanan adalah r^2, bukan r.

Rumus jarak itu sendiri adalah teorema Pythagoras. Dari pusat ke titik (x, y), geser mendatar sejauh $x - a$ lalu tegak sejauh $y - b$; kedua geseran itu menjadi sisi siku-siku, dan jari-jari menjadi sisi miringnya (Gambar 2.11). Karena syaratnya berlaku untuk **setiap** titik pada lingkaran, persamaan itu "mewakili" seluruh lingkaran: titik yang memenuhi persamaan pasti terletak pada lingkaran, dan titik pada lingkaran pasti memenuhi persamaan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.11 Lingkaran berpusat $(-2, 5)$ *yang melalui* $(1, 1)$ *(Contoh 1). Sisi siku-siku* $x - a = 3$ *dan* $y - b = -4$ *memberi* $r^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$. *Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.*

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 1: pusat dan satu titik

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(-2, 5)$ dan melalui titik $(1, 1)$.

Penyelesaian. Jari-jari = jarak pusat ke titik itu: $r^2 = (1+2)^2 + (1-5)^2 = 9 + 16 = 25$, jadi $r = 5$. Persamaannya

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25$$

Cek: titik $(1, 1)$ memberi $9 + 16 = 25$. Benar.

2. Bentuk umum dan cara membaca pusatnya

Bila bentuk baku dijabarkan, semua suku dipindah ke ruas kiri:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Inilah **bentuk umum**. Dari penjabaran $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ terlihat bahwa $A = -2a$, sehingga $a = -\frac{A}{2}$. Hal yang sama berlaku untuk b. Jadi

$$\text{pusat} = \left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right), \qquad r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = a^2 + b^2 - C$$

Cara mengingatnya: **koefisien x dan y dibagi -2**. Rumus r^2 juga mudah dipahami: konstanta C pada bentuk umum sama dengan $a^2 + b^2 - r^2$.

Dua syarat sebelum membaca pusat:

1. **Koefisien x^2 dan y^2 harus 1.** Bila persamaannya $2x^2 + 2y^2 + \ldots$, bagi dulu seluruh persamaan dengan 2.
2. **r^2 harus positif.** Bila $a^2 + b^2 - C \le 0$, persamaan itu bukan lingkaran nyata. Contohnya, $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 15 = 0$ memberi $r^2 = 9 + 1 - 15 = -5$.

Contoh terselesaikan 2: membaca pusat dan jari-jari

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 24 = 0$. Tulis juga lingkaran pada Contoh 1 dalam bentuk umum.

Penyelesaian. Bagi dengan 2: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Jadi $A = -4, B = 6, C = -12$. Pusatnya $\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{6}{2}\right) = (2, -3)$ dan $r^2 = 4 + 9 - (-12) = 25$, jadi $r = 5$.

Untuk Contoh 1: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25$ dijabarkan menjadi
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 25$, atau

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$$

Perhatikan konstantanya: $4 + 25 - 25 = 4$, bukan -25. Konstanta bentuk umum **bukan** $-r^2$, kecuali pusatnya di O.

3. Menyusun persamaan dari syarat yang diberikan

Hampir semua soal lingkaran berpola "cari pusat, cari jari-jari". Tabel berikut merangkum syarat yang sering muncul:

Yang diketahui	Pusat	Jari-jari

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Ujung diameter P dan Q	titik tengah PQ	$\frac{1}{2}\lvert PQ\rvert$
Menyinggung sumbu X, pusat (a, b)	(a, b)	$r = \lvert b\rvert$
Menyinggung sumbu Y, pusat (a, b)	(a, b)	$r = \lvert a\rvert$
Menyinggung kedua sumbu di kuadran I	(r, r)	r
Menyinggung garis $px + qy + c = 0$	diketahui	jarak pusat ke garis
Melalui tiga titik	dari SPL tiga variabel atau garis sumbu	dari pusat ke salah satu titik

Lingkaran sepusat adalah lingkaran-lingkaran yang **pusatnya sama**, sedangkan jari-jarinya boleh berbeda. Dalam bentuk umum, lingkaran sepusat mempunyai A dan B yang sama; yang berbeda hanya C. Jadi "sepusat" tidak berarti "sama jari-jari". Bila jari-jarinya juga sama, kedua lingkaran itu berimpit (lingkaran yang sama).

Contoh terselesaikan 3: dari diameter

Ruas PQ dengan $P(-1, 2)$ dan $Q(5, -6)$ adalah diameter sebuah lingkaran. Tentukan persamaannya.

Penyelesaian. Pusatnya titik tengah PQ: $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (2, -2)$. Panjang diameter $\lvert PQ\rvert = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, jadi $r = 5$ (bukan 10). Persamaannya $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$, atau

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$$

Cek: $P(-1, 2)$ memberi $1 + 4 + 4 + 8 - 17 = 0$. Benar.

Contoh terselesaikan 4: melalui tiga titik

Tentukan lingkaran yang melalui $(1, 1)$, $(7, 1)$, dan $(5, 5)$.

Penyelesaian. Substitusikan ketiga titik ke $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

$$\begin{cases} 2 + A + B + C = 0 \\ 50 + 7A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \end{cases}$$

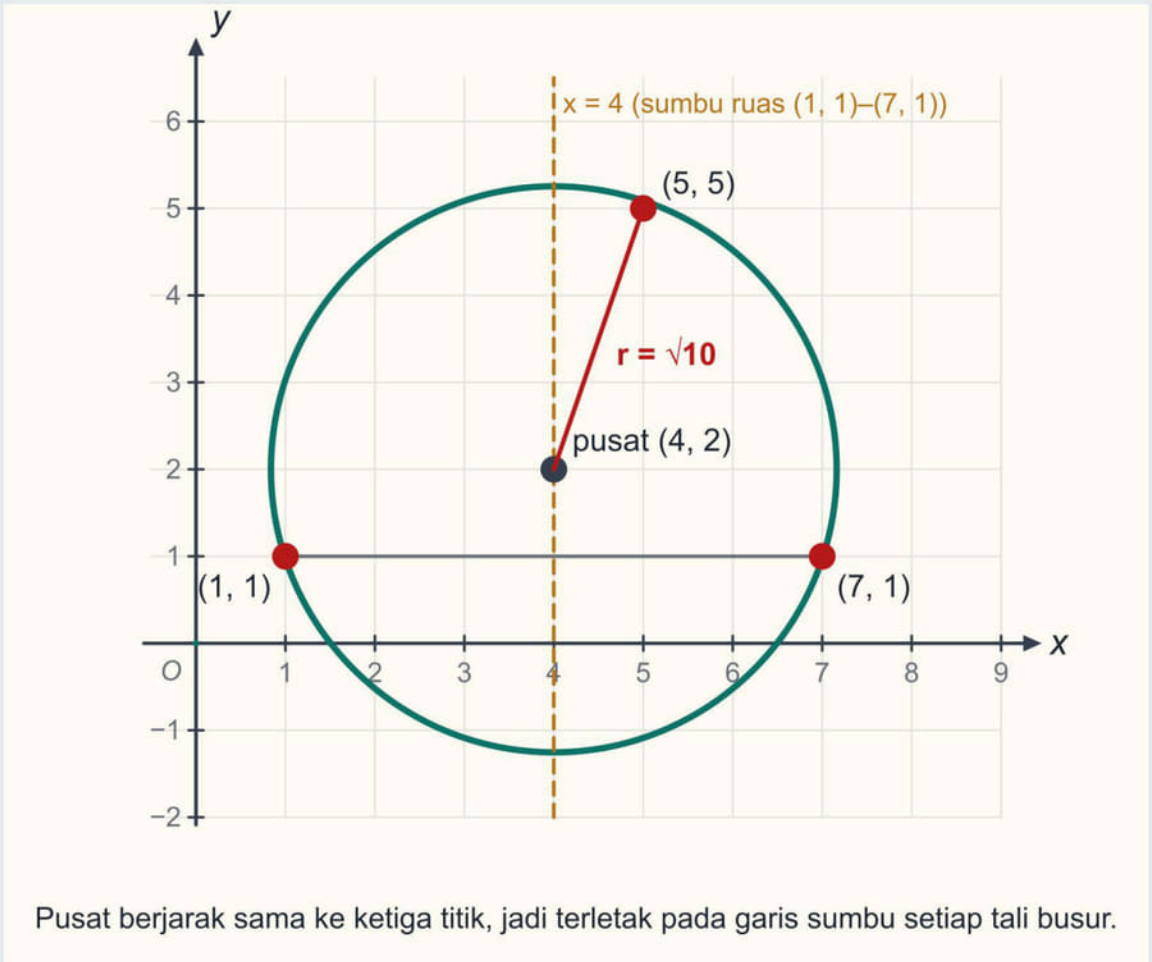
Kurangkan persamaan kedua dengan persamaan pertama: $48 + 6A = 0$, jadi $A = -8$. Masukkan ke persamaan pertama: $B + C = 6$. Masukkan ke persamaan ketiga: $5B + C = -10$. Kurangkan kedua persamaan terakhir: $4B = -16$, jadi $B = -4$ dan $C = 10$. Lingkarannya

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$$

dengan pusat $(4, 2)$ dan $r^2 = 16 + 4 - 10 = 10$. Cek titik ketiga $(5, 5)$: $25 + 25 - 40 - 20 + 10 = 0$. Benar. Cara lain: dua titik pertama segaris mendatar, jadi pusatnya berada pada garis tegak $x = 4$ di tengah keduanya. Cara ini dipakai di bedah soal prediksi.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Mengapa cara lain itu benar? Pusat berjarak sama ke $(1, 1)$ dan $(7, 1)$. Semua titik yang berjarak sama ke dua titik terletak pada **garis sumbu** ruas yang menghubungkan keduanya, yaitu garis yang tegak lurus ruas itu dan melalui titik tengahnya. Untuk ruas mendatar dari $(1, 1)$ ke $(7, 1)$, garis sumbunya $x = 4$. Pusat pasti di garis itu; tinggal dicari titik pada $x = 4$ yang jaraknya ke $(5, 5)$ sama dengan jaraknya ke $(1, 1)$: $(4 - 5)^2 + (y - 5)^2 = (4 - 1)^2 + (y - 1)^2$ memberi $y = 2$ (Gambar 2.12).



Gambar 2.12 Lingkaran Contoh 4 melalui $(1, 1)$, $(7, 1)$, dan $(5, 5)$. Pusatnya $(4, 2)$ terletak pada garis sumbu $x = 4$, dan jari-jarinya $\sqrt{10}$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 5: sepusat dan menyinggung sumbu

Tentukan lingkaran yang sepusat dengan $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$ dan (a) menyinggung sumbu X; (b) menyinggung sumbu Y.

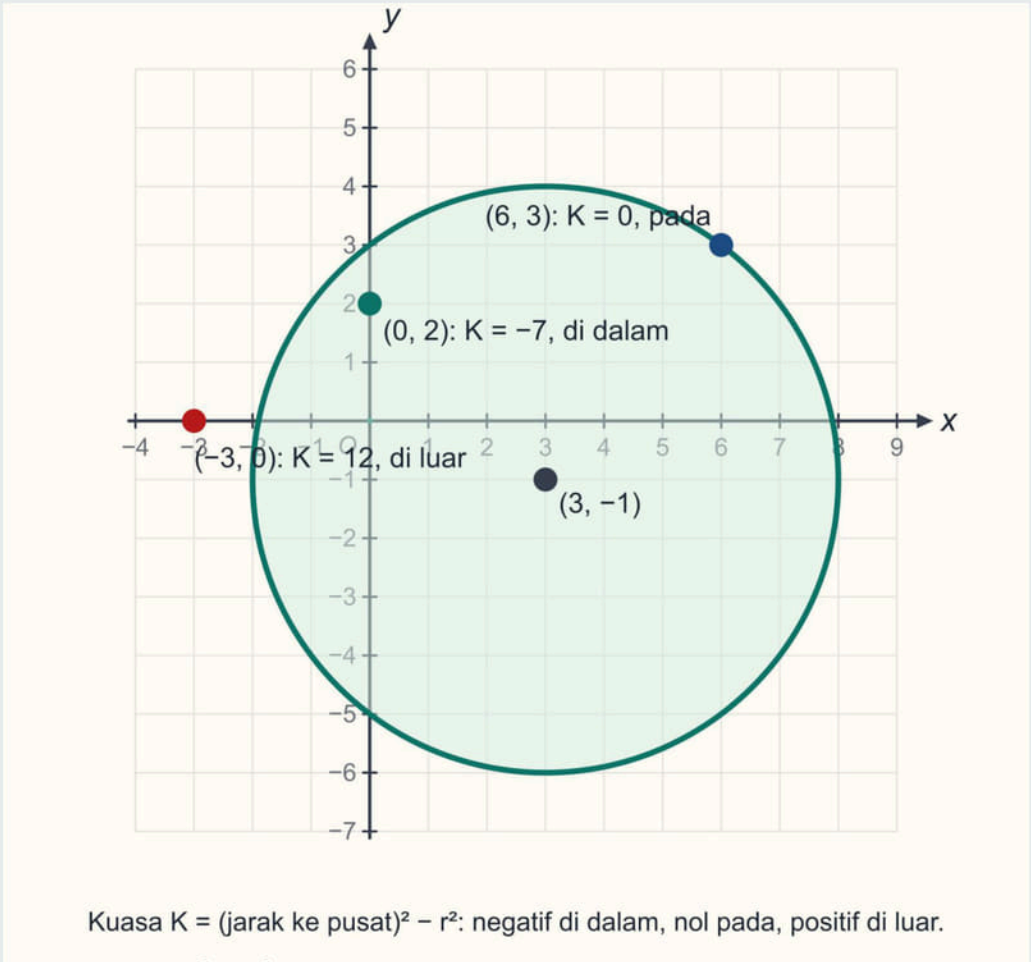
Penyelesaian. Pusat lingkaran semula $(-2, 5)$, dengan $r^2 = 4 + 25 - 20 = 9$. Lingkaran baru memakai pusat yang sama, jadi bentuknya $x^2 + y^2 + 4x - 10y + C = 0$; yang dicari hanya C.

(a) Menyinggung sumbu X: jari-jarinya jarak pusat ke sumbu X, yaitu $|5| = 5$. Maka $C = a^2 + b^2 - r^2 = 4 + 25 - 25 = 4$. Hasilnya $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$. Lingkaran ini sama dengan lingkaran pada Contoh 1.

(b) Menyinggung sumbu Y: jari-jarinya $|-2| = 2$. Maka $C = 29 - 4 = 25$. Hasilnya $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$.

4. Kedudukan titik terhadap lingkaran

Substitusikan titik (x_0, y_0) ke ruas kiri bentuk umum. Hasilnya disebut **kuasa titik**, $K = x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C$. Kuasa sama dengan (jarak titik ke pusat)^2 dikurangi r^2. Jadi tandanya langsung menunjukkan letak titik:



Gambar 2.13 Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ (Contoh 6) dan tiga titik dengan kuasa nol, negatif, dan positif. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kuasa K	Jarak ke pusat	Letak titik
$K < 0$	kurang dari r	di dalam lingkaran
$K = 0$	sama dengan r	pada lingkaran
$K > 0$	lebih dari r	di luar lingkaran

Dalam konteks, perhatikan kata-katanya. "Di dalam **atau pada**" berarti $K \le 0$, sedangkan "di dalam" saja berarti $K < 0$. Mengapa kuasa sama dengan "jarak kuadrat dikurangi r^2"? Bentuk umum hanyalah bentuk baku yang dijabarkan, $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$. Jadi memasukkan (x_0, y_0) ke ruas kiri bentuk umum sama dengan menghitung $(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 - r^2$, yaitu kuadrat jarak titik ke pusat dikurangi kuadrat jari-jari (Gambar 2.13). Bila jawabannya berupa banyak bilangan bulat, titik yang tepat pada batas sering menjadi penentu.

Contoh terselesaikan 6: letak titik

Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. (a) Tentukan letak titik $(6, 3)$, $(0, 2)$, dan $(-3, 0)$. (b) Titik $(1, q)$ dengan q bilangan bulat terletak di dalam lingkaran. Ada berapa nilai q yang mungkin?

Penyelesaian. Pusatnya $(3, -1)$ dan $r^2 = 9 + 1 + 15 = 25$.

(a) Titik $(6, 3)$: $K = 36 + 9 - 36 + 6 - 15 = 0$, jadi pada lingkaran. Titik $(0, 2)$: $K = 0 + 4 - 0 + 4 - 15 = -7$, jadi di dalam. Titik $(-3, 0)$: $K = 9 + 0 + 18 + 0 - 15 = 12$, jadi di luar. Cek $(0, 2)$ dengan jarak: $(0-3)^2 + (2+1)^2 = 18$, dan $18 - 25 = -7$. Hasilnya sama.

(b) Syaratnya $(1-3)^2 + (q+1)^2 < 25$, atau $(q+1)^2 < 21$. Kuadrat bilangan bulat yang kurang dari 21 adalah 0, 1, 4, 9, dan 16. Jadi $q+1$ bernilai -4 sampai 4, sehingga q bernilai -5 sampai 3. Banyaknya **9** nilai. Karena 21 bukan bilangan kuadrat, tidak ada titik bulat yang tepat pada batas.

5. Kedudukan garis terhadap lingkaran

Ada dua cara yang sama-sama sah.

Cara jarak. Hitung jarak pusat (a, b) ke garis $px + qy + c = 0$:

$$d = \frac{|pa + qb + c|}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

Rumus ini adalah proyeksi skalar (sub bab 2.2) pada vektor normal (p, q), yaitu vektor yang tegak lurus garis. Garis harus ditulis dulu dalam bentuk $px + qy + c = 0$.

Perbandingan	Kedudukan garis
$d < r$	memotong di dua titik
$d = r$	menyinggung (satu titik)

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$d > r$	tidak memotong

Bila garis memotong, panjang **tali busur** (ruas garis di dalam lingkaran) adalah

$$2\sqrt{r^2 - d^2}$$

Rumus ini berasal dari segitiga siku-siku dengan sisi miring r, satu sisi d, dan sisi lainnya setengah tali busur. Ketiga kedudukan garis itu tampak pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Jarak d dari pusat ke garis dibandingkan dengan jari-jari r: memotong ($d < r$), menyinggung ($d = r$), atau tidak memotong ($d > r$). Ruas garis tegak lurus dari pusat selalu membagi tali busur menjadi dua sama panjang. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Cara diskriminan. Substitusikan persamaan garis ke persamaan lingkaran sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam satu variabel. Diskriminan $D = b^2 - 4ac$ memberi: $D > 0$ memotong di dua titik, $D = 0$ menyinggung, dan $D < 0$ tidak memotong. Cara ini cocok bila garisnya memuat parameter dan soal menanyakan nilai parameter itu.

Contoh terselesaikan 7: nilai parameter agar menyinggung

Tentukan k agar garis $y = x + k$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$.

Penyelesaian dengan diskriminan. Substitusi $y = x + k$:

$$x^2 + (x + k)^2 = 8 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2kx + k^2 - 8 = 0$$

$D = (2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 8) = -4k^2 + 64$. Menyinggung bila $D = 0$, jadi $k^2 = 16$ dan $k = 4$ atau $k = -4$.

Penyelesaian dengan jarak. Garis $x - y + k = 0$, pusat $(0, 0)$, $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Syarat $d = r$ memberi $\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, jadi $|k| = 4$. Kedua cara memberi hasil yang sama. Ada **dua** garis singgung yang sejajar, satu di setiap sisi lingkaran.

Contoh terselesaikan 8: menilai pernyataan

Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Penyelesaian. Pusatnya $(1, -2)$ dan $r^2 = 1 + 4 + 20 = 25$, jadi $r = 5$.

Pernyataan	Nilai	Alasan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Garis $3x - 4y + 14 = 0$ menyinggung lingkaran	Benar	$d = \frac{\lvert 3+8+14 \rvert}{5} = 5 = r$
Garis $3x - 4y + 4 = 0$ memotong lingkaran dengan tali busur sepanjang 8	Benar	$d = \frac{\lvert 3+8+4 \rvert}{5} = 3$, tali busur $2\sqrt{25 - 9} = 8$
Garis $y = x + 10$ memotong lingkaran	Salah	tulis $x - y + 10 = 0$; $d = \frac{\lvert 1+2+10 \rvert}{\sqrt{2}} \approx 9{,}19 > 5$
Garis $y = -2$ memotong lingkaran dengan tali busur sepanjang 10	Benar	garis melalui pusat ($d = 0$), tali busurnya diameter $= 10$
Titik $(4, 2)$ terletak di luar lingkaran	Salah	$K = 16 + 4 - 8 + 8 - 20 = 0$, jadi titik itu **pada** lingkaran

Pernyataan ketiga dapat dicek dengan diskriminan: substitusi $y = x + 10$ menghasilkan $2x^2 + 22x + 120 = 0$, atau $x^2 + 11x + 60 = 0$. Diskriminannya $121 - 240 = -119 < 0$, jadi garis memang tidak memotong.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal lingkaran

1. **Gambar sketsa** (sumbu, pusat, jari-jari, titik, atau garis yang disebut). Sketsa kasar sudah cukup untuk menangkap kesalahan tanda.
2. **Ubah ke bentuk umum dengan koefisien x^2 dan y^2 sama dengan 1,** lalu baca pusat $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ dan $r^2 = a^2 + b^2 - C$.
3. **Terjemahkan syarat ke "pusat" dan "jari-jari"** memakai tabel di bagian 3: diameter → titik tengah; menyinggung sumbu → jarak ke sumbu; menyinggung garis → jarak ke garis; sepusat → A dan B tetap.
4. **Untuk letak titik, hitung kuasa.** Untuk letak garis, hitung jarak pusat ke garis (atau diskriminan bila ada parameter).
5. **Cek jawaban dengan menyubstitusikan satu titik yang diketahui** ke persamaan akhirmu. Hasilnya harus 0.
6. **Untuk PG kompleks atau Benar/Salah,** periksa pusat setiap pilihan satu per satu. Jangan berhenti setelah menemukan satu pilihan yang cocok.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Tanda pusat dari bentuk umum	$x^2 + y^2 + 6x - 8y + \cdots = 0$ dibaca berpusat $(3, -4)$	Pusat = koefisien dibagi -2: $(-3, 4)$
Koefisien tidak dibagi 2	Pusat dianggap (A, B), misalnya $(-4, 6)$ untuk $-4x + 6y$	Selalu bagi dua: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

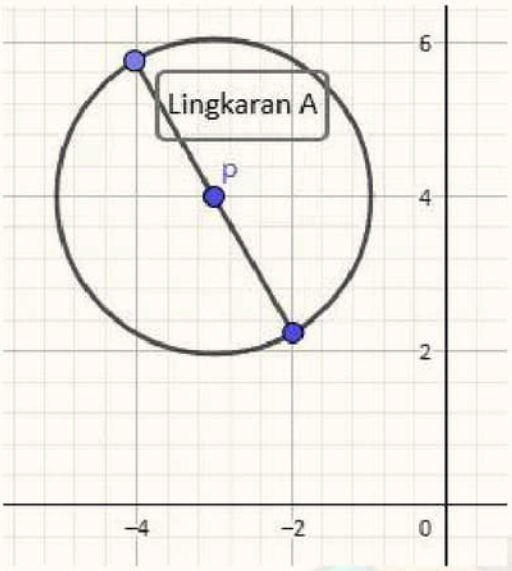
Koefisien x^2 belum 1	$2x^2 + 2y^2 - 8x \ldots$ langsung dibaca berpusat $(4, \ldots)$	Bagi seluruh persamaan dengan koefisien x^2 dulu
Diameter dibaca jari-jari	"Diameter 4" ditulis $r = 4$, sehingga $r^2 = 16$	Jari-jari = setengah diameter
Konstanta dianggap $-r^2$	$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ ditulis $\cdots - 25 = 0$	Konstanta $= a^2 + b^2 - r^2$
"Sepusat" dikira "sama persis"	Mencari pilihan dengan konstanta yang sama dengan lingkaran pada gambar	Sepusat: A dan B sama, C boleh berbeda
Menyinggung sumbu X dengan $r = \lvert a \rvert$	Pusat $(-2, 5)$ menyinggung sumbu X diberi $r = 2$	Jarak ke sumbu X adalah $\lvert b \rvert$; ke sumbu Y adalah $\lvert a \rvert$
Titik pada batas terlupa	"Di dalam atau pada" dihitung dengan $<$	Bedakan $\leq$ dan $<$; cek titik ujung
Rumus jarak dipakai sebelum garis dirapikan	$y = x + 10$ langsung dimasukkan tanpa diubah ke $x - y + 10 = 0$	Pindahkan semua suku ke ruas kiri dulu

• BEDAH SOAL ASLI

Soal SA-15 dijawab benar oleh 26,92 % peserta. Polanya sama dengan Contoh terselesaikan 5: lingkaran baru harus **sepusat**, jadi yang dicari hanya pilihan dengan A dan B yang tepat. Pusat dibaca dari gambar. Informasi "diameter 4" sebenarnya tidak diperlukan untuk memilih jawaban, tetapi dapat menjebak bila kamu mencari pilihan yang jari-jarinya juga 2. Baca pusat setiap pilihan dengan aturan "dibagi -2". Kerjakan dulu sebelum membaca pembahasannya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Perhatikan gambar lingkaran berikut.
Diameter lingkaran pada gambar adalah 4 satuan. Persamaan lingkaran yang **sepusat** dengan lingkaran pada gambar adalah ....



A. $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$
B. $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$
C. $x^2 + 6x + y^2 + 8y + 16 = 0$
D. $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 16 = 0$
E. $x^2 + 8x + y^2 - 6y + 21 = 0$

Pembahasan **Kunci: A**

Konsep: lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ berpusat di $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Lingkaran sepusat = pusatnya sama (jari-jari boleh berbeda).

Langkah 1 – Pusat dari gambar. Titik P berada di $(-3, 4)$; diameter 4 → jari-jari 2. Persamaan lingkaran pada gambar: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4$, atau $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$.

Langkah 2 – Pusat setiap pilihan.
• A: $A = 6, B = -8 \rightarrow$ pusat $(-3, 4)$ ✓; $r^2 = 9 + 16 - 16 = 9, r = 3$ (sepusat, lebih besar).
• B: pusat $(3, 4)$ ✗ (tanda x terbalik)
• C: pusat $(-3, -4)$ ✗ (tanda y terbalik)
• D: pusat $(4, 3)$ ✗
• E: pusat $(-4, 3)$ ✗ (koordinat tertukar)

Cek: pilihan A dapat ditulis $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$ ✓.

Jebakan: mencari persamaan dengan konstanta 21 (jari-jari 2). Pilihan B dan E memang memuat 21, tetapi pusatnya salah.

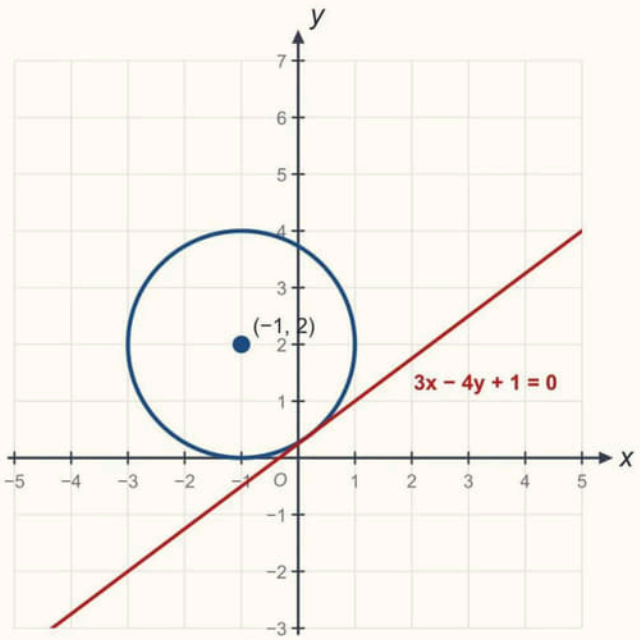
Jawaban: A.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut meminta lingkaran yang menyinggung sebuah garis. Pusatnya sudah diketahui, jadi seluruh pekerjaan ada pada jari-jari, yaitu jarak pusat ke garis singgung. Setelah itu ubah ke bentuk umum dengan hati-hati, karena pengecohnya bermain di tanda dan konstanta.

►. Sebuah lingkaran berpusat di $(-1, 2)$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 1 = 0$ (lihat gambar).
Persamaan lingkaran tersebut adalah ....



A. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
C. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 95 = 0$
D. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$
E. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: A**

Konsep: lingkaran yang menyinggung garis mempunyai jari-jari = jarak pusat ke garis: $r = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Langkah 1. $r = \dfrac{|3(-1) - 4(2) + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{10}{5} = 2$.

Langkah 2. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 + 4 - 4 = 0$, yaitu $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: tanda pusat terbalik; persamaan ini berpusat di $(1, -2)$.
- C: jarak pusat ke garis tidak dibagi $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, sehingga $r = 10$.
- D: memakai $r^2 = 2$ (jari-jari tidak dikuadratkan).
- E: jarak dibagi $3^2 + 4^2 - 15 = 10$ (salah rumus), sehingga $r = 1$.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: pengecoh C muncul bila jarak tidak dibagi $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$, sehingga jari-jarinya menjadi 10. Pengecoh B adalah tanda pusat yang terbalik, dan pengecoh D memakai $r^2 = 2$ (jari-jari tidak dikuadratkan). Sebagai cek akhir, titik singgungnya $(0{,}2;\ 0{,}4)$ harus memenuhi persamaan lingkaran: $1{,}44 + 2{,}56 = 4$.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu pusat dan jari-jari lingkaran yang terlibat, lalu gambar sketsa kasarnya.

1. Sebuah lingkaran melalui titik $(0, 1)$ dan $(4, 1)$, dan pusatnya terletak pada garis $y = x + 1$.

Persamaan lingkaran tersebut adalah ....

A. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$
C. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 5 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 5 = 0$

2. Sebuah lingkaran berpusat di titik potong garis $x + y = 5$ dan $x - y = 1$, serta melalui titik $O(0, 0)$.

Persamaan lingkaran tersebut adalah ....

A. $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$
B. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 13 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$
D. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$
E. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kunci singkat: 1. B 2. C

✔ PERIKSA DIRI

- Dari bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dapatkah kamu membaca pusat dan r^2 tanpa menjabarkan ulang? Apa yang harus dilakukan dulu bila koefisien x^2 bukan 1?
- Apa bedanya lingkaran sepusat, lingkaran yang menyinggung sumbu X, dan lingkaran yang menyinggung sebuah garis, dilihat dari cara mencari jari-jarinya?
- Bila soal berkata "di dalam atau pada lingkaran", tanda ketaksamaan apa yang kamu pakai, dan mengapa titik pada batas sering menentukan jawaban?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 2.3: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-2.3

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 2.4 · Garis singgung lingkaran

MATTL-2.4

◎ APA YANG DIUJI

Garis singgung adalah garis yang menyentuh lingkaran tepat di satu titik. Titik sentuh itu disebut **titik singgung**. Di TKA, kamu jarang diminta sekadar "tuliskan persamaan garis singgung". Soal biasanya merangkai beberapa langkah: mencari pusat dan jari-jari dari gambar, menentukan gradien dari garis lain (sejajar atau tegak lurus), lalu menemukan **titik singgungnya**. Bentuknya sering PG kompleks dengan lebih dari satu jawaban benar.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-16	Menentukan koordinat titik singgung dari garis-garis singgung lingkaran yang tegak lurus terhadap suatu garis tertentu	9,74 %

Angka 9,74 % berarti kurang dari 1 dari 10 peserta yang menjawab benar. Ini soal asli dengan persentase benar terendah kedua di seluruh paket. Ada tiga penyebab utama. Pertama, yang ditanya **titik** singgung, bukan persamaan garis, padahal rumus yang biasa dihafal hanya menghasilkan persamaan garis. Kedua, ada **dua** titik singgung dan keduanya harus dipilih. Ketiga, kata "tegak lurus" harus diterjemahkan dengan benar menjadi arah jari-jari. Kabar baiknya, ada cara geometris yang hanya memerlukan satu baris hitungan (bagian 4).

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

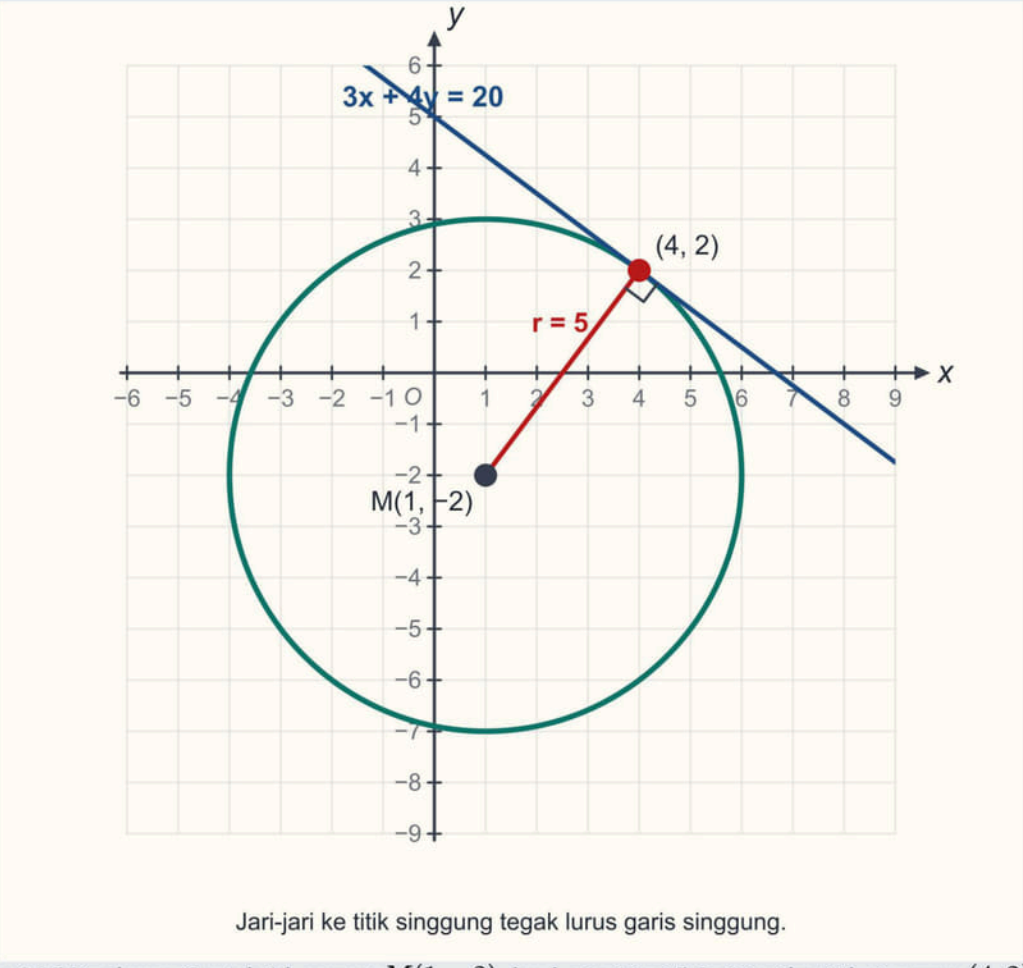
- menguji apakah sebuah garis menyinggung lingkaran dengan jarak pusat ke garis;
- menulis persamaan garis singgung di titik pada lingkaran dengan aturan bagi adil;
- menulis persamaan garis singgung bergradien m, termasuk yang sejajar atau tegak lurus garis tertentu;
- menentukan titik singgung langsung dari pusat, jari-jari, dan arah garis (pusat $\pm r\cdot$ vektor satuan), lalu mengecek ulang hasilnya;
- menentukan panjang garis singgung, titik singgung, dan persamaan garis singgung dari titik di luar lingkaran;
- menilai beberapa pernyataan sekaligus tentang garis singgung (PG kompleks atau Benar/Salah).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Tiga alat dasar

(a) Jari-jari ke titik singgung tegak lurus garis singgung. Inilah sifat terpenting di sub bab ini. Semua rumus di bawah lahir dari sifat ini. Bila kamu lupa rumus, kembalilah ke sifat ini. Alasannya: titik singgung adalah titik garis yang **paling dekat** ke pusat, karena titik garis yang lain berada di luar lingkaran. Ruas terpendek dari sebuah titik ke sebuah garis selalu tegak lurus garis itu; ruas miring mana pun menjadi sisi miring segitiga siku-siku, jadi lebih panjang (Gambar 2.15).



Gambar 2.15 Lingkaran Contoh 1 berpusat $M(1, -2)$ dan berjari-jari 5. Jari-jari ke titik singgung $(4, 2)$ tegak lurus garis singgung $3x + 4y = 20$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

(b) Syarat menyinggung. Garis $ax + by + c = 0$ menyinggung lingkaran berpusat $M(p, q)$ dan berjari-jari r bila jarak pusat ke garis sama dengan r:

$$d = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$$

Bila $d < r$, garis memotong lingkaran di dua titik. Bila $d > r$, garis tidak menyentuh lingkaran (lihat sub bab 2.3). Cara lain: substitusikan persamaan garis ke persamaan lingkaran. Garis menyinggung bila diskriminan persamaan kuadratnya nol.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

(c) Gradien, arah, dan normal garis.

- Garis $y = mx + n$ bergradien m. Garis $ax + by + c = 0$ bergradien $-a/b$.
- Dua garis **sejajar** bila gradiennya sama. Dua garis **tegak lurus** bila $m_1 \cdot m_2 = -1$, jadi $m_2 = -1/m_1$.
- **Vektor arah** garis adalah vektor yang searah garis. Untuk gradien m, arahnya $(1, m)$. Untuk garis $ax + by + c = 0$, arahnya $(b, -a)$.
- **Vektor normal** garis $ax + by + c = 0$ adalah (a, b). Vektor ini tegak lurus garis.

Contoh: garis $3x - 4y + 12 = 0$ bergradien $\frac{3}{4}$, arahnya $(4, 3)$, dan normalnya $(3, -4)$. Cek: $(4, 3) \cdot (3, -4) = 12 - 12 = 0$. Hasil kali skalar nol berarti kedua vektor tegak lurus (sub bab 2.2).

2. Garis singgung di titik pada lingkaran: aturan "bagi adil"

Bila titik singgung (x_1, y_1) **sudah diketahui dan terletak pada lingkaran**, persamaan garis singgungnya diperoleh dengan "membagi adil": x^2 diganti $x_1 x$, y^2 diganti $y_1 y$, x diganti $\frac{1}{2}(x + x_1)$, dan y diganti $\frac{1}{2}(y + y_1)$.

Persamaan lingkaran	Garis singgung di (x_1, y_1)
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_1 x + y_1 y = r^2$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$x_1 x + y_1 y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

Mengapa rumusnya begitu? Vektor jari-jari $(x_1 - a, y_1 - b)$ tegak lurus garis singgung, jadi vektor itu adalah normal garis singgung. Garis yang melalui (x_1, y_1) dengan normal tersebut adalah

$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0$$

Tulis $x - x_1 = (x - a) - (x_1 - a)$ dan $y - y_1 = (y - b) - (y_1 - b)$, lalu pakai fakta $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$. Hasilnya tepat baris kedua tabel.

Cek titiknya dulu! Aturan bagi adil hanya menghasilkan garis singgung bila titiknya **terletak pada** lingkaran. Bila titiknya di luar lingkaran, hasilnya garis lain (garis kutub, bagian 5). Jadi selalu substitusikan titik ke persamaan lingkaran lebih dahulu.

Contoh terselesaikan 1: garis singgung di titik pada lingkaran

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ di titik $(4, 2)$.

Penyelesaian. Cek titik: $16 + 4 - 8 + 8 - 20 = 0$, jadi $(4, 2)$ terletak pada lingkaran. Pakai baris ketiga tabel dengan $A = -2, B = 4, C = -20$:

$$4x + 2y - (x + 4) + 2(y + 2) - 20 = 0 \;\Rightarrow\; 3x + 4y - 20 = 0$$

Cara kedua dengan bentuk baku. Lingkaran yang sama dapat ditulis $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$, jadi pusatnya $(1, -2)$ dan $r = 5$:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$(4-1)(x-1)+(2+2)(y+2)=25 \;\Rightarrow\; 3x+4y=20$

Hasilnya sama. Cek ulang dengan syarat menyinggung: jarak pusat $(1,-2)$ ke garis $3x+4y-20=0$ adalah $|3-8-20|/5=25/5=5=r$.

3. Garis singgung bergradien m

Bila yang diketahui **arah** (gradien) garis singgung, bukan titiknya, selalu ada **dua** garis singgung. Keduanya sejajar dan terletak di sisi lingkaran yang berseberangan.

Persamaan lingkaran	Garis singgung bergradien m
$x^2+y^2=r^2$	$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$

Mengapa rumusnya begitu? Setiap garis bergradien m dapat ditulis $y-b=m(x-a)+n$. Jarak pusat (a,b) ke garis ini adalah $|n|/\sqrt{1+m^2}$. Syarat menyinggung (alat b) memberi $|n|=r\sqrt{1+m^2}$, jadi $n=\pm r\sqrt{1+m^2}$.

Menentukan m dari kalimat soal:

- "sejajar garis g" $\rightarrow m=m_g$;
- "tegak lurus garis g" $\rightarrow m=-1/m_g$;
- "membentuk sudut 45° dengan sumbu X positif" $\rightarrow m=\tan 45^\circ=1$.

Garis tegak (sejajar sumbu Y) tidak mempunyai gradien, jadi rumus ini tidak menangkapnya. Garis singgung tegak dan mendatar dapat ditulis langsung: $x=a\pm r$ dan $y=b\pm r$.

Contoh terselesaikan 2: garis singgung yang tegak lurus garis lain

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ yang tegak lurus garis $4x-3y+7=0$.

Penyelesaian. Pusat $(3,-1)$ dan $r^2=9+1+15=25$, jadi $r=5$. Gradien garis yang diketahui $\frac{4}{3}$, sehingga gradien garis singgung $m=-\frac{3}{4}$. Lalu

$r\sqrt{1+m^2}=5\sqrt{1+\frac{9}{16}}=5\cdot\frac{5}{4}=\frac{25}{4}$.

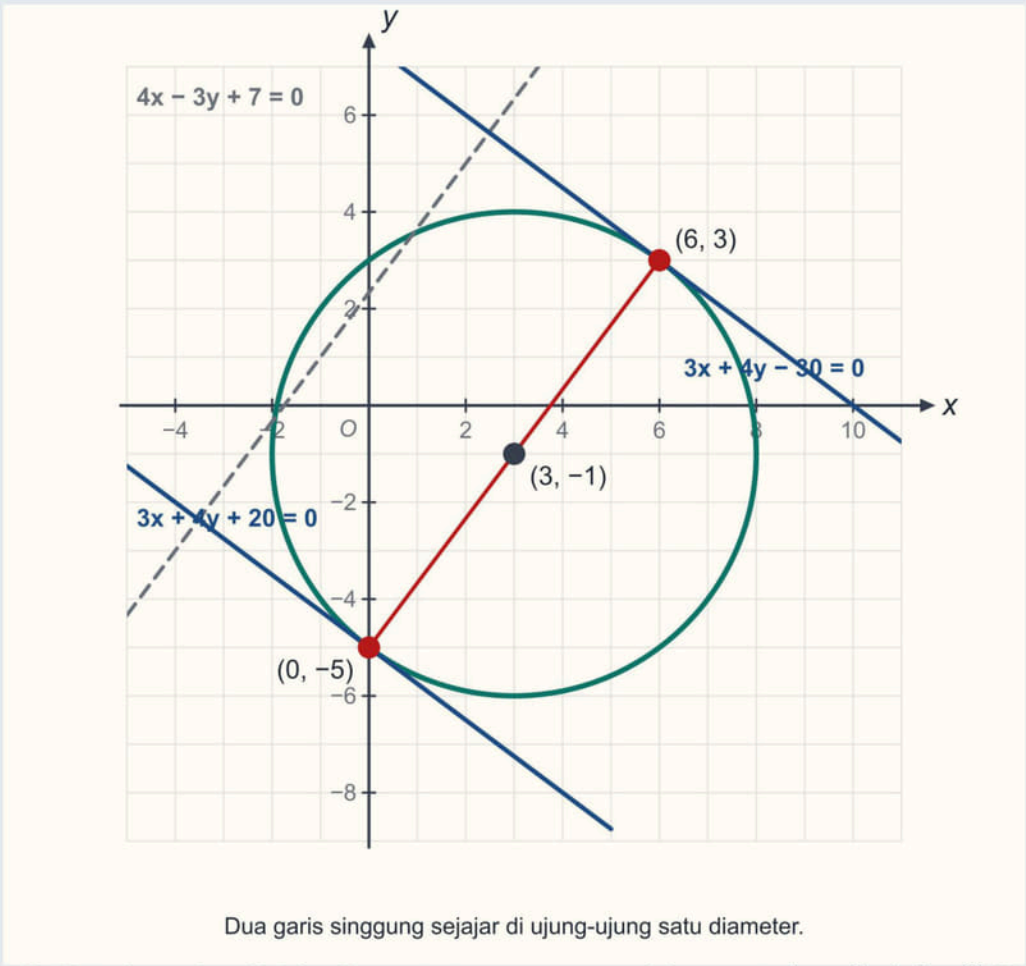
$y+1=-\frac{3}{4}(x-3)\pm\frac{25}{4}$

Kalikan 4: $4y+4=-3x+9\pm 25$. Jadi garis singgungnya

$3x+4y-30=0 \quad \text{atau} \quad 3x+4y+20=0$

Cek ulang: jarak pusat ke kedua garis adalah $|9-4-30|/5=5$ dan $|9-4+20|/5=5$. Hasil kali gradien $-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=-1$. Keduanya cocok. Kedua garis singgung itu digambar pada Gambar 2.16.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.16 Lingkaran Contoh 2 dan dua garis singgung yang tegak lurus garis $4x - 3y + 7 = 0$ (abu-abu). Titik singgungnya $(6, 3)$ dan $(0, -5)$, ujung-ujung satu diameter. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. Menemukan titik singgung secara geometris: pusat ± r · vektor satuan

Bagian ini adalah kunci SA-16. Ingat lagi alat (a): jari-jari ke titik singgung **tegak lurus** garis singgung. Akibatnya:

- Garis singgung **tegak lurus** garis f → jari-jari ke titik singgung **sejajar** f. Titik singgung diperoleh dengan bergerak dari pusat sejauh r **searah garis** f, maju atau mundur.
- Garis singgung **sejajar** garis g → jari-jari ke titik singgung **tegak lurus** g, jadi searah **vektor normal** g.

Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya 1, yaitu $\vec{u} = \vec{v}/|\vec{v}|$ (sub bab 2.1). Jadi kedua titik singgung adalah

$$T = M \pm r\,\vec{u}$$

dengan M pusat lingkaran dan $\vec{u}$ vektor satuan yang searah jari-jari.

Garis singgung yang diminta	Jari-jari ke titik singgung searah …	$\vec{v}$ bila garisnya $ax + by + c = 0$
tegak lurus garis f	garis f	$(b, -a)$, arah f
sejajar garis g	normal g	(a, b), normal g
bergradien m	normal garis singgung	$(m, -1)$

Setelah titik singgung diketahui, persamaan garis singgungnya tinggal ditulis dengan aturan bagi adil. Sebagai contoh, pada Contoh 2 garis singgungnya berbentuk $3x + 4y + c = 0$ dengan normal $(3, 4)$ yang panjangnya 5. Titik singgungnya $(3, -1) \pm 5 \cdot \frac{1}{5}(3, 4)$, yaitu $(6, 3)$ dan $(0, -5)$. Cek: $18 + 12 - 30 = 0$ dan $0 - 20 + 20 = 0$.

Cek ulang empat langkah (biasakan, karena satu langkah saja tidak cukup):

1. Setiap titik T terletak pada lingkaran.
2. Titik tengah kedua titik singgung sama dengan pusat (keduanya ujung satu diameter).
3. Vektor $\overrightarrow{MT}$ searah dengan arah yang diminta: komponennya sebanding.
4. Garis singgung di T memenuhi syarat sejajar atau tegak lurus (cek hasil kali gradien).

Contoh terselesaikan 3: titik singgung garis yang tegak lurus garis lain (pola SA-16)

Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 95 = 0$ dan garis $f : 3x - 4y + 12 = 0$. Tentukan semua titik singgung dari garis-garis singgung lingkaran yang tegak lurus f, lalu tentukan persamaan garis singgungnya.

Penyelesaian.

- **Langkah 1 – Pusat dan jari-jari.** $M(2, 1)$, $r^2 = 4 + 1 + 95 = 100$, jadi $r = 10$.
- **Langkah 2 – Arah jari-jari.** Garis singgung tegak lurus f, jadi jari-jari ke titik singgung searah f. Arah f adalah $(4, 3)$ dengan panjang $\sqrt{16 + 9} = 5$. Vektor satuannya $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$,

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

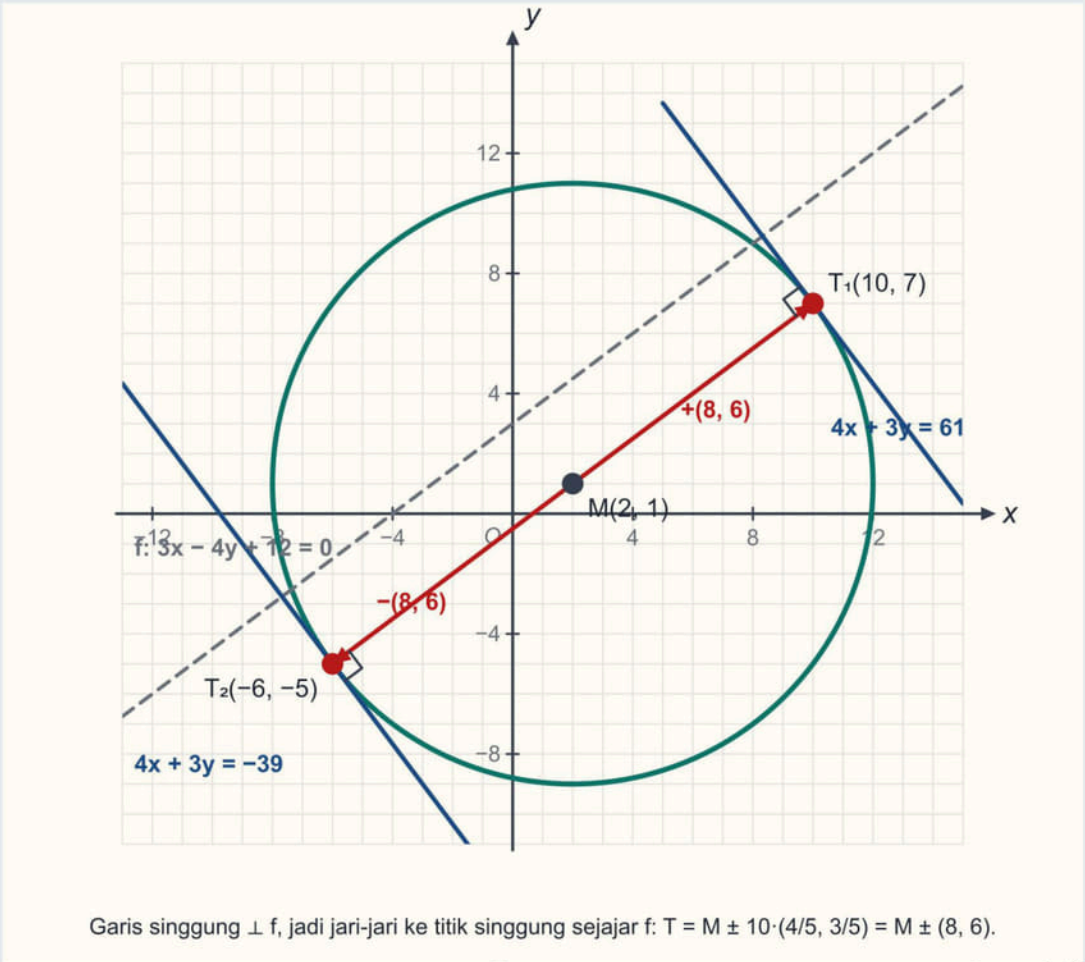
sehingga $r\vec{u} = 10\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (8, 6)$.

- **Langkah 3 – Titik singgung.** $T = (2, 1) \pm (8, 6)$, yaitu $T_1(10, 7)$ dan $T_2(-6, -5)$ (lihat Gambar 2.17).
- **Langkah 4 – Garis singgung** (bagi adil pada $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 100$):

$T_1:\ 8(x-2) + 6(y-1) = 100 \ \Rightarrow\ 4x + 3y = 61$

$T_2:\ -8(x-2) - 6(y-1) = 100 \ \Rightarrow\ 4x + 3y = -39$

Cek ulang. (1) $8^2 + 6^2 = 100$ dan $(-8)^2 + (-6)^2 = 100$, jadi kedua titik pada lingkaran. (2) Titik tengahnya $\left(\frac{10-6}{2}, \frac{7-5}{2}\right) = (2, 1)$, sama dengan pusat. (3) $\overrightarrow{MT_1} = (8, 6) = 2(4, 3)$, searah f. (4) Gradien garis singgung $-\frac{4}{3}$ dan gradien f adalah $\frac{3}{4}$, hasil kalinya -1. Rumus bergradien juga memberi hasil yang sama: $y - 1 = -\frac{4}{3}(x-2) \pm 10 \cdot \frac{5}{3}$, yaitu $4x + 3y = 11 \pm 50$, jadi 61 atau -39.



Gambar 2.17 Contoh 3: garis singgung tegak lurus f, sehingga jari-jari ke titik singgung sejajar f. Dari $M(2, 1)$ bergerak $\pm(8, 6)$ diperoleh $T_1(10, 7)$ dan $T_2(-6, -5)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Mengapa cek nomor 1 saja tidak cukup. Titik $(8, -7)$ dan $(-4, 9)$ juga terletak pada lingkaran, karena keduanya $M \pm (6, -8)$ dan $6^2 + 8^2 = 100$. Itulah titik singgung garis yang **sejajar** f (searah normal $(3, -4)$). Titik $(8, 9)$ dan $(-4, -7)$, yaitu $M \pm (6, 8)$ dengan komponen arah tertukar, **juga** terletak pada lingkaran. Garis singgung di titik-titik itu tidak

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

sejajar maupun tegak lurus f. Jadi kesalahan "tegak lurus ditukar sejajar" dan "komponen arah tertukar" tetap menghasilkan titik pada lingkaran. Hanya cek nomor 3 dan 4 yang dapat menangkapnya. Pembuat soal dapat memasang titik seperti ini sebagai pengecoh.

5. Garis singgung dari titik di luar lingkaran

Letak titik. Untuk titik $P(x_1, y_1)$ dan lingkaran berpusat (a, b) berjari-jari r, hitung **kuasa** titik:

$$K = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$$

Bila $K > 0$, titik di luar lingkaran dan ada dua garis singgung. Bila $K = 0$, titik pada lingkaran dan ada satu garis singgung. Bila $K < 0$, titik di dalam lingkaran dan tidak ada garis singgung.

Panjang garis singgung. Misalkan A titik singgung. Segitiga MAP siku-siku di A (alat a). Menurut Pythagoras:

$$PA = \sqrt{MP^2 - r^2} = \sqrt{K}$$

Jangan tertukar: MP adalah jarak titik ke **pusat**, sedangkan PA adalah panjang garis singgung dari titik ke **titik singgung**.

Cara 1 – garis kutub. Terapkan aturan bagi adil pada titik luar P. Hasilnya **bukan** garis singgung, melainkan **garis kutub**, yaitu garis yang memuat **kedua** titik singgung (disebut juga tali busur singgung). Potongkan garis kutub dengan lingkaran untuk mendapat kedua titik singgung. Lalu pakai bagi adil di setiap titik singgung untuk mendapat kedua garis singgung.

Mengapa begitu? Untuk lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, misalkan (x_A, y_A) titik singgung. Garis singgungnya $x_A x + y_A y = r^2$ melalui P, jadi $x_A x_1 + y_A y_1 = r^2$. Kalimat itu sama artinya dengan "titik A terletak pada garis $x_1 x + y_1 y = r^2$". Hal yang sama berlaku untuk titik singgung kedua.

Cara 2 – gradien. Tulis garis melalui P: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Syarat jarak pusat ke garis sama dengan r menghasilkan persamaan kuadrat dalam m. Kedua akarnya adalah gradien kedua garis singgung. Bila persamaan kuadratnya hanya memberi satu nilai m, garis singgung yang lain adalah garis tegak $x = x_1$.

Tali busur singgung. Ruas AB yang menghubungkan kedua titik singgung tegak lurus MP dan dibagi dua sama panjang oleh MP. Setengah AB adalah tinggi segitiga siku-siku MAP ke sisi miring MP, yaitu hasil kali kedua sisi siku-siku dibagi sisi miring:

$$AB = \frac{2 \cdot r \cdot PA}{MP}, \qquad \text{jarak pusat ke tali busur } AB = \frac{r^2}{MP}$$

Contoh terselesaikan 4: dari titik di luar lingkaran

Dari titik $P(7, 1)$ ditarik dua garis singgung ke lingkaran $x^2 + y^2 = 25$. Tentukan panjang garis singgung, kedua titik singgung, persamaan kedua garis singgung, dan panjang tali busur singgung.

Penyelesaian.

Letak dan panjang. $K = 49 + 1 - 25 = 25 > 0$, jadi P di luar lingkaran. Panjang garis

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

singgung $PA = \sqrt{25} = 5$.

Garis kutub. $7x + 1 \cdot y = 25$, jadi $y = 25 - 7x$. Substitusikan ke lingkaran:

$$x^2 + (25 - 7x)^2 = 25 \;\Rightarrow\; 50x^2 - 350x + 600 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 7x + 12 = 0$$

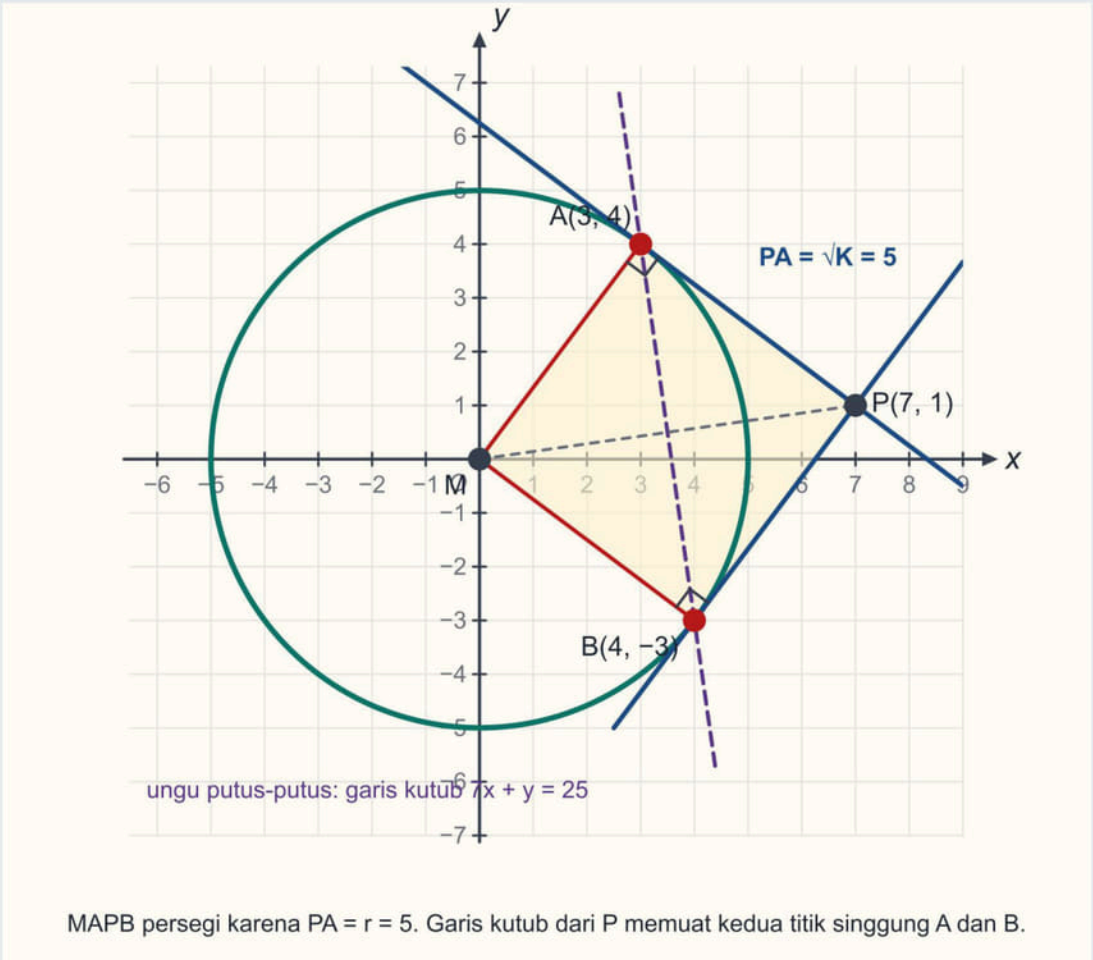
Jadi $x = 3$ (dengan $y = 4$) atau $x = 4$ (dengan $y = -3$). Titik singgungnya $A(3, 4)$ dan $B(4, -3)$.

Garis singgung. Di A: $3x + 4y = 25$. Di B: $4x - 3y = 25$. Cek melalui P: $21 + 4 = 25$ dan $28 - 3 = 25$.

Cek dengan cara gradien. Garis $y - 1 = m(x - 7)$ ditulis $mx - y + 1 - 7m = 0$. Syarat menyinggung:

$$\frac{|1 - 7m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \;\Rightarrow\; (1 - 7m)^2 = 25(m^2 + 1) \;\Rightarrow\; 12m^2 - 7m - 12 = 0$$

Faktorkan: $(4m + 3)(3m - 4) = 0$, jadi $m = -\frac{3}{4}$ atau $m = \frac{4}{3}$. Gradien ini cocok dengan $3x + 4y = 25$ dan $4x - 3y = 25$. Gambar 2.18 merangkum seluruh contoh ini.



Gambar 2.18 Dari $P(7, 1)$ ditarik dua garis singgung ke $x^2 + y^2 = 25$. Garis kutub $7x + y = 25$ (ungu) memuat kedua titik singgung $A(3, 4)$ dan $B(4, -3)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Tali busur. $MP = \sqrt{50}$. Rumus memberi $AB = 2 \cdot 5 \cdot 5/\sqrt{50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Cek

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

langsung: $AB = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{50}$.

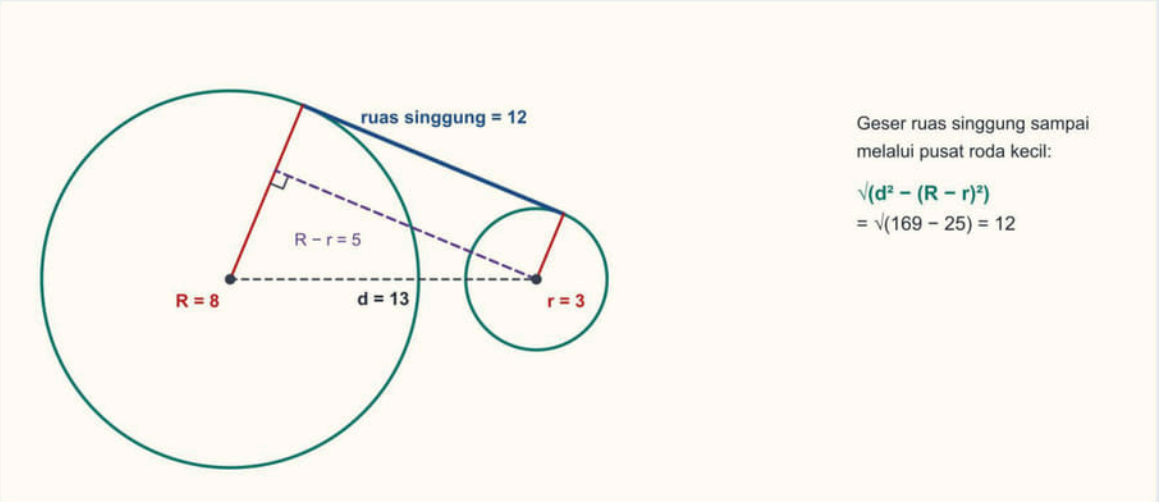
Perhatikan: hasil kali kedua gradien -1, jadi kedua garis singgung saling tegak lurus. Ini terjadi karena $PA = r$, sehingga $MAPB$ berbentuk persegi. Jangan menganggap hal ini selalu berlaku.

6. Garis singgung persekutuan dua lingkaran (sabuk dan rantai)

Sabuk yang melilit dua roda atau puli adalah gabungan **garis singgung persekutuan** dan **busur**. Misalkan jari-jari kedua lingkaran R dan r dengan $R \geq r$, dan jarak kedua pusat d.

Jenis	Bentuk sabuk	Panjang ruas singgung
Persekutuan luar	tidak bersilangan	$\sqrt{d^2 - (R-r)^2}$
Persekutuan dalam	bersilangan	$\sqrt{d^2 - (R+r)^2}$

Mengapa? Geser ruas singgung sejajar dirinya sendiri sampai melalui pusat lingkaran kecil. Terbentuk segitiga siku-siku dengan sisi miring d dan satu sisi siku-siku $R - r$ (luar) atau $R + r$ (dalam). Sisi siku-siku yang lain adalah panjang ruas singgung. Persekutuan dalam hanya ada bila $d > R + r$, yaitu bila kedua lingkaran terpisah. Gambar 2.19 memperlihatkan pergeseran itu pada roda gigi Contoh 5.



Gambar 2.19 Dua roda berjari-jari 8 dan 3 dengan jarak pusat 13. Ruas singgung persekutuan luar digeser sampai melalui pusat roda kecil, membentuk segitiga siku-siku bersisi 5, 12, 13. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Bila $R \neq r$, sabuk **tidak** melilit setengah lingkaran pada setiap roda. Misalkan $\sin\alpha = (R-r)/d$. Roda besar dililit sepanjang busur bersudut pusat $180^\circ + 2\alpha$, dan roda kecil $180^\circ - 2\alpha$. Panjang busurnya dihitung seperti di sub bab 2.5.

Contoh terselesaikan 5: panjang ruas singgung persekutuan

Dua roda gigi sepeda berjari-jari 8 cm dan 3 cm, dengan jarak kedua pusat 13 cm (ukuran disusun untuk contoh). Tentukan panjang ruas singgung persekutuan luar dan dalam.

Penyelesaian. Luar: $\sqrt{13^2 - (8-3)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm. Dalam: $13 > 8 + 3$,

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

jadi ada, dan panjangnya $\sqrt{169-121}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\approx 6{,}93$ cm. Rantai yang tidak bersilangan melilit roda besar sepanjang busur $180^\circ+2\alpha$ dengan $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, yaitu sekitar $225{,}2^\circ$, jauh lebih dari setengah lingkaran.

7. Menilai beberapa pernyataan sekaligus

Contoh terselesaikan 6: menilai pernyataan

Pada denah sebuah taman (satuan meter; data disusun untuk contoh), tepi kolam bundar mempunyai persamaan $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. Nilailah setiap pernyataan berikut.

Penyelesaian. Pusat $M(2,-3)$ dan $r^2=4+9+12=25$, jadi $r=5$.

Pernyataan	Nilai	Alasan
Jalan lurus $3x+4y=19$ menyinggung tepi kolam di titik $(5,1)$	Benar	$(5,1)$ pada lingkaran: $25+1-20+6-12=0$; bagi adil: $3(x-2)+4(y+3)=25$, yaitu $3x+4y=19$
Jalan lurus $4x-3y+8=0$ menyinggung tepi kolam di titik $(-2,0)$	Benar	jarak pusat $=\lvert 8+9+8\rvert/5=5=r$; $(-2,0)$ pada lingkaran $(4+8-12=0)$ dan pada garis $(-8+8=0)$
Jalan lurus $y=2x+3$ menyinggung tepi kolam	Salah	jarak pusat $=\lvert 4+3+3\rvert/\sqrt{5}=2\sqrt{5}\approx 4{,}47<5$, jadi memotong
Panjang garis singgung dari lampu di $P(9,-2)$ ke tepi kolam adalah $\sqrt{50}$ m	Salah	$\sqrt{50}$ adalah jarak MP; panjang garis singgung $\sqrt{50-25}=5$ m
Titik singgung garis singgung yang sejajar sumbu X adalah $(2,2)$ dan $(2,-8)$	Benar	normal sumbu X adalah $(0,1)$, jadi $T=M\pm 5(0,1)$

Pernyataan keempat adalah pola pengecoh yang sering dipakai: angka $\sqrt{50}$ memang muncul dalam hitungan, tetapi sebagai jarak ke pusat, bukan panjang garis singgung.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal garis singgung

1. **Buat sketsa.** Gambar pusat, lingkaran, dan garis yang diketahui. Perkirakan di sisi mana titik singgung berada. Sketsa kasar sudah cukup untuk menolak opsi yang jelas mustahil.
2. **Tentukan pusat dan jari-jari.** Dari bentuk umum $x^2+y^2+Ax+By+C=0$: pusat $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ dan $r^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$. Dari gambar: jari-jari = jarak pusat ke titik yang dilalui lingkaran.
3. **Kenali jenis soal.** Titik pada lingkaran diketahui → bagi adil. Arah diketahui → rumus bergradien atau $M\pm r\vec{u}$. Titik di luar lingkaran → kuasa, panjang garis singgung, garis kutub.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. **Terjemahkan kata kunci.** "Garis singgung tegak lurus f" berarti "jari-jari sejajar f". "Garis singgung sejajar g" berarti "jari-jari searah normal g". Tulis kalimat ini di kertas coretan.
5. **Cari dua jawaban.** Bila arah atau titik luar diketahui, hampir selalu ada dua garis singgung dan dua titik singgung.
6. **Cek ulang empat langkah** (bagian 4), lalu nilai **setiap** opsi PG kompleks secara terpisah.

Jebakan khas

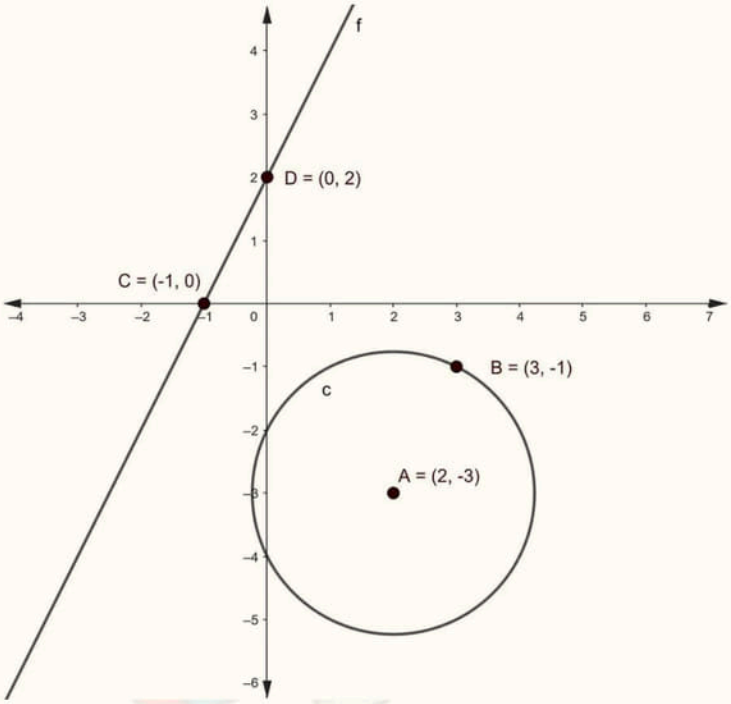
Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
"Tegak lurus" ditukar "sejajar"	Mengambil $M \pm r\cdot$ (normal f) padahal garis singgung harus tegak lurus f	Tulis: garis singgung $\perp f \Rightarrow$ jari-jari $\parallel f$
Hanya satu jawaban	Berhenti setelah menemukan satu titik singgung	Ingat tanda $\pm$: selalu ada dua titik, ujung satu diameter
Titik yang sudah tergambar diabaikan	Titik B pada gambar dianggap "hanya titik bantu", padahal termasuk titik singgung (SA-16)	Uji setiap opsi dengan empat langkah cek
Titik pada garis f dianggap titik singgung	Memilih titik potong atau titik yang dilalui f	Titik singgung harus terletak pada lingkaran
Vektor arah tidak dibagi panjangnya	Menulis $T = M \pm r(4,3)$ sehingga jaraknya ke pusat $5r$	Pakai vektor satuan; cek jarak $MT = r$
Bagi adil dipakai untuk titik di luar	Menganggap garis kutub sebagai garis singgung	Cek dulu titiknya pada lingkaran; bila di luar, hasilnya garis kutub
Panjang garis singgung disamakan dengan jarak ke pusat	Menjawab $\sqrt{50}$ pada Contoh 6	Panjang garis singgung $= \sqrt{MP^2 - r^2}$
Tanda pusat dari bentuk umum	$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ dianggap berpusat $(-2, 3)$	Pusat $= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2, -3)$
Sabuk dianggap melilit setengah lingkaran	Busur roda besar dihitung 180° padahal $R \neq r$	Pakai $180^\circ \pm 2\alpha$ dengan $\sin\alpha = (R - r)/d$

BEDAH SOAL ASLI

Soal berikut (SA-16) dijawab benar hanya oleh 9,74 % peserta. Datanya sederhana: pusat $A(2, -3)$, lingkaran melalui $B(3, -1)$, dan garis f melalui $C(-1, 0)$ dan $D(0, 2)$. Kesulitannya ada pada penerjemahan kata "tegak lurus" dan pada bentuk PG kompleks. Perhatikan tiga hal sebelum menjawab. Pertama, arah f dapat dibaca langsung dari $\overrightarrow{CD}$; bandingkan panjang vektor itu dengan jari-jari AB sebelum mencari vektor satuan. Kedua, titik B yang sudah tergambar jangan langsung dibuang. Ketiga, uji setiap opsi: apakah titiknya pada lingkaran, dan apakah jari-jari ke titik itu searah f. Kerjakan dulu dengan langkah 1–6 sebelum membaca pembahasannya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Perhatikan gambar berikut. Lingkaran c berpusat di $A(2, -3)$ dan melalui $B(3, -1)$, sedangkan garis f melalui $C(-1, 0)$ dan $D(0, 2)$.
Tentukan semua koordinat titik singgung dari garis-garis singgung lingkaran yang **tegak lurus** terhadap garis f!
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(3, 1)$
☐ B. $(1, -5)$
☐ C. $(-1, 5)$
☐ D. $(3, -1)$
☐ E. $(-3, -1)$

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: B, D**

Langkah 1 – Jari-jari. $r^2 = (3-2)^2 + (-1+3)^2 = 1 + 4 = 5$, jadi $r = \sqrt{5}$.

Langkah 2 – Gradien. $m_f = \dfrac{2-0}{0-(-1)} = 2$. Garis singgung tegak lurus $f \to m = -\dfrac{1}{2}$.

Langkah 3 – Letak titik singgung. Jari-jari ke titik singgung tegak lurus garis singgung, jadi **sejajar** garis f (arah $(1, 2)$). Panjang vektor $(1, 2)$ adalah $\sqrt{5} = r$. Maka titik singgungnya

$A \pm (1, 2) = (2+1, -3+2) = (3, -1) \quad \text{dan} \quad (2-1, -3-2) = (1, -5)$

Cek dengan rumus garis singgung bergradien:

$y + 3 = -\frac{1}{2}(x-2) \pm \sqrt{5}\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}(x-2) \pm \frac{5}{2}$.

• Garis $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ melalui $(3, -1)$ ✓; garis $y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$ melalui $(1, -5)$ ✓.

Analisis pilihan: $(3, 1)$, $(-1, 5)$, $(-3, -1)$ tidak terletak pada lingkaran (mis. $(3-2)^2 + (1+3)^2 = 17 \neq 5$). **Jebakan:** $(3, -1)$ adalah titik B yang sudah tergambar, dan memang salah satu titik singgung.

Jawaban: $(1, -5)$ **dan** $(3, -1)$.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

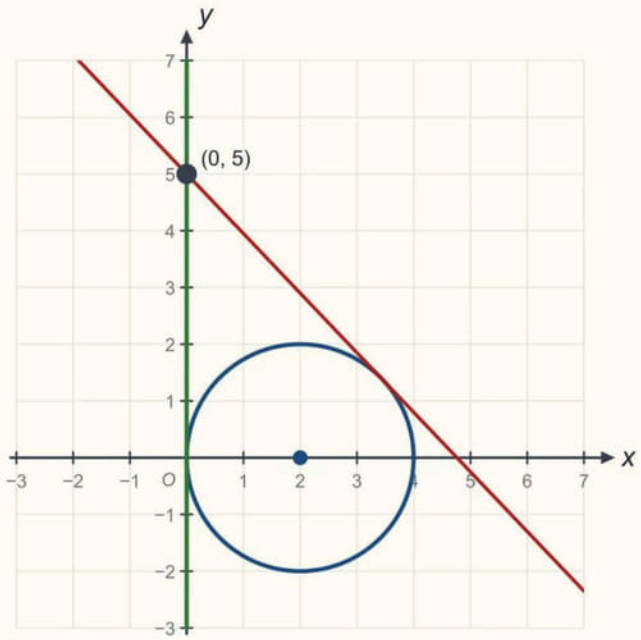
Soal berikut memakai titik di luar lingkaran. Kerjakan dengan syarat "jarak pusat ke garis sama dengan jari-jari", lalu perhatikan hasilnya: perhitungan gradien hanya memberi **satu** nilai m, padahal dari titik di luar lingkaran selalu ada dua garis singgung.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Dari titik $(0, 5)$ ditarik garis-garis yang menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x = 0$ (lihat gambar).

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Titik $(0, 5)$ terletak di dalam lingkaran.

☐ B. Garis singgung berbentuk $y = mx + 5$ hanya ada untuk satu nilai m, yaitu $m = -\frac{21}{20}$.

☐ C. Panjang ruas garis singgung dari $(0, 5)$ ke titik singgung adalah $\sqrt{29}$.

☐ D. Garis $x = 0$ juga menyinggung lingkaran dan melalui $(0, 5)$.

☐ E. Titik singgung garis $x = 0$ pada lingkaran adalah $O(0, 0)$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: B, D, E**

Konsep: garis menyinggung lingkaran bila jarak pusat ke garis sama dengan jari-jari. Dari titik di luar lingkaran selalu ada **dua** garis singgung; bila perhitungan gradien hanya memberi satu, garis singgung lainnya tegak.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — $0 + 25 - 0 = 25 > 0$, jadi titik itu di luar lingkaran.
- B ✓ — pusat $(2, 0), r = 2$: $\frac{|2m+5|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow 4m^2 + 20m + 25 = 4m^2 + 4 \Rightarrow m = -\frac{21}{20}$.
- C ✗ — $\sqrt{29}$ adalah jarak ke pusat; panjang ruas singgung $\sqrt{29 - 4} = 5$.
- D ✓ — jarak pusat $(2, 0)$ ke garis $x = 0$ adalah 2 = r. Garis tegak ini tidak dapat ditulis $y = mx + 5$, sehingga hanya muncul satu nilai m.
- E ✓ — $x = 0$ disubstitusi: $y^2 = 0$, satu titik $(0, 0)$.

Jawaban: B, D, dan E.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: garis singgung kedua adalah garis tegak $x = 0$, yang tidak dapat ditulis dalam bentuk $y = mx + 5$. Karena itu, bila cara gradien hanya menghasilkan satu garis, selalu periksa garis tegak yang melalui titik itu. Pernyataan 3 memakai pengecoh yang sama dengan Contoh 6: $\sqrt{29}$ adalah jarak titik ke pusat, bukan panjang ruas garis singgung $\sqrt{29 - 4} = 5$.

✎ LATIHAN

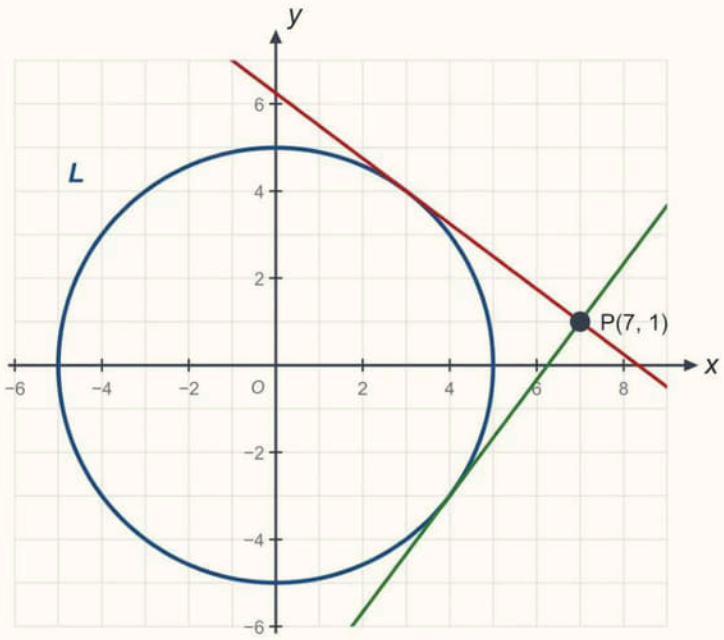
Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu pusat, jari-jari, dan jenis garis singgung yang diminta.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Dari titik $P(7, 1)$ di luar lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ ditarik dua garis singgung, seperti pada gambar.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Salah satu titik singgungnya adalah $(3, 4)$.

☐ B. Kedua garis singgung itu saling sejajar.

☐ C. Panjang ruas garis singgung dari P ke titik singgung adalah 5.

☐ D. Garis $4x - 3y = 25$ adalah salah satu garis singgung itu.

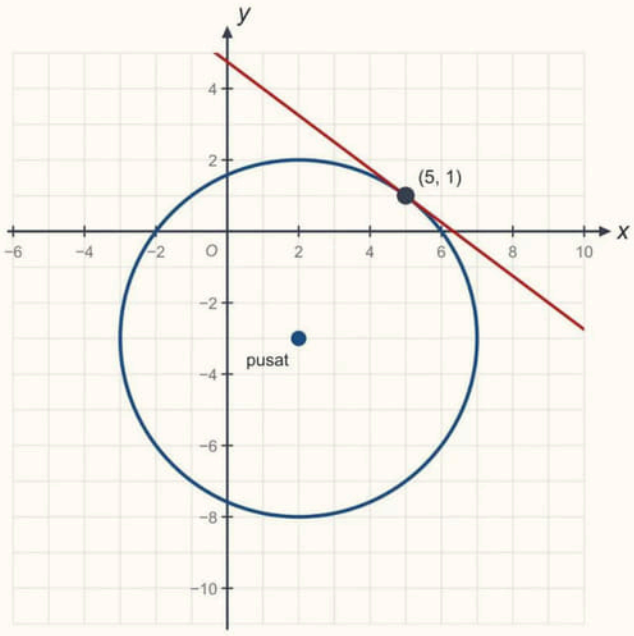
☐ E. Kedua garis singgung membentuk sudut 60° di titik P.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Titik $(5, 1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Gambar menunjukkan lingkaran itu dan garis singgungnya di $(5, 1)$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Garis singgung di titik $(5, 1)$ adalah $3x + 4y = 19$.

☐ B. Garis singgung di titik $(5, 1)$ melalui pusat lingkaran.

☐ C. Garis $3x + 4y = -31$ juga menyinggung lingkaran itu.

☐ D. Jarak pusat lingkaran ke garis $3x + 4y = 19$ adalah 4.

☐ E. Garis $4x - 3y = 17$ melalui titik $(5, 1)$ dan tegak lurus garis singgung di titik itu.

Kunci singkat: 1. A, C, D 2. A, C, E

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Bila garis singgung harus tegak lurus garis f, ke arah mana jari-jari ke titik singgung? Bagaimana bila garis singgung harus sejajar f?
- Mengapa titik yang terletak pada lingkaran belum tentu titik singgung yang diminta? Sebutkan dua cek lain yang harus kamu lakukan.
- Dari titik di luar lingkaran, apa beda jarak titik ke pusat dengan panjang garis singgung, dan bagaimana menghitung yang kedua dari yang pertama?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 2.4: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-2.4

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran

MATTL-2.5

◎ APA YANG DIUJI

Di TKA, lingkaran hampir selalu muncul sebagai **benda nyata**: rambu, ornamen kaca, motif lantai, logo, wiper, atau kipas. Bentuknya gabungan beberapa bangun: lingkaran, persegi, juring, tembereng, dan cincin. Kamu diminta menghitung **luas** setiap bagian (misalnya untuk menaksir banyak cat) atau **panjang** seluruh garis pembentuknya (misalnya untuk membeli bahan kerangka), lalu mengambil keputusan.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-17	Menganalisis hubungan luas area dari suatu objek (gabungan beberapa bangun datar) untuk menyelesaikan masalah	22,51 %
SA-18	Menentukan kesesuaian ukuran-ukuran objek berdasarkan konsep lingkaran dalam konteks permasalahan sehari-hari	53,82 %

Kedua soal memakai rumus yang sama sederhananya, tetapi hasilnya sangat berbeda. SA-18 dijawab benar oleh lebih dari separuh peserta, sedangkan SA-17 hanya oleh sekitar 1 dari 4–5 peserta. Penyebabnya: SA-17 meminta luas **lima daerah berwarna**, lalu membandingkan **gabungan** daerah (misalnya "setengah hitam dan biru") dengan satu daerah lain dalam bentuk PG kompleks. Satu luas yang salah atau satu daerah yang terhitung dua kali sudah cukup untuk menggagalkan jawaban. Jadi yang diuji bukan hafalan rumus, melainkan **ketelitian membagi bangun** dan **membandingkan**.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menghitung luas dan keliling lingkaran, cincin, juring, busur, dan tembereng;
- membagi bangun gabungan menjadi bagian-bagian yang dihitung tepat satu kali, lalu menjumlahkan atau mengurangkannya;
- menghitung ukuran (jari-jari, sisi) secara mundur dari luas yang diketahui;
- menghitung panjang seluruh kerangka (busur dan ruas garis) dan memutuskan apakah bahan yang tersedia "pas";
- menilai beberapa pernyataan perbandingan luas sekaligus (PG kompleks atau Benar/Salah).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Lingkaran utuh dan cincin

Untuk lingkaran berjari-jari r (diameter $d = 2r$):

$$L = \pi r^2, \qquad K = 2\pi r = \pi d$$

Nilai π dipakai sesuai perintah soal: $3{,}14$ atau $\frac{22}{7}$. Pendekatan $\frac{22}{7}$ biasanya dipilih bila jari-jarinya kelipatan 7 agar hitungan bulat.

Cincin adalah daerah di antara dua lingkaran sepusat berjari-jari R (luar) dan r (dalam). Luasnya lingkaran besar dikurangi lingkaran kecil:

$$L_{\text{cincin}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Hati-hati: $\pi(R^2 - r^2)$ **tidak sama** dengan $\pi(R - r)^2$. Misalnya untuk $R = 20$ dan $r = 14$: $R^2 - r^2 = 204$, sedangkan $(R - r)^2 = 36$.

Lingkaran dan persegi. Dua susunan yang paling sering muncul:

- **Lingkaran di dalam persegi** yang menyinggung keempat sisinya: diameter = sisi, jadi $r = \frac{s}{2}$.
- **Persegi di dalam lingkaran** yang keempat titik sudutnya pada lingkaran: diagonal persegi = diameter $2r$. Sisi persegi $r\sqrt{2}$ dan luasnya $\frac{1}{2} \cdot (2r)^2 = 2r^2$.

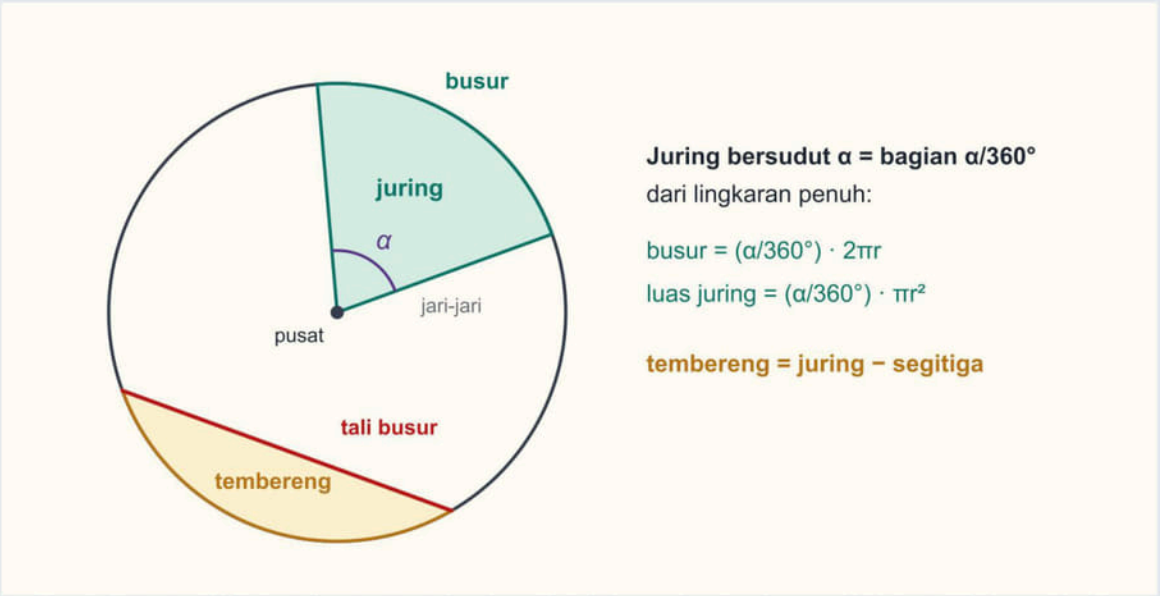
Contoh: lingkaran berjari-jari 10 cm memuat persegi seluas $2 \cdot 100 = 200$ cm². Luas lingkaran $3{,}14 \cdot 100 = 314$ cm², jadi daerah di luar persegi tetapi di dalam lingkaran luasnya 114 cm².

2. Juring dan busur

Juring adalah daerah yang dibatasi dua jari-jari dan sebuah busur, seperti sepotong pizza. **Busur** adalah bagian keliling lingkaran. Bila sudut pusatnya α, juring itu adalah bagian $\frac{\alpha}{360^\circ}$ dari lingkaran penuh (alasannya: lingkaran penuh bersudut pusat 360°, dan juring dengan sudut dua kali lebih besar memuat busur dan luas dua kali lebih besar, jadi busur dan luas **sebanding** dengan sudutnya; lihat Gambar 2.20):

$$\text{panjang busur} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r, \qquad \text{luas juring} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.20 Juring (dibatasi dua jari-jari dan busur), tali busur, dan tembereng (dibatasi tali busur dan busur). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Pecahan yang sering muncul: $90^\circ = \frac{1}{4}, 60^\circ = \frac{1}{6}, 120^\circ = \frac{1}{3}, 45^\circ = \frac{1}{8}, 180^\circ = \frac{1}{2}$. Bila sudutnya dalam radian θ, rumusnya menjadi busur $= r\theta$ dan luas juring $= \frac{1}{2}r^2\theta$.

Dua hal yang sering terlupa:

- **Keliling juring** = busur + **dua jari-jari**, bukan busurnya saja.
- **Juring cincin** (daerah di antara dua busur sepusat dengan sudut sama, misalnya daerah sapuan wiper) luasnya $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi(R^2 - r^2)$.

Contoh terselesaikan 1: kipas lipat

Sebuah kipas lipat terbuka membentuk juring bersudut 150° dengan jari-jari 21 cm. Kain kipas dipasang mulai jarak 7 cm sampai 21 cm dari poros (ukuran disusun untuk contoh). Gunakan $\pi = \frac{22}{7}$. Tentukan panjang busur tepi luar, luas juring penuh, keliling juring penuh, dan luas kain.

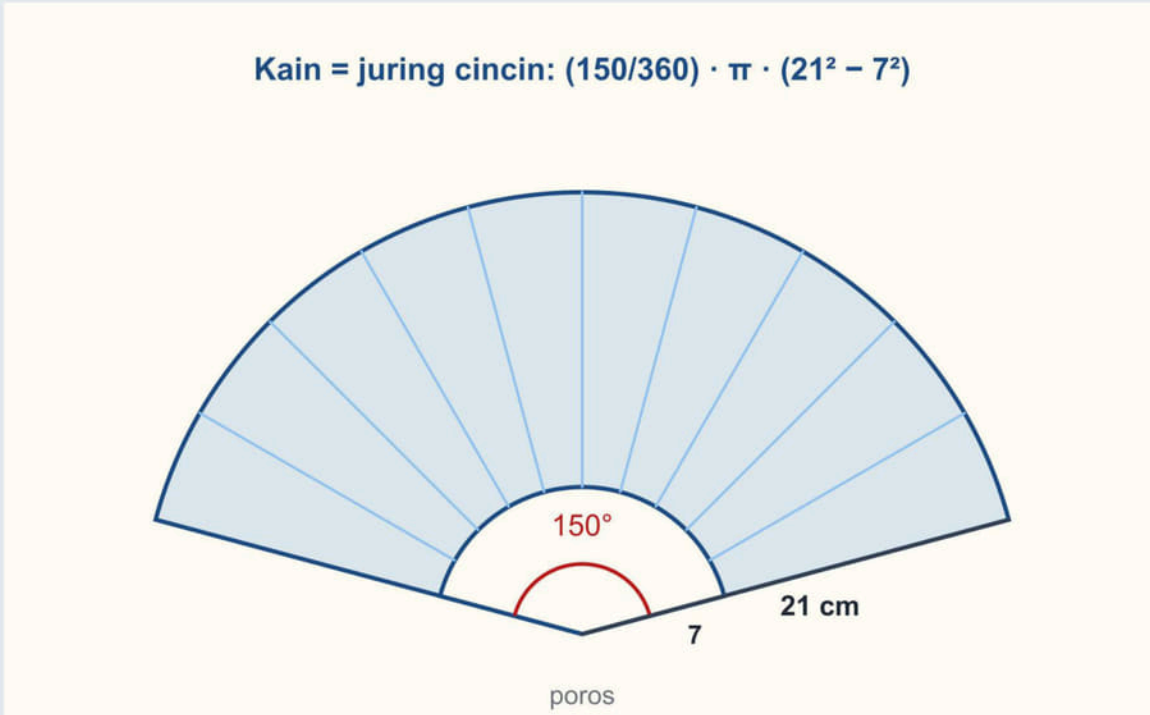
Penyelesaian. Bagian lingkarannya $\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$.

- Busur tepi luar: $\frac{5}{12} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = \frac{5}{12} \times 132 = 55$ cm.
- Luas juring penuh: $\frac{5}{12} \times \frac{22}{7} \times 441 = \frac{5}{12} \times 1.386 = 577{,}5$ cm².
- Keliling juring penuh: $55 + 21 + 21 = 97$ cm.
- Kain berbentuk juring cincin:

$$L = \frac{5}{12} \times \frac{22}{7} \times (21^2 - 7^2) = \frac{5}{12} \times \frac{22}{7} \times 392 = \frac{5}{12} \times 1.232 \approx 513{,}33 \text{ cm}^2$$

Cek kewajaran: luas kain harus lebih kecil daripada juring penuh ($513{,}33 < 577{,}5$), dan selisihnya adalah juring kecil berjari-jari 7 cm: $\frac{5}{12} \times \frac{22}{7} \times 49 \approx 64{,}17$ cm². Memang $577{,}5 - 64{,}17 = 513{,}33$. Bentuk kain itu terlihat pada Gambar 2.21.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.21 Kipas lipat bersudut 150°: kain menempati juring cincin di antara jari-jari 7 cm dan 21 cm. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Tembereng dan tali busur

Tali busur adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran. **Tembereng** adalah daerah di antara tali busur dan busurnya. Tembereng diperoleh dengan membuang segitiga dari juring (lihat Gambar 2.22):

$$L_{\text{tembereng}} = L_{\text{juring}} - L_{\text{segitiga}}, \qquad L_{\text{segitiga}} = \tfrac{1}{2} r^2 \sin\alpha$$

Segitiga yang dimaksud dibentuk oleh dua jari-jari dan tali busur. **Mengapa luasnya $\tfrac{1}{2} r^2 \sin\alpha$?** Luas segitiga = $\tfrac{1}{2} \times$ alas $\times$ tinggi. Ambil satu jari-jari sebagai alas (r). Tinggi dari ujung jari-jari yang lain ke alas itu adalah $r \sin\alpha$. Panjang tali busurnya $2r \sin\tfrac{\alpha}{2}$, karena garis dari pusat ke titik tengah tali busur membagi segitiga menjadi dua segitiga siku-siku bersudut $\tfrac{\alpha}{2}$. Sudut istimewa:

Sudut pusat α	Luas segitiga	Panjang tali busur
60°	$\tfrac{\sqrt{3}}{4} r^2$ (segitiga sama sisi)	r
90°	$\tfrac{1}{2} r^2$	$r\sqrt{2}$
120°	$\tfrac{\sqrt{3}}{4} r^2$ (karena $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$)	$r\sqrt{3}$

Misalnya tembereng 90° pada lingkaran berjari-jari 12 cm ($\pi = 3{,}14$): juring $\tfrac{1}{4} \times 3{,}14 \times 144 = 113{,}04$ cm², segitiga $\tfrac{1}{2} \times 144 = 72$ cm², jadi tembereng $41{,}04$ cm².

Irisan dua lingkaran (daerah yang termasuk kedua lingkaran) terdiri atas **dua tembereng**, satu dari setiap lingkaran, yang dipisahkan oleh tali busur penghubung kedua titik potong. Sudut pusat setiap tembereng dicari dari segitiga yang dibentuk kedua pusat dan satu titik potong.

Contoh terselesaikan 2: papan nama yang dipotong

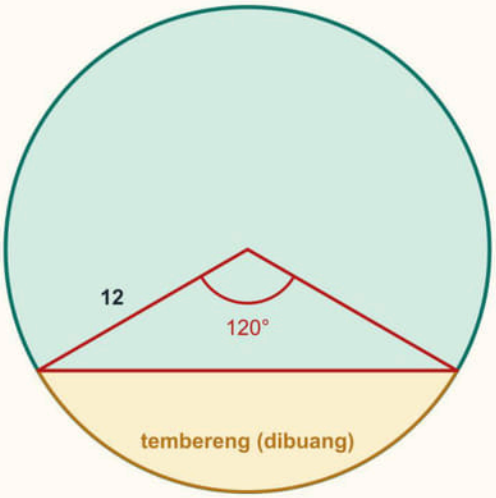
Papan nama berbentuk lingkaran berjari-jari 12 cm. Bagian bawahnya dipotong lurus sepanjang tali busur yang menghadap sudut pusat 120° (ukuran disusun untuk contoh). Gunakan $\pi = 3{,}14$ dan $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Tentukan luas potongan yang terbuang dan keliling potongan itu.

Penyelesaian. Potongan yang terbuang adalah tembereng 120°.

- Juring: $\tfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times 144 = 150{,}72$ cm².
- Segitiga: $\tfrac{1}{2} \times 144 \times \sin 120^\circ = 36\sqrt{3} \approx 62{,}35$ cm².
- Tembereng: $150{,}72 - 62{,}35 = 88{,}37$ cm².
- Keliling potongan = busur + tali busur
  $= \tfrac{1}{3} \times 2 \times 3{,}14 \times 12 + 12\sqrt{3} \approx 25{,}12 + 20{,}78 = 45{,}90$ cm.

Perhatikan bahwa keliling tembereng memakai **tali busur**, bukan dua jari-jari. Dua jari-jari hanya termasuk keliling juring.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



juring 120° = ⅓ · π · 12²

segitiga = ½ · 12² · sin 120°

tembereng = juring − segitiga

tali busur = 2 · 12 · sin 60° = 12√3

Gambar 2.22 Papan nama Contoh 2: tembereng 120° (kuning) diperoleh dari juring 120° dikurangi segitiga yang dibentuk dua jari-jari dan tali busur. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. Luas gabungan: tambah dan kurang

Prinsip utamanya: **setiap daerah dihitung tepat satu kali**. Ada tiga cara yang sering dipadukan:

1. **Menjumlahkan** bagian yang tidak bertumpuk.
2. **Mengurangkan** dari bangun besar: daerah sisa = bangun besar − bagian yang dibuang (misalnya pojok persegi di luar lingkaran = persegi − lingkaran).
3. **Tumpang tindih**: luas gabungan dua daerah = luas pertama + luas kedua − luas irisannya. Contohnya tanda tambah yang terdiri atas dua lengan bersilangan: bagian tengah termasuk kedua lengan, jadi harus dikurangkan sekali.

Untuk tanda tambah dengan dua lengan persegi panjang berukuran $p \times w$ yang bersilangan tegak lurus di tengah, luasnya $2pw - w^2$. Suku w^2 adalah persegi tengah yang terhitung dua kali. Misalnya lengan 24×6 cm: $2 \times 144 - 36 = 252$ cm², bukan 288 cm².

Pendekatan dan batas aman. Kadang sebuah bentuk tidak dapat dihitung tepat dengan rumus sekolah, misalnya ujung lengan yang melengkung mengikuti lingkaran. Hitung pendekatannya, lalu lihat seberapa jauh hasilnya dari batas perbandingan. Bila selisihnya jauh lebih besar daripada kesalahan pendekatan, kesimpulan tetap aman. Bila hasilnya sangat dekat dengan batas, hitung lebih teliti atau jangan membulatkan terlalu dini.

Pola yang sering muncul: empat juring seperempat lingkaran dengan jari-jari sama di empat sudut persegi bersama-sama sama luas dengan **satu lingkaran penuh**.

Dalam konteks cat, **banyak cat sebanding dengan luas** yang dicat. Pertanyaan "cat mana yang lebih banyak dipakai" adalah pertanyaan "daerah mana yang lebih luas".

Cara cek ulang yang ampuh: **jumlah luas semua warna harus sama dengan luas bangun terluar.**

Contoh terselesaikan 3: menilai pernyataan (pola SA-17)

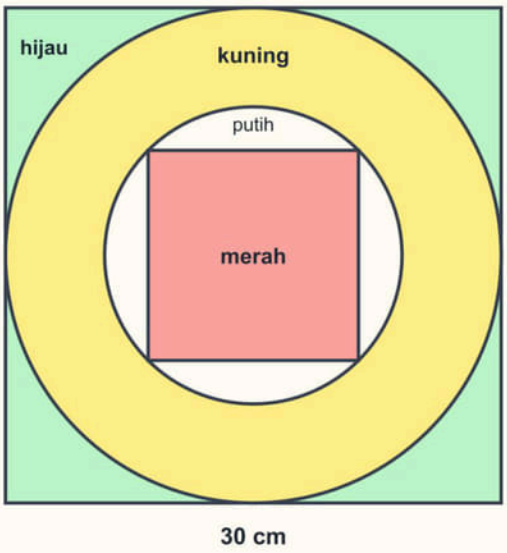
Sebuah stiker promosi berbentuk persegi berukuran 30 cm × 30 cm (desain disusun untuk contoh). Di dalamnya terdapat lingkaran yang menyinggung keempat sisi persegi dan lingkaran kecil sepusat berjari-jari 9 cm. Di dalam lingkaran kecil terdapat persegi yang keempat titik sudutnya pada lingkaran kecil. Pewarnaannya: pojok persegi di luar lingkaran besar **hijau**, cincin di antara kedua lingkaran **kuning**, persegi kecil **merah**, dan sisa di dalam lingkaran kecil **putih**. Gunakan $\pi = 3{,}14$.

Penyelesaian. Lingkaran besar berjari-jari 15 cm (setengah sisi).

- Hijau: $900 - 3{,}14 \times 225 = 900 - 706{,}5 = 193{,}5$ cm².
- Kuning: $3{,}14 \times (225 - 81) = 3{,}14 \times 144 = 452{,}16$ cm².
- Merah: $2 \times 9^2 = 162$ cm².
- Putih: $3{,}14 \times 81 - 162 = 254{,}34 - 162 = 92{,}34$ cm².

Cek ulang: $193{,}5 + 452{,}16 + 162 + 92{,}34 = 900$ cm², sama dengan luas stiker. Susunan warnanya digambar berskala pada Gambar 2.23.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



lingkaran besar r = 15 cm

lingkaran kecil r = 9 cm

persegi merah: diagonal = 18 cm

hijau 193,5 · kuning 452,16

merah 162 · putih 92,34 (cm²)

jumlah = 900 cm² = luas stiker

Gambar 2.23 Stiker Contoh 3 digambar berskala: empat pojok hijau tampak kecil, tetapi luas totalnya 193,5 cm², lebih besar daripada daerah putih (92,34 cm²). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan	Nilai	Alasan
Cat kuning paling banyak dipakai	Benar	$452{,}16\ \text{cm}^2$ adalah luas terbesar
Cat hijau dan putih bersama-sama lebih banyak daripada cat kuning	Salah	$193{,}5 + 92{,}34 = 285{,}84 < 452{,}16$
Luas merah lebih dari setengah luas lingkaran kecil	Benar	$162 > \frac{1}{2} \times 254{,}34 = 127{,}17$
Pojok hijau tampak kecil, jadi cat hijau lebih sedikit daripada cat putih	Salah	$193{,}5 > 92{,}34$; empat pojok bersama-sama cukup luas
Daerah hijau lebih dari 20 % luas stiker	Benar	$\frac{193{,}5}{900} = 21{,}5\,\%$

Pernyataan keempat memakai kesan visual. Empat daerah kecil yang terpisah mudah diremehkan. Selalu hitung jumlahnya.

5. Bekerja mundur: dari luas ke ukuran

Soal sering memberi **luas** sebuah bagian, lalu meminta ukuran lain. Tulis luas bagian itu sebagai rumus dalam r (atau s), samakan dengan angka yang diketahui, lalu selesaikan.

Contoh terselesaikan 4: dari luas pojok ke sisi ubin

Sebuah ubin persegi bermotif lingkaran yang menyinggung keempat sisinya. Luas keempat pojok di luar lingkaran 86 cm^2. Gunakan $\pi = 3{,}14$. Tentukan sisi ubin dan keliling lingkaran.

Penyelesaian. Misalkan sisi ubin s, jadi $r = \frac{s}{2}$. Luas pojok = persegi − lingkaran:

$$s^2 - 3{,}14 \cdot \frac{s^2}{4} = 0{,}215\,s^2 = 86 \;\Rightarrow\; s^2 = \frac{86}{0{,}215} = 400 \;\Rightarrow\; s = 20\ \text{cm}$$

Jadi $r = 10$ cm dan keliling lingkaran $2 \times 3{,}14 \times 10 = 62{,}8$ cm. Cek: $400 - 314 = 86\ \text{cm}^2$.

6. Panjang kerangka dan keliling gabungan

Bedakan dua pertanyaan berikut.

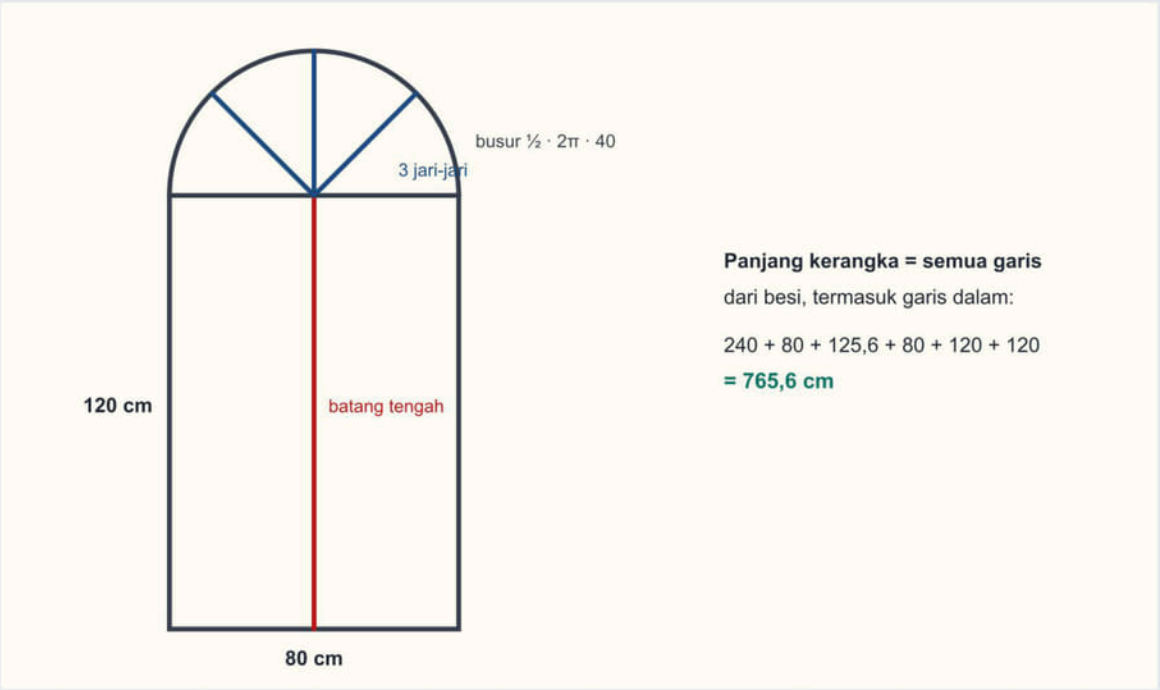
- **Keliling** bangun gabungan hanya menghitung **batas luar**.
- **Panjang kerangka** (logam, kawat, besi) menghitung **semua garis yang dibuat dari bahan**, termasuk garis di bagian dalam.

Cara aman: buat tabel daftar garis (busur dan ruas), hitung panjang setiap garis, lalu jumlahkan. Ubah satuan di akhir (100 cm = 1 m). Bila soal memberi syarat seperti "pas: cukup dan sisanya tidak lebih dari 1 m", periksa **dua** syarat: panjang bahan $\geq$ panjang kerangka **dan** sisa ≤ 1 m.

Contoh terselesaikan 5: kerangka teralis jendela (pola SA-18)

Teralis jendela terdiri atas persegi panjang (lebar 80 cm, tinggi 120 cm) dan setengah lingkaran berdiameter 80 cm yang menempel di sisi atas persegi panjang (ukuran disusun untuk contoh). Lihat Gambar 2.24.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.24 Teralis Contoh 5. Panjang kerangka menghitung semua garis besi: tepi luar, garis batas, batang tengah (merah), dan tiga jari-jari (biru). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Kerangka besi meliputi seluruh tepi luar, garis batas antara persegi panjang dan setengah lingkaran, satu batang tegak di tengah persegi panjang, dan tiga jari-jari yang membagi setengah lingkaran menjadi empat juring 45°. Gunakan $\pi = 3{,}14$. Besi dijual dalam batang 6 m, 8 m, dan 9 m. Batang mana yang pas (cukup dan sisanya tidak lebih dari 1 m)?

Penyelesaian.

Bagian kerangka	Hitungan	Panjang (cm)
Dua sisi tegak luar	2×120	240
Sisi bawah		80
Busur setengah lingkaran	$\frac{1}{2} \times 2 \times 3{,}14 \times 40$	125,6
Garis batas		80
Batang tegak tengah		120
Tiga jari-jari	3×40	120
Jumlah		**765,6**

Panjang kerangka $765{,}6$ cm $= 7{,}656$ m.

- Batang 6 m: kurang dari 7,656 m → tidak cukup, **tidak pas**.
- Batang 8 m: sisa $8 - 7{,}656 = 0{,}344$ m ≤ 1 m → **pas**.
- Batang 9 m: sisa $1{,}344$ m > 1 m → **tidak pas**, walaupun cukup.

Bila garis bagian dalam terlupa, panjangnya hanya $445{,}6$ cm. Akibatnya batang 8 m tampak bersisa $3{,}544$ m, dan kamu keliru menyimpulkan bahwa tidak ada batang yang pas. Itulah

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

jebakan utama soal kerangka.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal bagian lingkaran

1. **Beri nama setiap daerah atau garis** pada gambar (misalnya biru, hitam, merah, atau busur 1, ruas 2). Tulis ukuran yang diketahui langsung di gambar.
2. **Cari ukuran yang tersembunyi.** Jari-jari dari sisi persegi, diagonal dari diameter, sudut pusat dari segitiga sama sisi, atau jari-jari dari luas yang diketahui (bekerja mundur).
3. **Pilih rumus setiap bagian**: lingkaran, cincin, juring, tembereng, persegi, atau tumpang tindih. Pastikan tidak ada daerah yang terhitung dua kali.
4. **Hitung semua luas atau panjang yang diperlukan**, dengan π yang diminta soal dan satuan yang konsisten.
5. **Cek ulang**: jumlah semua daerah = luas bangun terluar; untuk kerangka, hitung ulang banyak garis.
6. **Nilai setiap pernyataan secara terpisah.** Untuk perbandingan gabungan ("setengah hitam dan biru"), hitung angkanya, jangan menebak dari gambar.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Daerah dihitung dua kali	Luas tanda tambah = dua lengan tanpa mengurangi bagian tengah	Gabungan = jumlah − irisan
Cincin dihitung $\pi(R-r)^2$	Cincin $R=20, r=14$ dihitung 36π	Cincin $= \pi(R^2-r^2) = 204\pi$
Setengah lingkaran tertukar dengan juring 90°	Memakai $\frac{1}{4}$ untuk setengah lingkaran	Tulis pecahan $\frac{\alpha}{360^\circ}$ setiap kali
Diameter dibaca sebagai jari-jari	Lingkaran yang menyinggung persegi 40 cm dianggap berjari-jari 40 cm	Lingkaran dalam persegi: $r = \frac{s}{2}$
Garis dalam kerangka terlupa	Hanya menghitung keliling luar ornamen	Buat tabel daftar semua garis
Keliling juring tanpa jari-jari	Keliling juring = busurnya saja	Keliling juring = busur + $2r$
Satuan cm–m	$635{,}2$ cm dibandingkan langsung dengan 6,5 m	Ubah ke satuan yang sama sebelum membandingkan
"Sisa tidak lebih dari 1 m" hanya dicek separuh	Logam 8 m dianggap pas untuk kerangka 6,352 m karena cukup	Cek dua syarat: cukup **dan** sisa ≤ 1 m
Kesan visual	Daerah di pojok dianggap kecil tanpa dihitung	Hitung luas setiap daerah, lalu bandingkan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

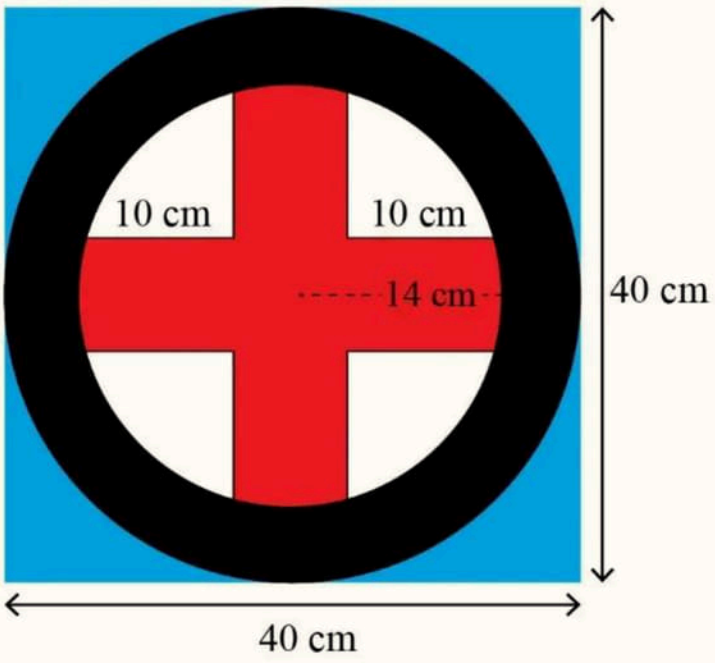
BEDAH SOAL ASLI

Soal pertama (SA-17) dijawab benar oleh 22,51 % peserta. Polanya sama dengan Contoh 3: hitung luas setiap warna, lalu bandingkan gabungan dengan luas hitam. Perhatikan tiga hal. Pertama, lingkaran hitam **menyinggung** sisi persegi 40 cm, jadi jari-jarinya 20 cm, bukan 40 cm. Kedua, daerah hitam adalah **cincin** di antara jari-jari 20 cm dan 14 cm. Ketiga, tanda tambah merah terdiri atas dua lengan yang bertumpuk di tengah, jadi bagian tengah dikurangkan sekali. Ujung lengan mengikuti lengkung lingkaran, sehingga luas merah yang dihitung dengan persegi panjang hanya pendekatan. Pembahasan menunjukkan bahwa kesimpulannya tidak berubah. Hitung dulu kelima luas sebelum membaca pembahasannya.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah rumah makan memasang gambar yang mirip rambu lalu lintas "balai pertolongan pertama", tetapi tidak sama persis. Rambu ini biasanya memberi informasi lokasi pelayanan kesehatan terdekat. Rumah makan memasangnya sebagai candaan: bila pelanggan kelaparan, segera merapat untuk mendapatkan "pertolongan pertama".
Rambu berbentuk persegi biru berukuran 40 cm × 40 cm, lingkaran hitam menyinggung sisi persegi, lingkaran putih di dalamnya berjari-jari 14 cm, dan tanda tambah merah memiliki lebar lengan 10 cm (lihat gambar).
Pemilik ingin membuat rambu tersebut dalam jumlah banyak untuk cabang baru, dengan cat yang dibeli dalam ukuran yang sama. Cat warna apakah yang **lebih banyak** digunakan dibanding cat warna hitam? (Gunakan $\pi = 3{,}14$.)
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Educational Institutions

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Setengah hitam dan biru.
☐ B. Setengah hitam dan merah.
☐ C. Setengah hitam dan putih.
☐ D. Biru dan putih.
☐ E. Biru dan merah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: A, B, E**

Konsep: banyak cat sebanding dengan luas daerah yang dicat.

Langkah 1 – Luas setiap warna.

• Biru: persegi – lingkaran besar ($r = 20$): $1.600 - 3{,}14 \cdot 400 = 1.600 - 1.256 = 344$ cm²

• Hitam: cincin $3{,}14(20^2 - 14^2) = 3{,}14 \cdot 204 = 640{,}56$ cm²

• Lingkaran dalam ($r = 14$): $3{,}14 \cdot 196 = 615{,}44$ cm²

• Merah: dua lengan 28×10 dikurangi tumpang tindih 10×10: $280 + 280 - 100 = 460$ cm² (pendekatan; karena ujung lengan mengikuti lengkung lingkaran, luas tepatnya sedikit lebih kecil, ±448 cm²)

• Putih: $615{,}44 - 460 \approx 155$ cm² (tepatnya ±167 cm²)

Langkah 2 – Bandingkan dengan hitam (640,56 cm²). Setengah hitam $= 320{,}28$ cm².

1. Setengah hitam + biru $= 664{,}28$ → lebih banyak ✓
2. Setengah hitam + merah ≈ 780 → lebih banyak ✓
3. Setengah hitam + putih ≈ 476 (tepatnya ±488) → lebih sedikit ✗
4. Biru + putih ≈ 499 (tepatnya ±511) → lebih sedikit ✗
5. Biru + merah ≈ 804 → lebih banyak ✓

Cek ulang: kesimpulan tidak berubah baik memakai pendekatan maupun luas tepat, karena selisihnya jauh dari batas 640,56.

Jebakan: mengira biru paling luas karena tampak di "pojok-pojok"; padahal luas biru hanya 344 cm², hampir separuh luas hitam.

Jawaban: pernyataan 1, 2, dan 5.

Soal berikutnya (SA-18) dijawab benar oleh 53,82 % peserta. Soal ini memadukan **bekerja mundur** (jari-jari dari luas satu potong kaca merah, seperti Contoh 4) dan **panjang kerangka** (seperti Contoh 5). Empat potong kaca merah adalah empat tembereng, yaitu lingkaran dikurangi persegi di dalamnya. Setelah jari-jari diketahui, daftar semua garis kerangka: lingkaran, empat sisi persegi, dan dua diagonal. Terakhir, uji setiap pilihan logam dengan dua syarat "pas".

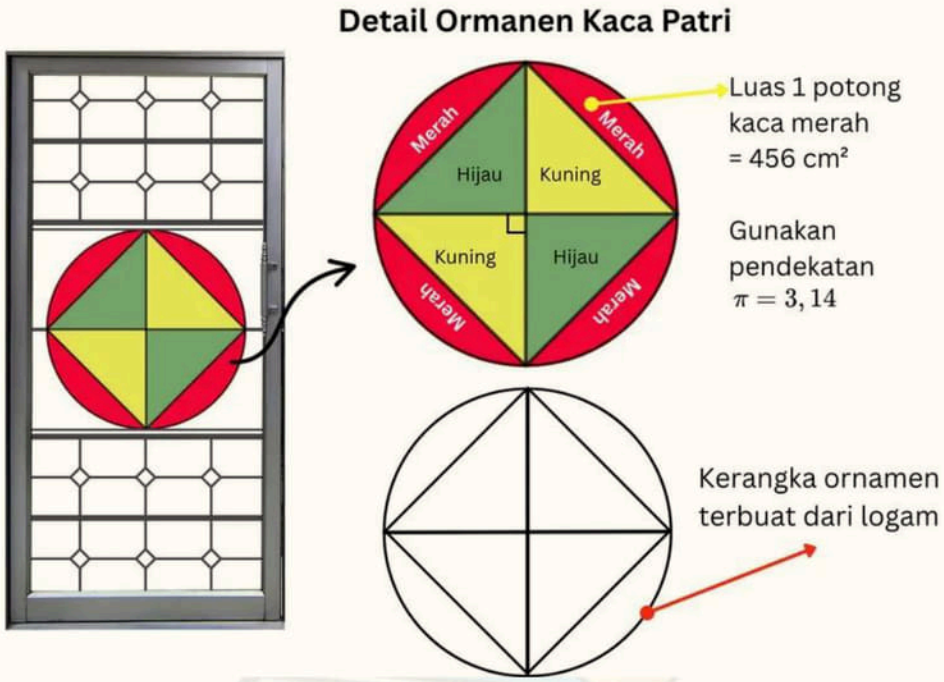
►. Pak Baskara akan membuat daun pintu dengan ornamen kaca patri berbentuk bulat di tengahnya. Detail daun pintu ditunjukkan pada gambar. Luas 1 potong kaca merah $= 456$ cm²; gunakan $\pi = 3{,}14$ dan $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Kerangka ornamen (lingkaran, persegi di dalamnya, dan dua diagonal persegi) terbuat dari logam untuk menempelkan potongan-potongan kaca patri. Pak Baskara ingin memilih logam yang **pas**, yaitu cukup untuk membuat kerangka dan sisanya tidak lebih dari 1 m. Pilihan logam yang tersedia:

Jenis Logam	Logam A	Logam B	Logam C
Panjang satuan	4 m	5 m	6,5 m

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tentukan **Benar** atau **Salah**: pilihan berikut **pas** untuk Pak Baskara.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Membeli 2 buah logam A.	○	○
Membeli 1 buah logam B.	○	○
Membeli 1 buah logam C.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: 1S 2S 3B**

Langkah 1 – Jari-jari dari luas kaca merah. Persegi di dalam lingkaran berjari-jari r memiliki diagonal $2r$, sehingga luasnya $\frac{(2r)^2}{2} = 2r^2$. Empat potong kaca merah = lingkaran − persegi:

$$4 \times 456 = 3{,}14r^2 - 2r^2 = 1{,}14r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1.824}{1{,}14} = 1.600 \Rightarrow r = 40 \text{ cm}$$

Langkah 2 – Panjang kerangka.

- Keliling lingkaran: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 = 251{,}2$ cm
- Sisi persegi: $r\sqrt{2} = 40\sqrt{2} \approx 56$ cm, keliling $4 \times 56 = 224$ cm
- Dua diagonal persegi (= dua diameter): $2 \times 80 = 160$ cm
- Total $= 251{,}2 + 224 + 160 = 635{,}2$ cm $= 6{,}352$ m

Langkah 3 – Uji setiap pilihan (syarat: panjang ≥ 6,352 m dan sisa ≤ 1 m).

1. 2 logam A = 8 m → sisa $1{,}648$ m > 1 m → tidak pas → **Salah**.
2. 1 logam B = 5 m $< 6{,}352$ m → tidak cukup → **Salah**.
3. 1 logam C = 6,5 m → sisa $0{,}148$ m ≤ 1 m → pas → **Benar**.

Jebakan: lupa menghitung dua diagonal di tengah, sehingga total hanya $4{,}752$ m dan logam B dianggap pas.

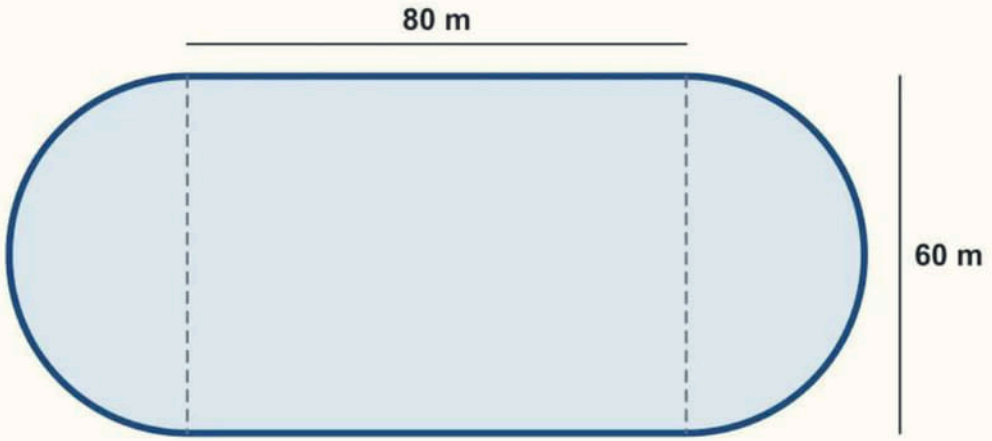
Jawaban: Salah, Salah, Benar.

BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memakai bangun gabungan: persegi panjang dan dua setengah lingkaran. Ingat pola "dua setengah lingkaran = satu lingkaran", lalu nilai ketiga pernyataan satu per satu.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah lintasan lari terdiri atas dua sisi lurus sepanjang 80 m dan dua setengah lingkaran berdiameter 60 m (lihat gambar).
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Panjang satu putaran lintasan adalah $(160 + 60\pi)$ m.	○	○
Luas daerah di dalam lintasan adalah $(4.800 + 3.600\pi)$ m².	○	○
Bila diameter setengah lingkaran menjadi 70 m dan sisi lurus tetap, panjang satu putaran bertambah 10π m.	○	○

Pembahasan **Kunci: 1B 2S 3B**

Konsep: bangun gabungan: pisahkan menjadi persegi panjang dan dua setengah lingkaran (= satu lingkaran). Keliling lingkaran πd, luas πr^2 dengan $r = \frac{d}{2}$.

Pernyataan 1. dua sisi lurus 160 m + dua setengah lingkaran (satu lingkaran penuh) $\pi \cdot 60$ m → **Benar**.
Pernyataan 2. persegi panjang $80 \times 60 = 4.800$ + lingkaran berjari-jari 30: 900π. *Jebakan:* memakai diameter sebagai jari-jari → **Salah**.
Pernyataan 3. $70\pi - 60\pi = 10\pi$ → **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

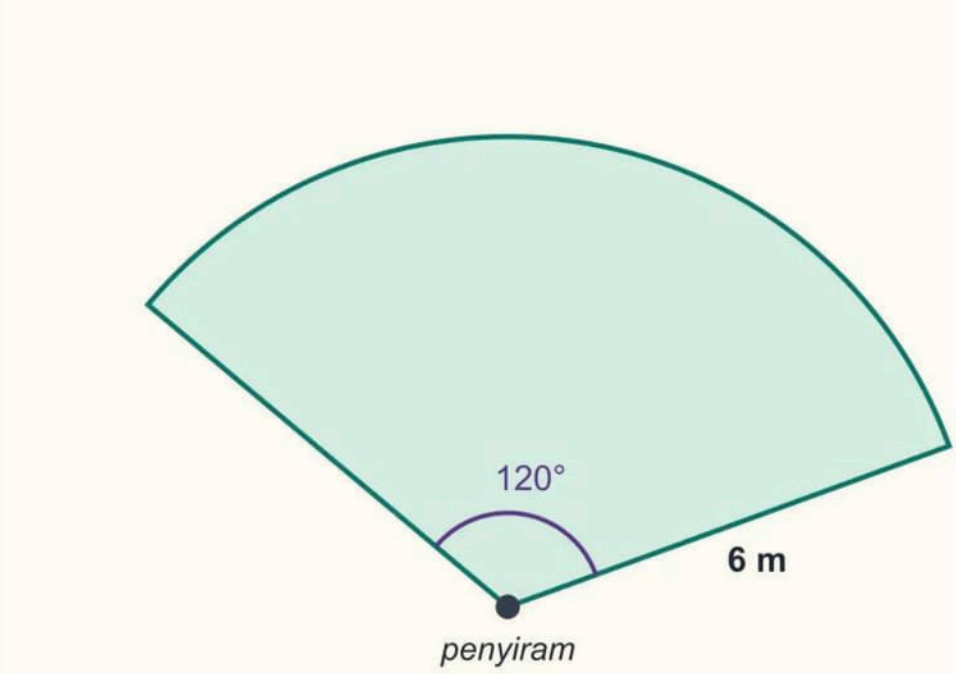
Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: keliling lintasan hanya memuat tepi **luar**, yaitu dua sisi lurus dan dua busur; garis putus-putus di dalam tidak ikut. Pernyataan 2 adalah jebakan diameter: luas lingkaran memakai jari-jari 30 m, bukan 60 m. Pernyataan 3 dapat dijawab tanpa menghitung ulang seluruh keliling, cukup dari selisih bagian yang berubah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, beri nama setiap daerah atau busur pada gambar sebelum menghitung.

1. Sebuah alat penyiram taman berputar bolak-balik dan menyiram daerah berbentuk juring berjari-jari 6 m dengan sudut pusat 120° (lihat gambar).
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

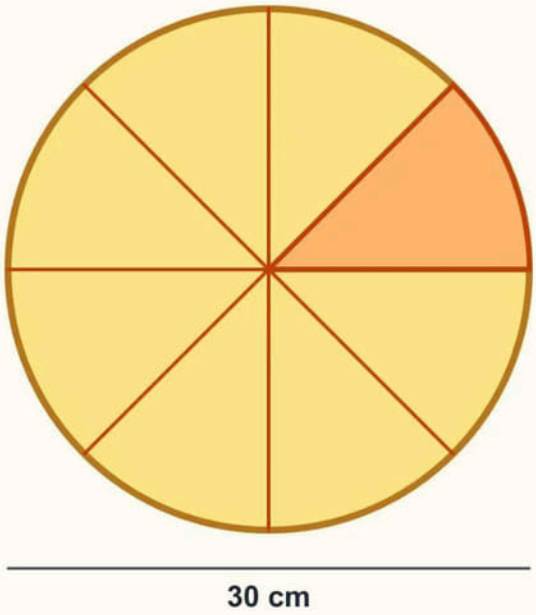


Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Luas daerah yang tersiram adalah 12π m^2.	○	○
Panjang busur tepi daerah yang tersiram adalah 6π m.	○	○
Keliling daerah yang tersiram adalah $(4\pi + 6)$ m.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Sebuah pizza berbentuk lingkaran berdiameter 30 cm dipotong menjadi 8 potong juring yang sama besar (lihat gambar).
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Sudut pusat setiap potongan adalah 45°.	○	○
Luas satu potongan adalah $\frac{225\pi}{8}$ cm².	○	○
Keliling satu potongan adalah $\left(\frac{15\pi}{4} + 15\right)$ cm.	○	○

Kunci singkat: 1. 1B 2S 3S 2. 1B 2B 3S

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Apa beda keliling juring, keliling tembereng, dan panjang busur? Garis apa saja yang dijumlahkan pada masing-masing?
- Bagaimana kamu memastikan tidak ada daerah yang terhitung dua kali, dan cek apa yang dapat kamu pakai di akhir?
- Bila soal memberi luas sebuah bagian, bagaimana langkahmu menemukan jari-jari lingkarannya?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 2.5: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-2.5

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi

MATTL-2.6

◎ APA YANG DIUJI

Transformasi geometri adalah aturan yang memindahkan setiap titik pada bidang ke titik lain. Titik hasil pemindahan disebut **bayangan**. Titik asalnya kadang disebut **prapeta**. Di TKA, transformasi hampir tidak pernah ditanyakan sebagai "tentukan bayangan titik $(2, 3)$" saja. Soal biasanya memberi **garis atau lingkaran**, kadang dengan **pusat rotasi yang bukan titik asal**, lalu meminta kamu menguji beberapa titik atau menebak transformasi dari bayangannya.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-20	Menentukan transformasi geometri yang terjadi pada sebuah lingkaran dengan disertakan informasi bayangan hasil transformasi	35,13 %
SA-21	Menentukan titik-titik yang terletak pada suatu garis dengan disertakan informasi bayangan garis tersebut hasil transformasi rotasi	11,68 %

Angka 11,68 % berarti hanya sekitar 1 dari 9 peserta yang menjawab SA-21 dengan benar. Soalnya tampak pendek, tetapi ada tiga hal yang harus benar sekaligus: **arah rotasi**, **pusat rotasi** yang bukan O, dan cara **mengubah persamaan garis** (substitusi balik). Satu kesalahan saja menghasilkan garis lain, dan pengecohnya memang disiapkan untuk garis yang salah itu. SA-20 (35,13 %) lebih banyak dijawab benar, tetapi tetap menjebak: faktor skala harus dibandingkan dari jari-jari, bukan dari kuadrat jari-jari.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menentukan bayangan titik oleh translasi, refleksi (termasuk terhadap $x = h$, $y = k$, $y = x + c$), rotasi, dan dilatasi;
- memutar dan mendilatasi titik terhadap pusat yang bukan O dengan cara "geser–putar–geser balik";
- menentukan persamaan bayangan garis dan kurva dengan **substitusi balik**, dan menghindari substitusi maju;
- menentukan bayangan lingkaran lewat pusat dan jari-jarinya, termasuk bila faktor skala negatif;
- bekerja mundur: menentukan translasi atau faktor skala dari informasi bayangan;
- menilai beberapa titik atau pernyataan sekaligus (PG kompleks).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

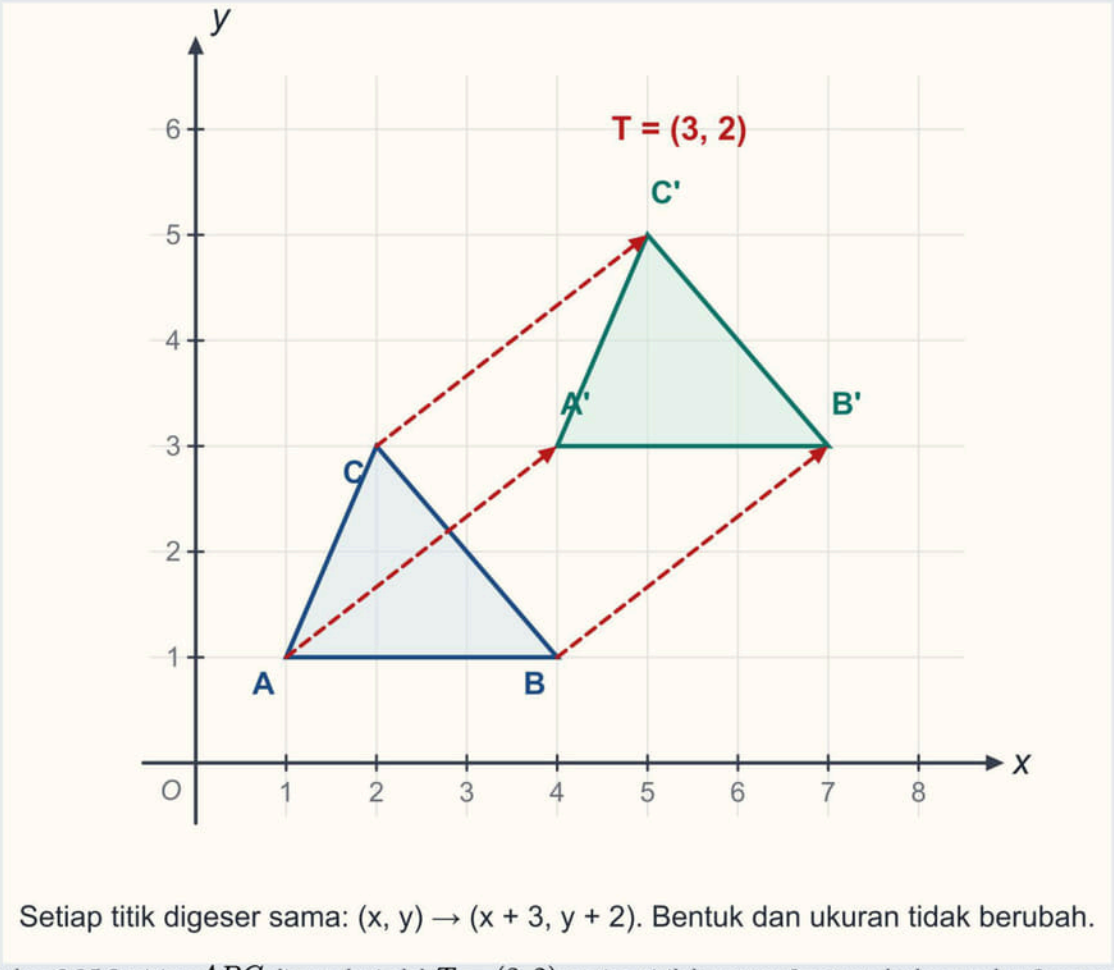
◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Empat jenis transformasi dan sifatnya

Pakai notasi berikut: titik asal (x, y), bayangannya (x', y').

- **Translasi (pergeseran)** oleh $T = (a, b)$: setiap titik digeser a satuan mendatar dan b satuan tegak. Di soal, T biasanya ditulis sebagai vektor kolom.

$$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \quad (x, y) \to (x + a,\ y + b)$$



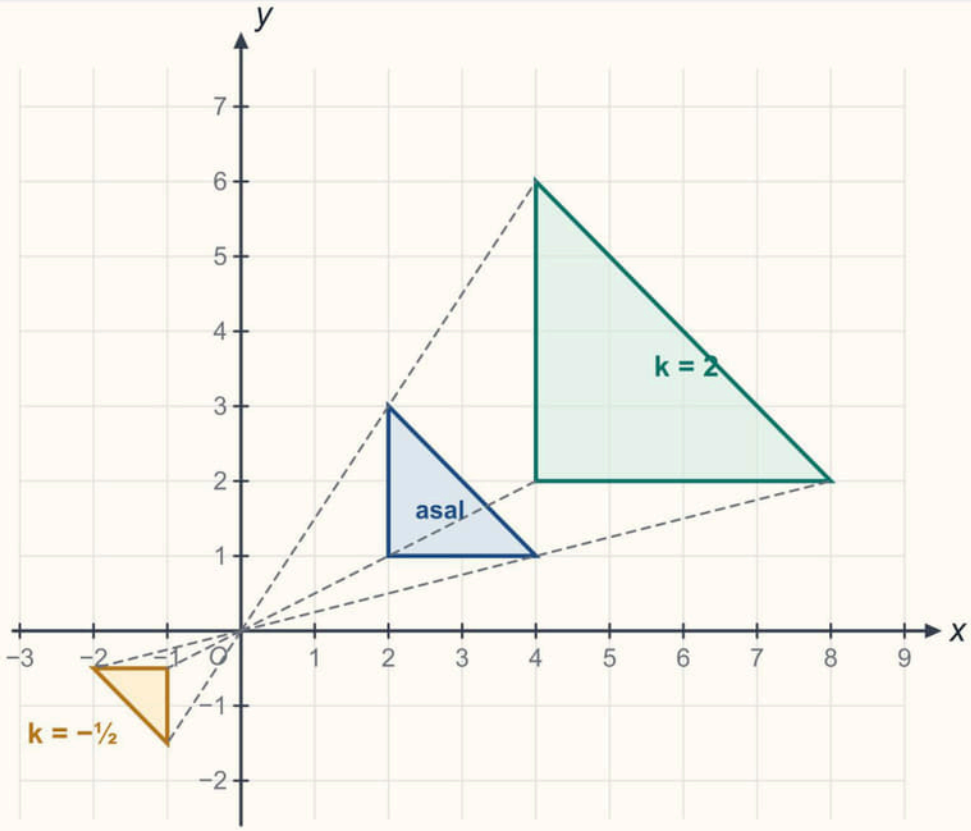
Gambar 2.25 Segitiga ABC ditranslasi oleh $T = (3, 2)$: setiap titik bergeser 3 satuan ke kanan dan 2 satuan ke atas (lihat panah). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

- **Refleksi (pencerminan)** terhadap sebuah garis (cermin): bayangan berada di seberang cermin dengan jarak yang sama. Ruas yang menghubungkan titik dan bayangannya **tegak lurus** cermin, dan **titik tengahnya terletak pada cermin**. Titik yang terletak pada cermin tidak berpindah.
- **Rotasi (perputaran)** sebesar θ terhadap pusat P: jarak ke P tetap, sudut berubah θ. Perjanjiannya: θ **positif = berlawanan arah jarum jam**, θ negatif = searah jarum jam. Pusat rotasi tidak berpindah.
- **Dilatasi (perkalian)** dengan pusat P dan faktor skala k, ditulis $[P, k]$: vektor dari P ke setiap titik dikalikan k, sehingga jaraknya ke P menjadi $|k|$ kali semula. Bila $k > 1$, bangun

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

membesar. Bila $0 < k < 1$, bangun mengecil. Bila $k < 0$, bayangan berada **di seberang pusat**.

Tiga jenis pertama disebut **isometri**: bentuk dan ukuran bangun tidak berubah, hanya letak dan arahnya. Translasi tampak pada Gambar 2.25, dilatasi pada Gambar 2.26, refleksi pada Gambar 2.27, dan rotasi pada Gambar 2.28. Dilatasi mengubah ukuran. Panjang dikalikan $|k|$ dan luas dikalikan k^2. Mengapa luas dikalikan k^2? Setiap panjang, termasuk alas dan tinggi, dikalikan $|k|$; luas adalah hasil kali dua panjang, jadi dikalikan $|k| \cdot |k| = k^2$.



k = 2: dua kali lebih jauh dari O, searah. k = −½: setengah jaraknya, di seberang O. Luas dikali k².

Gambar 2.26 Segitiga asal didilatasi dengan pusat O: faktor $k = 2$ (searah, dua kali lebih jauh) dan $k = -\frac{1}{2}$ (di seberang O, setengah jaraknya). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Sifat ini sangat berguna untuk lingkaran: translasi, refleksi, dan rotasi **tidak mengubah jari-jari**, sedangkan dilatasi mengalikan jari-jari dengan $|k|$.

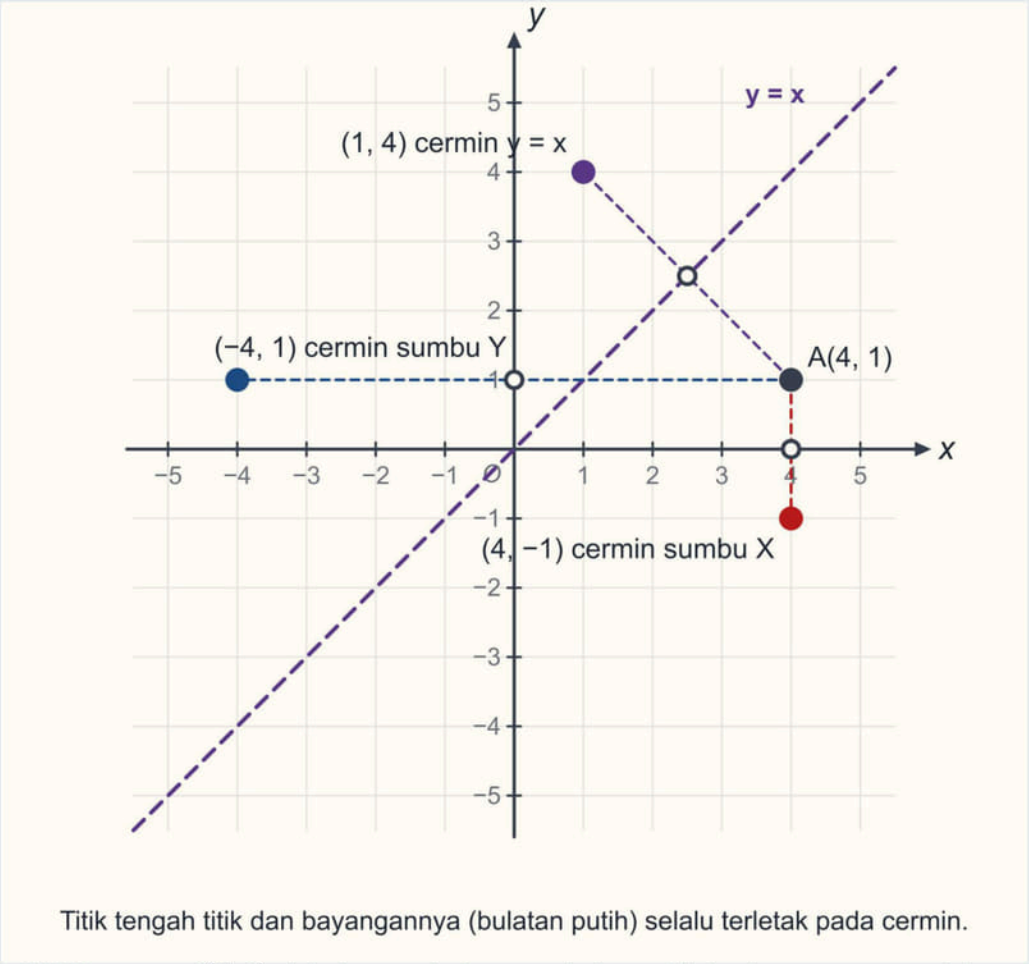
2. Rumus bayangan titik dan dari mana asalnya

Kamu tidak perlu menghafal tabel di bawah secara buta. Setiap baris dapat diturunkan ulang dalam beberapa detik:

- **Refleksi $x = h$:** titik tengah $\frac{x+x'}{2} = h$, jadi $x' = 2h - x$, sedangkan y tetap. Hal yang sama berlaku untuk $y = k$.
- **Refleksi $y = x$:** koordinat ditukar. Refleksi $y = -x$: ditukar lalu kedua tandanya diubah. Gambar 2.27 memeriksa ketiga refleksi dasar pada satu titik: titik tengah setiap pasangan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

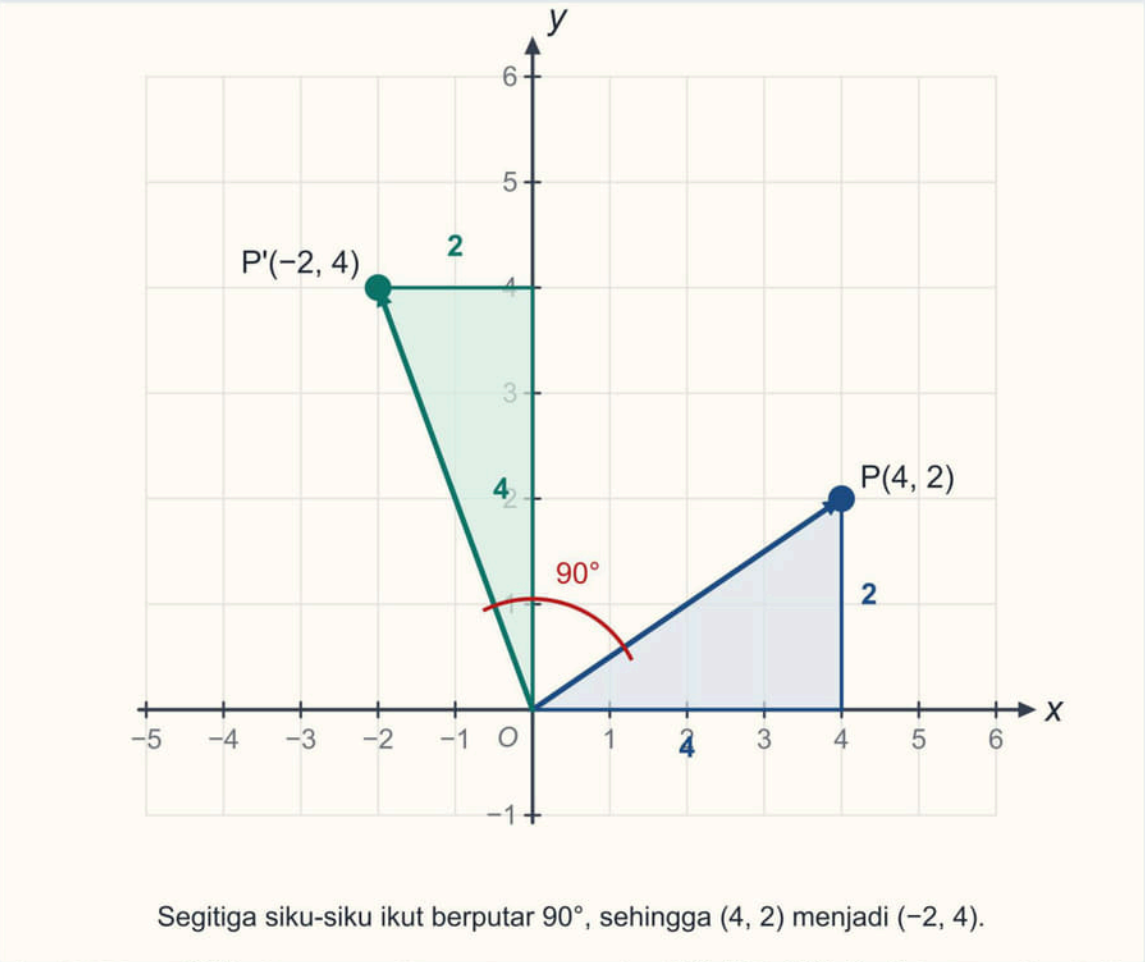
terletak pada cerminnya.



Gambar 2.27 Bayangan $A(4,1)$ oleh tiga cermin. Ruas penghubung titik dan bayangannya tegak lurus cermin, dan titik tengahnya (bulatan putih) terletak pada cermin. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

- **Refleksi $y = x + c$:** geser semuanya turun c (cermin menjadi $y = x$), tukar koordinat, lalu geser naik c. Hasilnya $(y - c,\ x + c)$. Perhatikan: hasil ini **bukan** "cermin $y = x$ lalu translasi $(0, c)$", yang memberi $(y,\ x + c)$.
- **Rotasi 90° terhadap O:** sumbu X positif berputar ke sumbu Y positif, jadi $(1, 0) \to (0, 1)$ dan $(0, 1) \to (-1, 0)$. Akibatnya $(x, y) \to (-y, x)$. Alasan lainnya terlihat pada Gambar 2.28: segitiga siku-siku dengan sisi mendatar x dan sisi tegak y ikut berputar, sehingga sisi mendatar menjadi tegak dan sisi tegak menjadi mendatar ke arah kiri.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.28 Rotasi $90°$ berlawanan arah jarum jam memetakan $P(4, 2)$ ke $P'(-2, 4)$. Segitiga siku-siku bersisi 4 dan 2 ikut berputar. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

- **Pusat bukan O (geser–putar–geser balik):** hitung dulu vektor dari pusat ke titik, yaitu $(x - a,\ y - b)$. Putar atau kalikan vektor itu seolah pusatnya O. Terakhir, tambahkan kembali (a, b).

Rumus rotasi umum sebesar θ terhadap pusat $P(a, b)$ adalah:

$$\begin{cases} x' = a + (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta \\ y' = b + (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta \end{cases}$$

Untuk $\theta = 90°$ ($\cos\theta = 0, \sin\theta = 1$), rumus ini menjadi baris "rotasi $90°$ pusat P" pada tabel. Soal TKA umumnya memakai $90°$, $180°$, atau $270°$. Rotasi $270°$ berlawanan arah jarum jam sama dengan rotasi $90°$ searah jarum jam.

Tabel rumus bayangan. Kolom ketiga ("substitusi balik") dipakai pada bagian 3 untuk garis dan kurva.

Transformasi	Bayangan (x', y') dari (x, y)	Substitusi balik: (x, y) dinyatakan dengan x', y'
Translasi $T = (a, b)$	$(x + a,\ y + b)$	$(x' - a,\ y' - b)$
Refleksi sumbu X	$(x,\ -y)$	$(x',\ -y')$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Refleksi sumbu Y	$(-x,\ y)$	$(-x',\ y')$
Refleksi titik O	$(-x,\ -y)$	$(-x',\ -y')$
Refleksi garis $y = x$	$(y,\ x)$	$(y',\ x')$
Refleksi garis $y = -x$	$(-y,\ -x)$	$(-y',\ -x')$
Refleksi garis $x = h$	$(2h - x,\ y)$	$(2h - x',\ y')$
Refleksi garis $y = k$	$(x,\ 2k - y)$	$(x',\ 2k - y')$
Refleksi garis $y = x + c$	$(y - c,\ x + c)$	$(y' - c,\ x' + c)$
Refleksi garis $y = -x + c$	$(c - y,\ c - x)$	$(c - y',\ c - x')$
Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam, pusat O	$(-y,\ x)$	$(y',\ -x')$
Rotasi 90° searah jarum jam, pusat O	$(y,\ -x)$	$(-y',\ x')$
Rotasi 180°, pusat O	$(-x,\ -y)$	$(-x',\ -y')$
Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam, pusat $P(a, b)$	$(a - (y - b),\ b + (x - a))$	$(a + (y' - b),\ b - (x' - a))$
Rotasi 90° searah jarum jam, pusat $P(a, b)$	$(a + (y - b),\ b - (x - a))$	$(a - (y' - b),\ b + (x' - a))$
Rotasi 180°, pusat $P(a, b)$	$(2a - x,\ 2b - y)$	$(2a - x',\ 2b - y')$
Dilatasi $[O, k]$	$(kx,\ ky)$	$(x'/k,\ y'/k)$
Dilatasi $[P(a, b), k]$	$(a + k(x - a),\ b + k(y - b))$	$(a + (x' - a)/k,\ b + (y' - b)/k)$

Perhatikan bahwa semua refleksi dan rotasi 180° adalah **kebalikan dirinya sendiri**: kolom kedua dan ketiga berbentuk sama. Rotasi 90° tidak demikian. Kebalikan rotasi berlawanan arah jarum jam adalah rotasi searah jarum jam. Di sinilah banyak siswa tergelincir.

Contoh terselesaikan 1: satu titik, banyak transformasi

Tentukan bayangan titik $A(5, -2)$ oleh setiap transformasi berikut.

Penyelesaian. Masukkan $x = 5$ dan $y = -2$ ke rumus pada tabel.

Transformasi	Perhitungan	Bayangan
Translasi $T = (-3, 4)$	$(5 - 3,\ -2 + 4)$	$(2, 2)$
Refleksi sumbu X	$(5,\ 2)$	$(5, 2)$
Refleksi $y = -x$	$(-(-2),\ -5)$	$(2, -5)$
Refleksi $x = 1$	$(2 \cdot 1 - 5,\ -2)$	$(-3, -2)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Refleksi $y = 3$	$(5,\ 2\cdot 3-(-2))$	$(5, 8)$
Refleksi $y = x - 3$ ($c = -3$)	$(-2+3,\ 5-3)$	$(1, 2)$
Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam, pusat O	$(-(-2),\ 5)$	$(2, 5)$
Rotasi 90° searah jarum jam, pusat O	$(-2,\ -5)$	$(-2, -5)$
Rotasi 180°, pusat $(1, 1)$	$(2-5,\ 2+2)$	$(-3, 4)$
Dilatasi $[O, -2]$	$(-10,\ 4)$	$(-10, 4)$
Dilatasi $[(1, -1), 3]$	$(1+3\cdot 4,\ -1+3\cdot(-1))$	$(13, -4)$

Cek refleksi terhadap $y = x - 3$ dengan sifat cermin. Titik tengah A dan $(1, 2)$ adalah $(3, 0)$, dan titik itu memenuhi $y = x - 3$. Ruas dari A ke $(1, 2)$ bergradien $\frac{2-(-2)}{1-5} = -1$, jadi tegak lurus cermin yang bergradien 1. Kedua syarat terpenuhi.

3. Bayangan garis dan kurva: substitusi balik

Bayangan sebuah kurva adalah kumpulan titik (x', y') yang **titik asalnya** (x, y) terletak pada kurva semula. Jadi persamaan kurva semula berlaku untuk x dan y, bukan untuk x' dan y'. Langkahnya:

1. Tulis rumus bayangan: x' dan y' dinyatakan dengan x dan y.
2. **Balik** rumus itu: nyatakan x dan y dengan x' dan y' (kolom ketiga tabel).
3. **Substitusikan** hasil langkah 2 ke persamaan kurva semula, lalu sederhanakan.
4. Hapus tanda aksen. Persamaan itulah bayangannya.
5. Cek dengan satu titik: ambil titik pada kurva semula, hitung bayangannya dengan rumus titik, lalu pastikan bayangan itu memenuhi persamaan baru.

Kesalahan paling umum adalah **substitusi maju**: langsung mengganti x dengan rumus x'. Hasilnya adalah kurva yang bergeser ke arah **berlawanan**.

Contoh terselesaikan 2: parabola ditranslasi

Parabola $y = x^2 - 4x + 1$ ditranslasi oleh $T = (-1, 3)$. Tentukan persamaan bayangannya.

Penyelesaian. Rumus bayangan: $x' = x - 1$ dan $y' = y + 3$. Dibalik: $x = x' + 1$ dan $y = y' - 3$. Substitusikan ke persamaan semula:

$$y' - 3 = (x' + 1)^2 - 4(x' + 1) + 1 = x'^2 - 2x' - 2 \ \Rightarrow\ y' = x'^2 - 2x' + 1$$

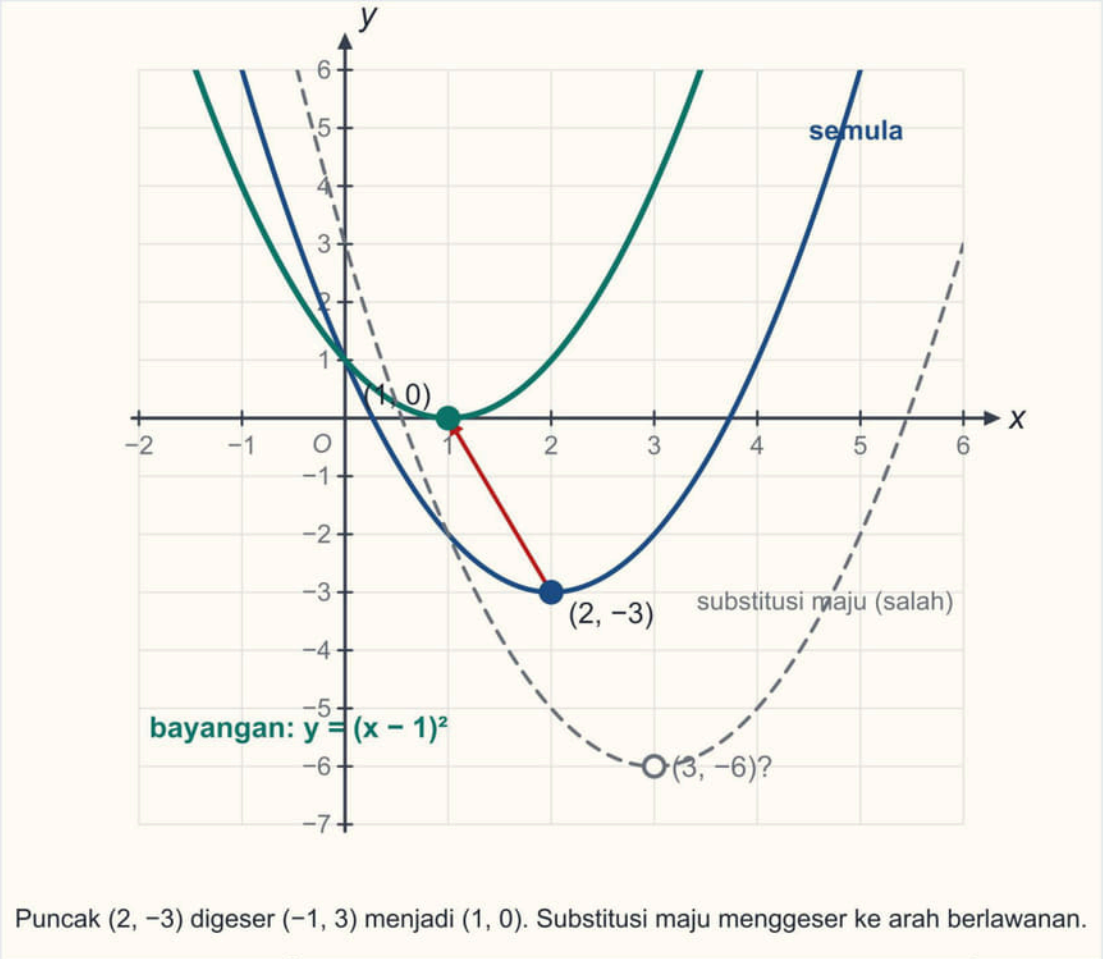
Bayangannya $y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Cek dengan titik puncak. Puncak parabola semula: $x = \frac{4}{2} = 2, y = 4 - 8 + 1 = -3$. Digeser $(-1, 3)$ menjadi $(1, 0)$, dan $y = (x - 1)^2$ memang berpuncak di $(1, 0)$.

Bila memakai substitusi maju. Mengganti x dengan $x - 1$ dan y dengan $y + 3$ menghasilkan $y + 3 = (x - 1)^2 - 4(x - 1) + 1$, yaitu $y = x^2 - 6x + 3$. Puncaknya $(3, -6)$, yaitu puncak semula yang digeser $(1, -3)$: tepat berlawanan dengan T. Pengecoh di soal sering berupa hasil

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

ini. Ketiga parabola dibandingkan pada Gambar 2.29.



Gambar 2.29 Parabola $y = x^2 - 4x + 1$ ditranslasi oleh $T = (-1, 3)$ menjadi $y = (x - 1)^2$. Kurva putus-putus adalah hasil substitusi maju yang salah. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cara cepat untuk garis lurus. Garis cukup ditentukan oleh dua titik. Ambil dua titik yang mudah pada garis semula (misalnya titik potong dengan sumbu), hitung bayangannya, lalu tentukan garis yang melalui kedua bayangan itu. Untuk mengecek gradien, ingat:

- translasi, dilatasi, dan rotasi 180° menghasilkan garis yang **sejajar** dengan garis semula;
- rotasi 90° menghasilkan garis yang **tegak lurus** (hasil kali gradien -1);
- refleksi terhadap $y = x$ mengubah gradien m menjadi $\frac{1}{m}$.

Contoh terselesaikan 3: rotasi garis dengan pusat bukan O (menilai pernyataan)

Garis $y = 3x - 1$ dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $P(1, -2)$ dan menghasilkan garis l. Nilailah setiap pernyataan.

Penyelesaian. Dengan $a = 1$ dan $b = -2$, rumus bayangannya:

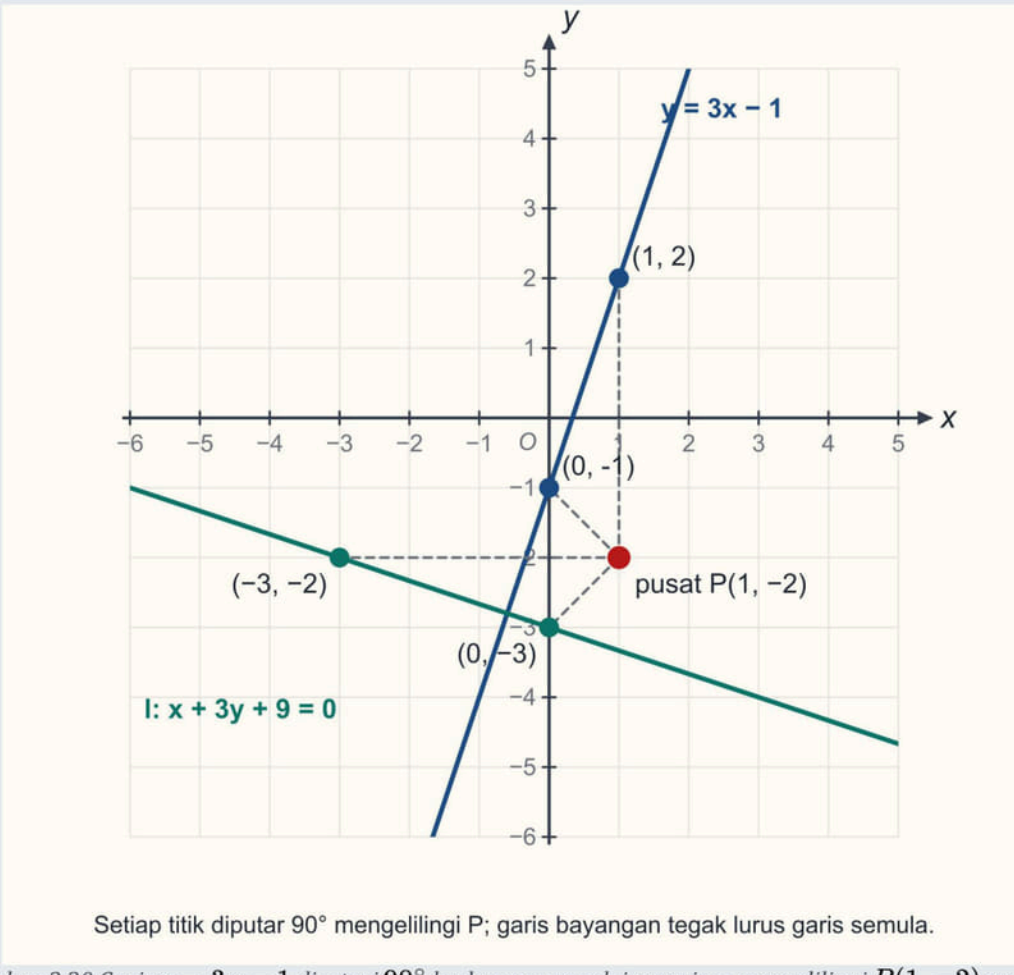
$$x' = 1 - (y + 2) = -y - 1, \qquad y' = -2 + (x - 1) = x - 3$$

Dibalik: $y = -x' - 1$ dan $x = y' + 3$. Substitusikan ke $y = 3x - 1$:

$$-x' - 1 = 3(y' + 3) - 1 \;\Rightarrow\; -x' - 1 = 3y' + 8 \;\Rightarrow\; x' + 3y' + 9 = 0$$

Jadi $l : x + 3y + 9 = 0$. Cek dengan titik $(0, -1)$ pada garis semula: bayangannya $(-(-1) - 1,\ 0 - 3) = (0, -3)$, dan $0 + 3(-3) + 9 = 0$. Rotasi ini digambar pada Gambar 2.30.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.30 Garis $y = 3x - 1$ dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam mengelilingi $P(1, -2)$ menjadi $l : x + 3y + 9 = 0$. Titik $(1, 2)$ dan $(0, -1)$ berpindah ke $(-3, -2)$ dan $(0, -3)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan	Nilai	Alasan
Titik $(-3, -2)$ terletak pada l	Benar	$-3 + 3(-2) + 9 = 0$
Titik $(3, -4)$ terletak pada l	Benar	$3 + 3(-4) + 9 = 0$
Pusat rotasi $(1, -2)$ terletak pada l	Salah	$1 - 6 + 9 = 4 \neq 0$. Pusat tidak terletak pada garis semula ($3 \cdot 1 - 1 = 2 \neq -2$), jadi juga tidak terletak pada bayangannya
Titik $(-1, 0)$ terletak pada l	Salah	$-1 + 0 + 9 = 8 \neq 0$. Titik ini terletak pada $x + 3y + 1 = 0$, yaitu hasil rotasi **searah** jarum jam
Garis l tegak lurus garis semula	Benar	gradien 3 dan $-\frac{1}{3}$, hasil kalinya -1
$(-3, -2)$ adalah bayangan titik $(1, 2)$ dari garis semula	Benar	$(1, 2)$ memenuhi $y = 3x - 1$; bayangannya $(-2 - 1,\ 1 - 3) = (-3, -2)$

Perhatikan pernyataan ketiga. Pusat rotasi hanya terletak pada bayangan **bila pusat itu terletak pada garis semula**. Pada SA-21, pusat $(2, 0)$ memang terletak pada garis semula, sehingga $(2, 0)$ menjadi salah satu jawaban. Pernyataan keempat adalah pengecoh arah rotasi.

4. Bayangan lingkaran: cukup pusat dan jari-jari

Lingkaran ditentukan oleh pusat dan jari-jarinya. Jadi kamu tidak perlu menyubstitusi seluruh persamaan:

1. Tentukan pusat (p, q) dan jari-jari r. Dari bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, pusatnya $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ dan $r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$ (lihat sub bab 2.3).
2. Transformasikan **pusatnya** dengan rumus titik.
3. Jari-jari: tetap untuk translasi, refleksi, dan rotasi; dikalikan $|k|$ untuk dilatasi. Jari-jari tidak pernah negatif.
4. Tulis persamaan baru $(x - p')^2 + (y - q')^2 = r'^2$.

Contoh terselesaikan 4: memperbesar logo

Rani, seorang desainer grafis, menggambar logo berbentuk lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ pada layar berpetak (data disusun untuk contoh). Ia mendilatasi logo itu dengan pusat $P(1, 1)$ dan faktor skala -2. Tentukan persamaan bayangannya.

Penyelesaian. Pusat lingkaran $(3, -2)$ dan $r^2 = 9 + 4 - 9 = 4$, jadi $r = 2$. Pusat didilatasi:

$$x' = 1 + (-2)(3 - 1) = -3, \qquad y' = 1 + (-2)(-2 - 1) = 7$$

Jari-jari baru $|-2| \times 2 = 4$. Bayangannya:

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + 6x - 14y + 42 = 0$$

Faktor -2 membuat pusat baru berada di seberang P: vektor dari P ke pusat semula $(2, -3)$ berubah menjadi $(-4, 6)$. Dua kesalahan yang sering dijadikan pengecoh: menulis jari-jari -4, atau menulis $r^2 = 8$. Yang dikali $|k| = 2$ adalah r, sehingga r^2 dikali $k^2 = 4$ menjadi 16.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Bekerja mundur: transformasi apa yang terjadi?

Soal tipe SA-20 memberi bayangan lalu menanyakan transformasinya. Kuncinya adalah memisahkan dua informasi yang dibawa lingkaran:

- **jari-jari** hanya dipengaruhi dilatasi, jadi faktor skala $|k| = \frac{r_{\text{akhir}}}{r_{\text{awal}}}$;
- **pusat** dipengaruhi semua transformasi, jadi pusat dihitung mundur langkah demi langkah dari yang terakhir.

Contoh terselesaikan 5: mencari translasi dan faktor skala

Lingkaran L_1 berpusat di $(2, -1)$ dan berjari-jari 3. L_1 ditranslasi oleh T menjadi L_2. Kemudian L_2 didilatasi dengan pusat O dan faktor skala k menjadi $L_3 : (x-9)^2 + (y+6)^2 = 81$. Tentukan T dan k.

Penyelesaian. Jari-jari L_3 adalah $\sqrt{81} = 9$, sedangkan jari-jari L_2 tetap 3 (translasi tidak mengubahnya). Jadi $|k| = \frac{9}{3} = 3$.

- Bila $k = 3$: pusat L_2 = pusat L_3 dibagi 3 = $(3, -2)$. Maka $T = (3, -2) - (2, -1) = (1, -1)$.
- Bila $k = -3$: pusat $L_2 = (-3, 2)$. Maka $T = (-3, 2) - (2, -1) = (-5, 3)$.

Keduanya sah secara matematika. Pilihan jawaban yang menentukan mana yang dimaksud. Cek $k = 3$: $(2, -1) \to (3, -2) \to (9, -6)$, sesuai pusat L_3.

Pengecoh yang perlu dikenali: $k = 9$ (membandingkan kuadrat jari-jari, $\frac{81}{9}$), $k = 27$ (membandingkan 81 dengan jari-jari 3), dan $T = (7, -5)$ yang diperoleh dari pusat L_3 dikurangi pusat L_1, yaitu **melupakan dilatasi**.

6. Dua transformasi berturut-turut

Bila soal berkata "ditranslasi, **kemudian** didilatasi", kerjakan dalam urutan itu. Bayangan langkah pertama menjadi titik asal langkah kedua. Untuk titik dan lingkaran, kerjakan langkah demi langkah. Untuk garis atau kurva, kamu dapat menyubstitusi balik dua kali (mulai dari kurva semula), atau menggabungkan rumusnya dulu. Pada sub bab 2.7, penggabungan ini ditulis dengan perkalian matriks. Urutan **tidak boleh ditukar**: translasi lalu dilatasi umumnya berbeda hasilnya dengan dilatasi lalu translasi.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal transformasi

1. **Tulis daftar langkahnya.** Jenis transformasi, pusat atau cermin, arah rotasi, faktor skala, dan urutannya. "Searah jarum jam" berarti sudut negatif.
2. **Pilih alat yang paling hemat.** Titik → rumus langsung. Lingkaran → pusat dan jari-jari. Garis → substitusi balik atau dua titik. Kurva lain → substitusi balik.
3. **Untuk pusat bukan O, geser–putar–geser balik.** Kerjakan dengan vektor dari pusat,

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

jangan memakai rumus pusat O.

4. **Substitusi selalu balik.** Nyatakan x dan y dengan x' dan y', lalu masukkan ke persamaan semula.
5. **Cek dengan satu titik khusus.** Titik pada cermin tidak berpindah. Pusat rotasi tidak berpindah. Titik potong sumbu mudah dihitung.
6. **Cek gradien atau jari-jari.** Rotasi 90° → tegak lurus. Translasi, dilatasi, rotasi 180° → sejajar. Jari-jari hanya berubah oleh dilatasi.
7. **Untuk PG kompleks, uji setiap titik ke persamaan bayangan.** Jangan berhenti setelah menemukan satu titik yang cocok.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Substitusi maju	Translasi $(-1, 3)$ pada parabola dikerjakan dengan mengganti x menjadi $x - 1$, sehingga puncak bergeser sejauh $(1, -3)$	Balik dulu rumusnya: $x = x' + 1$, $y = y' - 3$. Cek dengan puncak
Arah rotasi tertukar	Rotasi searah jarum jam dikerjakan dengan $(-y, x)$	Berlawanan arah jarum jam: $(-y, x)$. Searah jarum jam: $(y, -x)$. Uji dengan $(1, 0)$
Pusat rotasi diabaikan	Rotasi terhadap $(2, 0)$ dikerjakan seperti terhadap O	Geser–putar–geser balik dengan vektor $(x - a,\ y - b)$
Pusat dianggap selalu pada bayangan	Memilih pusat rotasi sebagai titik pada garis bayangan	Pusat ada pada bayangan hanya bila ada pada garis semula. Uji dengan persamaan
Faktor skala dari r^2	L_3 berpersamaan $\cdots = 16$ dan $r_2 = 2$, lalu $k = 8$ atau $k = 4$ (pengecoh SA-20)	$\lvert k \rvert = r_{\text{akhir}} : r_{\text{awal}} = 4 : 2$
Faktor skala negatif	Jari-jari ditulis -4, atau bayangan diletakkan di sisi yang sama dengan titik asal	Jari-jari dikali $\lvert k \rvert$. Untuk $k < 0$, bayangan di seberang pusat
Cermin $y = x + c$ disamakan dengan cermin $y = x$ lalu translasi $(0, c)$	Bayangan $(2, 5)$ terhadap $y = x + 1$ ditulis $(5, 3)$, padahal yang benar $(4, 3)$	Rumus $(y - c,\ x + c)$. Cek titik tengah pada cermin
Cermin $x = h$ ditulis $h - x$	Bayangan $(5, -2)$ terhadap $x = 1$ ditulis $(-4, -2)$	$x' = 2h - x$, karena titik tengahnya harus di $x = h$
Melupakan satu langkah	Translasi dihitung dari pusat L_1 ke pusat L_3, dilatasi terlewat	Hitung mundur dari langkah terakhir, satu per satu

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

• BEDAH SOAL ASLI

Soal pertama (SA-20) dijawab benar oleh 35,13 % peserta. Polanya persis Contoh terselesaikan 5: lingkaran ditranslasi lalu didilatasi, dan kamu diminta menemukan translasi serta faktor skalanya. Mulailah dari **jari-jari** untuk mendapat faktor skala, baru kemudian dari **pusat** untuk mendapat translasi. Perhatikan bahwa tiga pilihan memakai faktor 4 atau 8. Angka-angka itu muncul dari membandingkan kuadrat jari-jari.

►. Lingkaran L_1 memiliki pusat di $(-5, 3)$ dan jari-jari 2. Lingkaran L_2 adalah bayangan dari L_1 setelah dilakukan translasi T. Lingkaran L_3 dengan persamaan $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$ adalah bayangan dari L_2 setelah dilakukan dilatasi dengan pusat $O(0,0)$ dan faktor skala tertentu.
Pernyataan yang benar mengenai translasi T dan faktor skala dilatasi tersebut adalah ....

A. $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 8

B. $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 4

C. $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 2

D. $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 2

E. $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 8

Pembahasan **Kunci: C**

Konsep: translasi tidak mengubah jari-jari; dilatasi faktor k mengalikan jari-jari dengan $|k|$ dan memetakan pusat $(p, q) \to (kp, kq)$ (pusat dilatasi O).

Langkah 1 – Faktor skala. L_3: pusat $(-4, 4)$, $r = 4$. L_2 berjari-jari 2 (sama dengan L_1). Jadi $|k| = \dfrac{4}{2} = 2$.

Langkah 2 – Pusat L_2. Dengan $k = 2$: pusat $L_2 = \left(\dfrac{-4}{2}, \dfrac{4}{2}\right) = (-2, 2)$.

Langkah 3 – Translasi. $T = (-2, 2) - (-5, 3) = (3, -1)$.

Cek ulang: $(-5, 3) \xrightarrow{T} (-2, 2) \xrightarrow{[O,2]} (-4, 4)$ ✓, jari-jari $2 \to 4$ ✓. (Faktor $k = -2$ memberi $T = (7, -5)$, tidak ada di pilihan.)

Analisis pilihan:
• A ✗ dan E ✗: faktor 8 muncul dari membandingkan $r^2 = 16$ dengan $r = 2$.
• B ✗: faktor 4 muncul dari membandingkan r^2: $\frac{16}{4}$. Faktor skala membandingkan **jari-jari**, bukan kuadratnya.
• D ✗: $T = (1, 1)$ diperoleh dari $(-4, 4) - (-5, 3)$, yaitu melupakan dilatasi.

Jawaban: C.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Soal berikutnya (SA-21) adalah salah satu soal tersulit di bab ini: hanya 11,68 % peserta yang menjawab benar. Soal ini menggabungkan tiga hal yang masing-masing mudah salah: rotasi **berlawanan** arah jarum jam, pusat $(2, 0)$ yang **bukan** O, dan substitusi **balik** ke persamaan garis. Pilihan $(1, 2)$ disiapkan untuk siswa yang salah tanda. Sebelum membaca pembahasan, kerjakan dengan langkah Contoh terselesaikan 3, lalu cek apakah pusat rotasi terletak pada garis semula.

►. Garis l merupakan bayangan garis $3x + 2y = 6$ yang dirotasikan sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi $(2, 0)$.
Manakah koordinat titik yang terletak pada garis l?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(-3, -2)$
☐ B. $(-2, -1)$
☐ C. $(1, 2)$
☐ D. $(2, 0)$
☐ E. $(5, 2)$

Pembahasan **Kunci: D, E**

Rumus rotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap $P(a, b)$:
$x' - a = -(y - b), \qquad y' - b = x - a$
Dengan $P(2, 0)$: $x' = 2 - y$ dan $y' = x - 2$, sehingga $y = 2 - x'$ dan $x = y' + 2$.

Langkah 1 – Substitusi ke $3x + 2y = 6$.
$3(y' + 2) + 2(2 - x') = 6 \Rightarrow 3y' - 2x' + 10 = 6 \Rightarrow 2x' - 3y' = 4$
Jadi $l : 2x - 3y = 4$.

Langkah 2 – Uji setiap titik.
• $(-3, -2)$: $-6 + 6 = 0 \neq 4$ ✗
• $(-2, -1)$: $-4 + 3 = -1$ ✗
• $(1, 2)$: $2 - 6 = -4$ ✗ **(jebakan:** tanda terbalik, titik ini memenuhi $2x - 3y = -4$, hasil rotasi searah jarum jam yang salah)
• $(2, 0)$: $4 - 0 = 4$ ✓
• $(5, 2)$: $10 - 6 = 4$ ✓

Cek ulang: pusat rotasi $(2, 0)$ terletak pada garis asal ($3 \cdot 2 + 0 = 6$), sehingga tidak berpindah dan pasti terletak pada l ✓. Gradien asal $-\frac{3}{2}$, gradien $l = \frac{2}{3}$; hasil kalinya -1 (tegak lurus) sesuai rotasi 90° ✓.

Jawaban: $(2, 0)$ **dan** $(5, 2)$.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

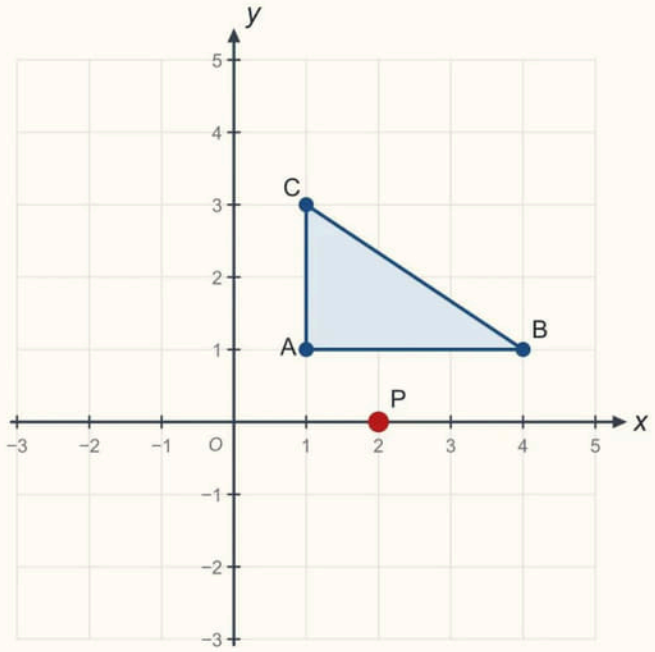
Soal berikut adalah rotasi 90° dengan pusat **bukan** O, seperti SA-21. Kerjakan dengan rumus pada tabel: kurangi pusat, putar, lalu tambahkan pusat kembali. Uji kelima pernyataan satu per satu.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Segitiga ABC pada gambar dirotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $P(2, 0)$, menghasilkan segitiga $A'B'C'$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Sisi $A'B'$ sejajar sumbu X.

☐ B. Bayangan titik B adalah $B'(1, 2)$.

☐ C. Bayangan titik C adalah $C'(-3, 1)$.

☐ D. Luas segitiga $A'B'C'$ adalah 3 satuan luas.

☐ E. Bayangan titik A adalah $A'(1, -1)$.

Pembahasan **Kunci: B, D, E**

Konsep: rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $P(a, b)$: geser agar P menjadi asal, putar $(x, y) \to (-y, x)$, lalu geser kembali: $(x', y') = (a - (y - b),\ b + (x - a))$.

Analisis tiap pilihan:

• A ✗ — $A'(1, -1)$ dan $B'(1, 2)$ mempunyai absis sama, jadi $A'B'$ sejajar sumbu Y. Rotasi 90° memutar sisi mendatar menjadi tegak.

• B ✓ — $B - P = (2, 1)$ diputar menjadi $(-1, 2)$, lalu $P + (-1, 2) = (1, 2)$.

• C ✗ — $(-3, 1)$ adalah hasil rotasi terhadap O. Terhadap P: $C - P = (-1, 3) \to (-3, -1)$, jadi $C' = (-1, -1)$. *Jebakan:* lupa menggeser pusat.

• D ✓ — rotasi tidak mengubah ukuran; luas $ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

• E ✓ — $A - P = (-1, 1) \to (-1, -1)$, lalu $P + (-1, -1) = (1, -1)$.

Jawaban: B, D, dan E.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: pengecoh $C'(-3, 1)$ adalah hasil rotasi terhadap O, kesalahan yang paling sering muncul pada soal rotasi berpusat bukan O. Pernyataan 1 menguji sifat rotasi $90°$: sisi mendatar menjadi tegak. Pernyataan 4 tidak memerlukan perhitungan bayangan, karena rotasi tidak mengubah ukuran sehingga luasnya tetap 3.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu rumus bayangan dan rumus baliknya, lalu cek jawabanmu dengan satu titik.

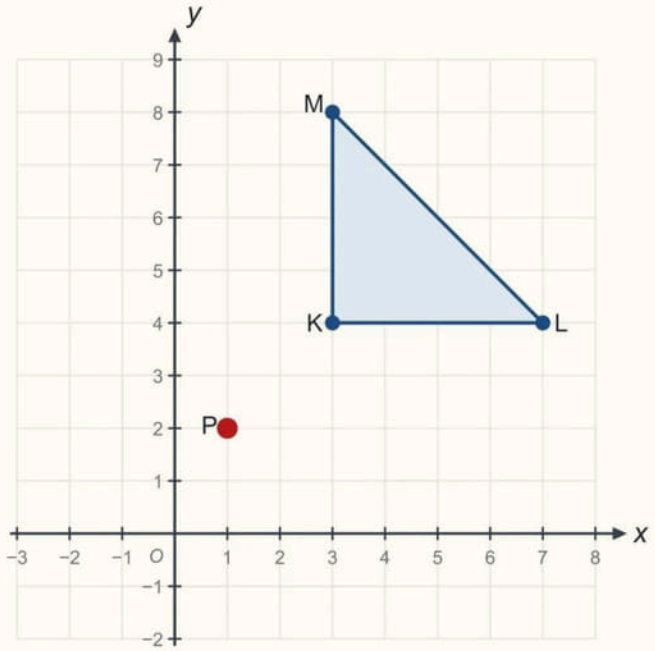
1. Garis $2x - 3y + 6 = 0$ dicerminkan terhadap garis $x = 1$. Persamaan bayangannya adalah ....

A. $2x + 3y + 10 = 0$
B. $2x - 3y + 2 = 0$
C. $2x + 3y - 10 = 0$
D. $-2x - 3y + 6 = 0$
E. $2x + 3y + 6 = 0$

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Segitiga KLM pada gambar didilatasi dengan pusat $P(1, 2)$ dan faktor skala $-\frac{1}{2}$, menghasilkan segitiga $K'L'M'$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Bayangan titik K adalah $K'(0, 1)$.
☐ B. Luas segitiga $K'L'M'$ adalah 4 satuan luas, yaitu setengah luas segitiga KLM.
☐ C. Sisi $K'L'$ sejajar sisi KL.
☐ D. P, L, dan L' segaris, dan P terletak di antara L dan L'.
☐ E. Bayangan titik M adalah $M'(2, 5)$, di sebelah kanan atas titik P.

3. Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$.
Persamaan bayangannya adalah ....

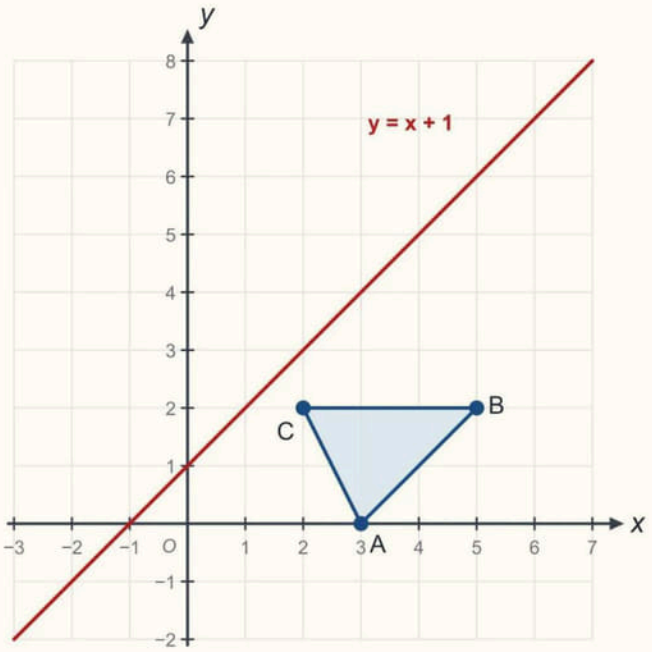
A. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
B. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$
D. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$
E. $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. Segitiga ABC pada gambar dicerminkan terhadap garis $y = x + 1$, menghasilkan segitiga $A'B'C'$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Ruas garis AA' sejajar garis $y = x + 1$.

☐ B. Bayangan titik A adalah $A'(-1, 4)$.

☐ C. Titik tengah ruas AA' terletak pada garis $y = x + 1$.

☐ D. Bayangan titik B adalah $B'(2, 5)$.

☐ E. Bayangan titik C adalah $C'(1, 3)$.

5. Garis $3x - y + 2 = 0$ ditranslasi oleh $T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Persamaan bayangannya adalah ....

A. $3x - y + 9 = 0$

B. $3x - y - 4 = 0$

C. $3x - y + 1 = 0$

D. $3x + y - 5 = 0$

E. $3x - y - 5 = 0$

Kunci singkat: 1. C 2. A, C, D 3. D 4. B, C, E 5. E

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

✔ PERIKSA DIRI

- Bila $x' = x - 1$ dan $y' = y + 3$, apa yang kamu substitusikan ke persamaan kurva semula, dan mengapa bukan $x - 1$?
- Bagaimana kamu memutar titik 90° searah jarum jam terhadap pusat (a, b) tanpa menghafal rumus, hanya dengan "geser–putar–geser balik"?
- Pada soal lingkaran yang ditranslasi lalu didilatasi, informasi mana yang kamu pakai untuk faktor skala dan mana untuk translasi?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 2.6: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-2.6

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 2.7 · Matriks transformasi dan komposisi

MATTL-2.7

◎ APA YANG DIUJI

Sub bab 2.6 mengajarkan bayangan oleh **satu** transformasi. Sub bab ini membahas dua hal lanjutan yang diminta kisi-kisi. Pertama, transformasi ditulis sebagai **perkalian matriks**. Kedua, dua transformasi atau lebih dilakukan **berturut-turut** (komposisi). Di TKA, komposisi muncul dalam bentuk "dicerminkan, **kemudian** ditranslasi", lalu kamu diminta menemukan parameter garis asal, matriks sebuah transformasi, atau luas bayangan.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-19	Menentukan hasil operasi dari dua parameter yang merupakan komponen pembentuk dua garis lurus disertai dengan informasi bayangan hasil dua kali transformasi geometri	18,98 %

Angka 18,98 % berarti kurang dari 1 dari 5 peserta yang menjawab benar. Hitungannya tidak panjang. Kesulitannya ada pada tiga keputusan kecil yang harus benar semua: **urutan** transformasi, **substitusi balik** ke persamaan garis, dan **menyamakan koefisien** dua persamaan garis yang boleh berbeda kelipatan. Pada SA-19, satu dari dua garis harus dikalikan -1 dulu sebelum koefisiennya dibandingkan.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menulis matriks refleksi, rotasi, dan dilatasi dengan pusat O tanpa menghafal, cukup dari bayangan titik $(1, 0)$ dan $(0, 1)$;
- menentukan matriks suatu transformasi dari pasangan titik dan bayangannya;
- menyusun matriks komposisi dengan urutan perkalian yang benar (dibaca dari kanan ke kiri);
- menggabungkan matriks dengan translasi dan menentukan bayangan garis, termasuk mencari parameter garis asal;
- menghitung luas bayangan dengan $|\det M| \times$ luas asal.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Transformasi sebagai perkalian matriks

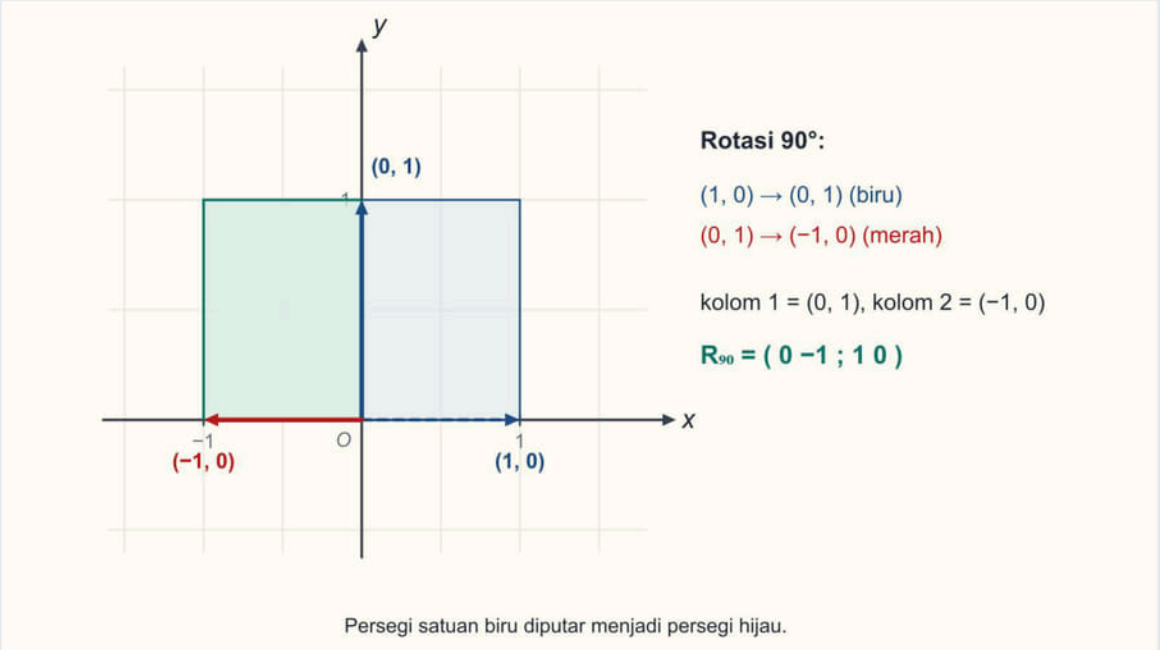
Banyak transformasi dengan pusat O dapat ditulis sebagai perkalian matriks 2×2 dengan vektor kolom titik:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Cara menyusun matriks tanpa menghafal. Kalikan matriks itu dengan $(1, 0)$: hasilnya (a, c), yaitu **kolom pertama**. Kalikan dengan $(0, 1)$: hasilnya (b, d), yaitu **kolom kedua**. Jadi:

> Kolom pertama matriks = bayangan titik $(1, 0)$. Kolom kedua = bayangan titik $(0, 1)$.

Contohnya rotasi 90° berlawanan arah jarum jam: $(1, 0) \to (0, 1)$ dan $(0, 1) \to (-1, 0)$. Kolom pertama $(0, 1)$, kolom kedua $(-1, 0)$. Mengapa dua titik itu cukup? Setiap titik dapat ditulis $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. Transformasi linear mempertahankan penjumlahan dan perkalian skalar, jadi bayangan (x, y) adalah x kali bayangan $(1, 0)$ ditambah y kali bayangan $(0, 1)$, tepat seperti perkalian matriks dengan kolom-kolom itu (Gambar 2.31).



Gambar 2.31 Rotasi 90°: bayangan $(1, 0)$ adalah $(0, 1)$ dan bayangan $(0, 1)$ adalah $(-1, 0)$. Keduanya menjadi kolom pertama dan kolom kedua matriks R_{90°. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Transformasi (pusat O)	Bayangan $(1, 0)$ = kolom 1	Bayangan $(0, 1)$ = kolom 2	Determinan
Refleksi sumbu X	$(1, 0)$	$(0, -1)$	-1
Refleksi sumbu Y	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	-1
Refleksi garis $y = x$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	-1

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Refleksi garis $y = -x$	$(0, -1)$	$(-1, 0)$	-1
Refleksi titik O (= rotasi 180°)	$(-1, 0)$	$(0, -1)$	1
Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	1
Rotasi 90° searah jarum jam	$(0, -1)$	$(1, 0)$	1
Rotasi θ berlawanan arah jarum jam	$(\cos\theta, \sin\theta)$	$(-\sin\theta, \cos\theta)$	1
Dilatasi $[O, k]$	$(k, 0)$	$(0, k)$	k^2

Dalam bentuk matriks:

$$M_{\text{sb } X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{sb } Y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{y=-x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{-90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad D_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Yang tidak dapat ditulis sebagai matriks 2×2. Perkalian matriks selalu memetakan $(0, 0)$ ke $(0, 0)$. Jadi transformasi yang **memindahkan titik O** tidak punya matriks 2×2: translasi, rotasi atau dilatasi dengan pusat bukan O, dan refleksi terhadap garis yang tidak melalui O (misalnya $x = 2$ atau $y = x + 3$). Untuk transformasi seperti itu, pakai rumus pada tabel sub bab 2.6.

Soal juga dapat memberi matriks **sembarang** yang tidak bernama khusus, seperti matriks N pada Contoh terselesaikan 6. Cara memakainya sama: kalikan matriks dengan vektor titik.

Contoh terselesaikan 1: mencari matriks dari titik dan bayangannya

Suatu transformasi dengan matriks M memetakan $A(1, 2)$ ke $A'(4, 1)$ dan $B(2, 1)$ ke $B'(5, -1)$. Tentukan M, lalu bayangan titik $(3, 0)$.

Penyelesaian (cara SPL). Misalkan baris pertama M adalah (a, b) dan baris kedua (c, d). Baris pertama menghasilkan koordinat x':

$$a + 2b = 4, \quad 2a + b = 5 \;\Rightarrow\; a = 2,\ b = 1$$

Baris kedua menghasilkan koordinat y':

$$c + 2d = 1, \quad 2c + d = -1 \;\Rightarrow\; c = -1,\ d = 1$$

Penyelesaian (cara invers, lihat sub bab 1.2). Susun titik asal sebagai kolom-kolom matriks P dan bayangannya sebagai kolom-kolom Q. Maka $MP = Q$, sehingga $M = QP^{-1}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa P^{-1} berada di **kanan** Q, bukan di kiri. Bayangan $(3, 0)$ adalah kolom pertama dikali 3, yaitu $(6, -3)$. Cek dengan A: $(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2,\ -1 + 2) = (4, 1)$, sesuai.

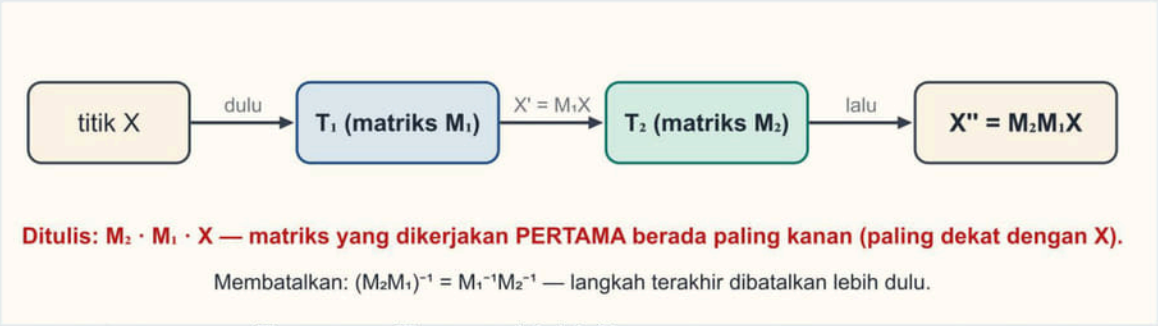
2. Komposisi = perkalian matriks, dibaca dari kanan ke kiri

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Misalkan T_1 bermatriks M_1 dan T_2 bermatriks M_2. Bila T_1 dilakukan **lebih dulu**, lalu T_2:

$$X' = M_1X, \qquad X'' = M_2X' = M_2(M_1X) = (M_2M_1)X$$

Jadi matriks komposisinya M_2M_1: **matriks yang dikerjakan pertama ditulis paling kanan**, paling dekat dengan titik X. Bagan pada Gambar 2.32 membantu mengingatnya.



Gambar 2.32 Komposisi "T_1 dulu, lalu T_2" ditulis M_2M_1X: matriks yang bekerja pertama berada paling dekat dengan titik. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Hal ini sama seperti fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, yang mengerjakan f lebih dulu. Notasinya pun sama: $T_2 \circ T_1$ berarti T_1 dulu, lalu T_2. Karena perkalian matriks umumnya tidak komutatif (sub bab 1.1), **urutan menentukan hasil**.

Contoh terselesaikan 2: urutan mengubah hasil

Titik $K(3, -1)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, kemudian dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O. Tentukan bayangannya, lalu bandingkan bila urutannya ditukar.

Penyelesaian. Cermin dulu, jadi $M_{y=x}$ di kanan:

$$R_{90^\circ}M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

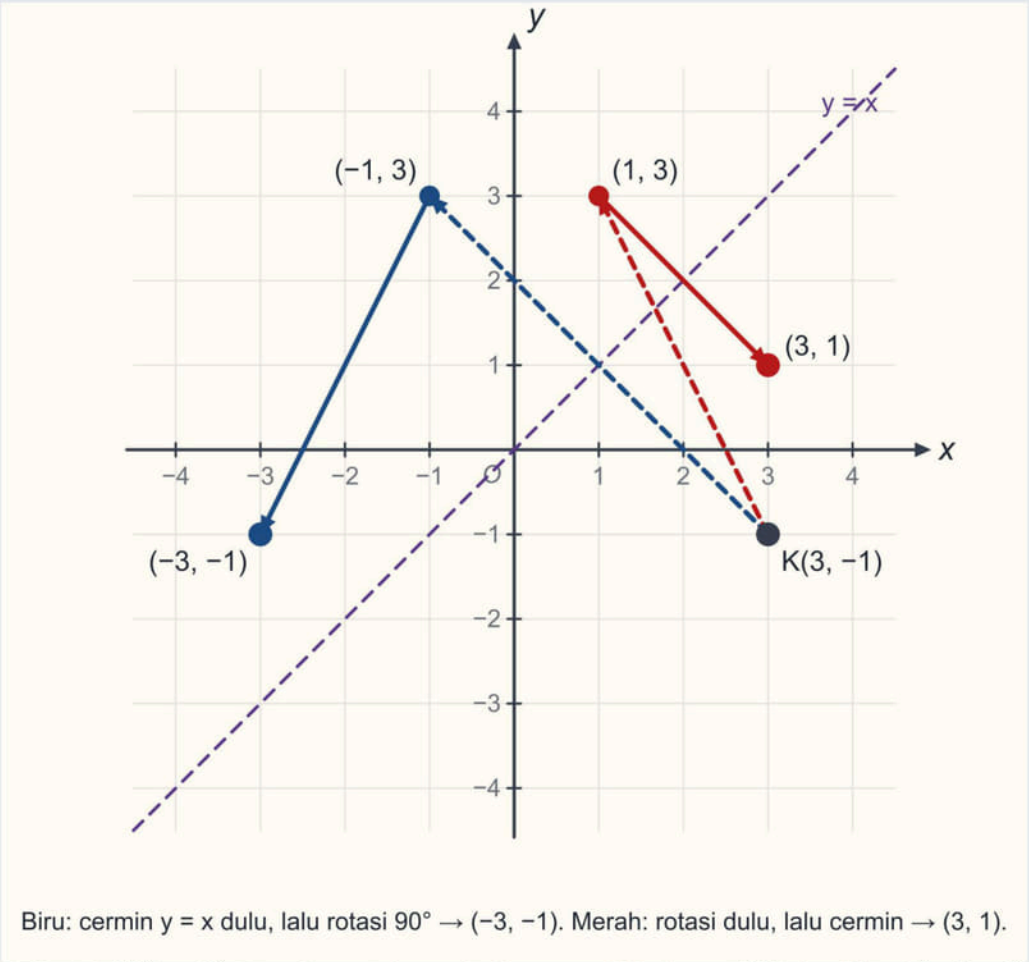
Hasilnya adalah matriks refleksi sumbu Y. Jadi $K(3, -1) \to (-3, -1)$. Cek langkah demi langkah: $(3, -1) \to (-1, 3) \to (-3, -1)$.

Bila urutannya ditukar (rotasi dulu):

$$M_{y=x}R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ini refleksi sumbu X, sehingga $K \to (3, 1)$. Dua urutan memberi dua bayangan yang berbeda. Kedua lintasan titik K digambar pada Gambar 2.33.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.33 Titik $K(3, -1)$. Biru: dicerminkan terhadap $y = x$ lalu dirotasi $90°$, berakhir di $(-3, -1)$. Merah: dirotasi dulu lalu dicerminkan, berakhir di $(3, 1)$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Komposisi khusus yang layak dikenali. Hasil-hasil berikut menghemat waktu dan sering dijadikan pernyataan pada soal Benar/Salah.

Komposisi	Hasilnya sama dengan	Contoh
Translasi T_1 lalu T_2	translasi $T_1 + T_2$	$(2, 1)$ lalu $(-5, 3)$ sama dengan $(-3, 4)$
Rotasi α lalu β, pusat sama	rotasi $\alpha + \beta$	$30°$ lalu $60°$ sama dengan $90°$
Dilatasi k_1 lalu k_2, pusat sama	dilatasi $k_1 k_2$	$[O, 2]$ lalu $[O, -3]$ sama dengan $[O, -6]$
Refleksi terhadap dua garis sejajar berjarak d	translasi sejauh $2d$, tegak lurus cermin, arah dari cermin pertama ke cermin kedua	$x = 1$ lalu $x = 4$: $(x, y) \to (x + 6,\ y)$
Refleksi terhadap dua garis yang berpotongan dengan sudut α	rotasi 2α terhadap titik potongnya, arah dari cermin pertama ke cermin kedua	sumbu X lalu $y = x$ ($\alpha = 45°$): rotasi $90°$ berlawanan arah jarum jam
Refleksi sumbu X lalu sumbu Y	rotasi $180°$ terhadap O	$(3, 1) \to (3, -1) \to (-3, -1)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Refleksi yang sama dua kali	identitas (titik kembali ke tempat semula)	matriks hasilnya I

Kamu dapat membuktikan baris kelima dengan matriks: $M_{y=x}M_{\text{sb }X}$ menghasilkan R_{90°. Cobalah sendiri sebagai latihan.

3. Komposisi yang memuat translasi

Translasi tidak dapat ditulis sebagai matriks 2×2. Translasi berupa **penjumlahan** vektor. Karena itu, urutannya harus ditulis jelas:

- matriks M dulu, lalu translasi T: $X' = MX + T$;
- translasi T dulu, lalu matriks M: $X' = M(X + T) = MX + MT$.

Keduanya berbeda, kecuali bila kebetulan $MT = T$. Untuk mendapat bayangan garis, balik rumusnya seperti biasa. Pada urutan pertama, $X = M^{-1}(X' - T)$.

Contoh terselesaikan 3: garis dicerminkan lalu digeser

Garis $3x - y + 2 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu X, kemudian ditranslasi oleh $T = (2, -3)$. Tentukan bayangannya. Bandingkan bila translasi dikerjakan lebih dulu.

Penyelesaian. Cermin sumbu X: $(x, y) \to (x, -y)$. Lalu translasi: $x' = x + 2$ dan $y' = -y - 3$. Dibalik: $x = x' - 2$ dan $y = -y' - 3$. Substitusikan:

$$3(x' - 2) - (-y' - 3) + 2 = 0 \;\Rightarrow\; 3x' + y' - 1 = 0$$

Bayangannya $3x + y - 1 = 0$. Cek: titik $(0, 2)$ pada garis semula $\to (0, -2) \to (2, -5)$, dan $3 \cdot 2 - 5 - 1 = 0$.

Urutan ditukar. Translasi dulu: $(x + 2,\ y - 3)$. Lalu cermin: $x' = x + 2$ dan $y' = 3 - y$. Dibalik: $x = x' - 2$ dan $y = 3 - y'$:

$$3(x' - 2) - (3 - y') + 2 = 0 \;\Rightarrow\; 3x' + y' - 7 = 0$$

Bayangannya $3x + y - 7 = 0$. Kedua bayangan sejajar tetapi tidak sama. Pengecoh pada soal sering berupa hasil dari urutan yang ditukar.

Contoh terselesaikan 4: mencari parameter garis asal (pola SA-19)

Garis $ax + 2y + b = 0$ dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O, kemudian ditranslasi oleh $T = (-1, 2)$. Bayangannya adalah garis $2x - 3y + 5 = 0$. Tentukan $a + b$.

Penyelesaian. Rotasi: $(x, y) \to (-y, x)$. Lalu translasi: $x' = -y - 1$ dan $y' = x + 2$. Dibalik: $y = -x' - 1$ dan $x = y' - 2$. Substitusikan ke garis asal:

$$a(y' - 2) + 2(-x' - 1) + b = 0 \;\Rightarrow\; -2x' + ay' + (b - 2a - 2) = 0$$

Persamaan ini harus menyatakan garis yang sama dengan $2x - 3y + 5 = 0$. Dua persamaan menyatakan garis yang sama bila koefisiennya **sebanding**, yaitu yang satu kelipatan λ dari yang lain. Dari koefisien x: $-2 = \lambda \cdot 2$, jadi $\lambda = -1$. Akibatnya:

- koefisien y: $a = (-1)(-3) = 3$;

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- konstanta: $b - 2a - 2 = (-1)(5) = -5$, jadi $b = -5 + 6 + 2 = 3$.

Jadi $a + b = 6$. Cek dengan titik: garis asal $3x + 2y + 3 = 0$ memuat $(-1, 0)$. Dirotasi menjadi $(0, -1)$, lalu ditranslasi menjadi $(-1, 1)$. Ternyata $2(-1) - 3(1) + 5 = 0$.

Cara kedua: mundur dengan dua titik. Ambil dua titik yang mudah pada garis bayangan, misalnya $(-1, 1)$ dan $(2, 3)$. Kembalikan setiap titik ke titik asalnya dengan membatalkan langkah-langkahnya dalam **urutan terbalik**: batalkan translasi dulu (kurangi $(-1, 2)$), baru batalkan rotasi (putar 90° searah jarum jam, $(x, y) \to (y, -x)$).

- $(-1, 1) \to (0, -1) \to (-1, 0)$
- $(2, 3) \to (3, 1) \to (1, -3)$

Kedua titik asal itu harus memenuhi $ax + 2y + b = 0$. Diperoleh $-a + b = 0$ dan $a - 6 + b = 0$, sehingga $a = b = 3$. Hasilnya sama. Cara ini berguna untuk mengecek, atau bila kamu ragu dengan substitusi balik.

Dua kesalahan yang menghasilkan jawaban lain: menyamakan koefisien tanpa λ (langsung $a = -3$), dan menukar urutan (translasi dulu) yang menghasilkan $a = 3, b = -4$, sehingga $a + b = -1$.

4. Matriks invers untuk substitusi balik

Bila transformasinya berupa matriks M saja, rumus baliknya adalah $X = M^{-1}X'$. Invers matriks 2×2 dibahas di sub bab 1.2:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Contoh terselesaikan 5: garis oleh matriks sembarang

Tentukan bayangan garis $x + y = 4$ oleh transformasi bermatriks berikut.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. $\det M = 2 - 1 = 1$, sehingga:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x = x' - y', \quad y = -x' + 2y'$$

Substitusikan ke $x + y = 4$: $(x' - y') + (-x' + 2y') = 4$, jadi $y' = 4$. Bayangannya garis mendatar $y = 4$. Cek dengan dua titik: $(4, 0) \to (8, 4)$ dan $(0, 4) \to (4, 4)$. Keduanya memang terletak pada $y = 4$.

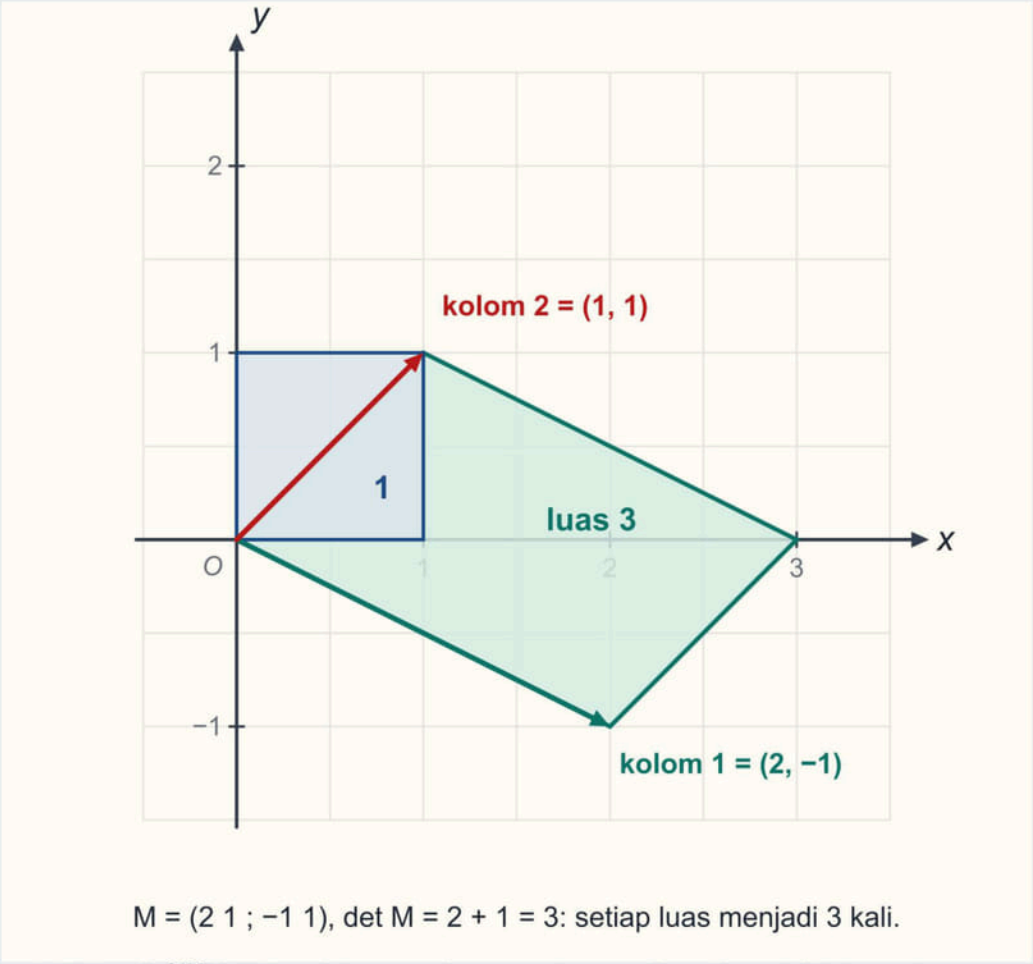
Membatalkan komposisi. Untuk membatalkan dua langkah, batalkan langkah terakhir lebih dulu: $(M_2 M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1}$. Bayangkan memakai kaus kaki lalu sepatu. Untuk melepasnya, sepatu dilepas dulu, baru kaus kaki. Prinsip inilah yang dipakai pada cara kedua Contoh terselesaikan 4.

Bila $\det M = 0$, matriks tidak punya invers. Seluruh bidang "dipipihkan" menjadi sebuah garis (atau satu titik), sehingga cara ini tidak dapat dipakai.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Determinan dan luas bayangan

Matriks M memetakan persegi satuan (sisi $(1, 0)$ dan $(0, 1)$) menjadi jajargenjang yang sisinya adalah kedua kolom M. Luas jajargenjang itu $|ad - bc| = |\det M|$ (lihat Gambar 2.34 dan sub bab 1.2). Karena setiap bangun dapat dipandang sebagai susunan persegi-persegi kecil, berlaku:



Gambar 2.34 Matriks M dari Contoh 1 memetakan persegi satuan (luas 1) menjadi jajargenjang yang sisinya kolom-kolom M. Luasnya $|\det M| = 3$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

$$\text{Luas bayangan} = |\det M| \times \text{luas bangun asal}$$

Akibat yang sering diuji:

- **Komposisi:** $\det(M_2 M_1) = \det M_2 \cdot \det M_1$. Faktor luasnya dikalikan.
- **Rotasi dan refleksi** memiliki $|\det| = 1$, jadi luas tetap. **Translasi** juga tidak mengubah luas.
- **Dilatasi** $[O, k]$ memiliki $\det = k^2$. Untuk matriks 2×2, $\det(kN) = k^2 \det N$, **bukan** $k \det N$.
- **Tanda determinan.** Bila $\det M < 0$ (misalnya refleksi), urutan titik bangun terbalik: titik A, B, C yang semula berurutan berlawanan arah jarum jam menjadi searah jarum jam. Luas tetap memakai nilai mutlak.

Untuk luas segitiga dari koordinat (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), pakai rumus berikut (sama dengan setengah nilai mutlak sebuah determinan):

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$L = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

Contoh terselesaikan 6: luas bayangan (menilai pernyataan)

Sebuah taman berbentuk segitiga digambar pada denah dengan titik sudut $A(-1, 0)$, $B(3, 1)$, dan $C(1, 4)$ (data disusun untuk contoh). Denah itu didilatasi dengan pusat O dan faktor skala -2, kemudian ditransformasikan oleh matriks berikut.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. Luas asal:

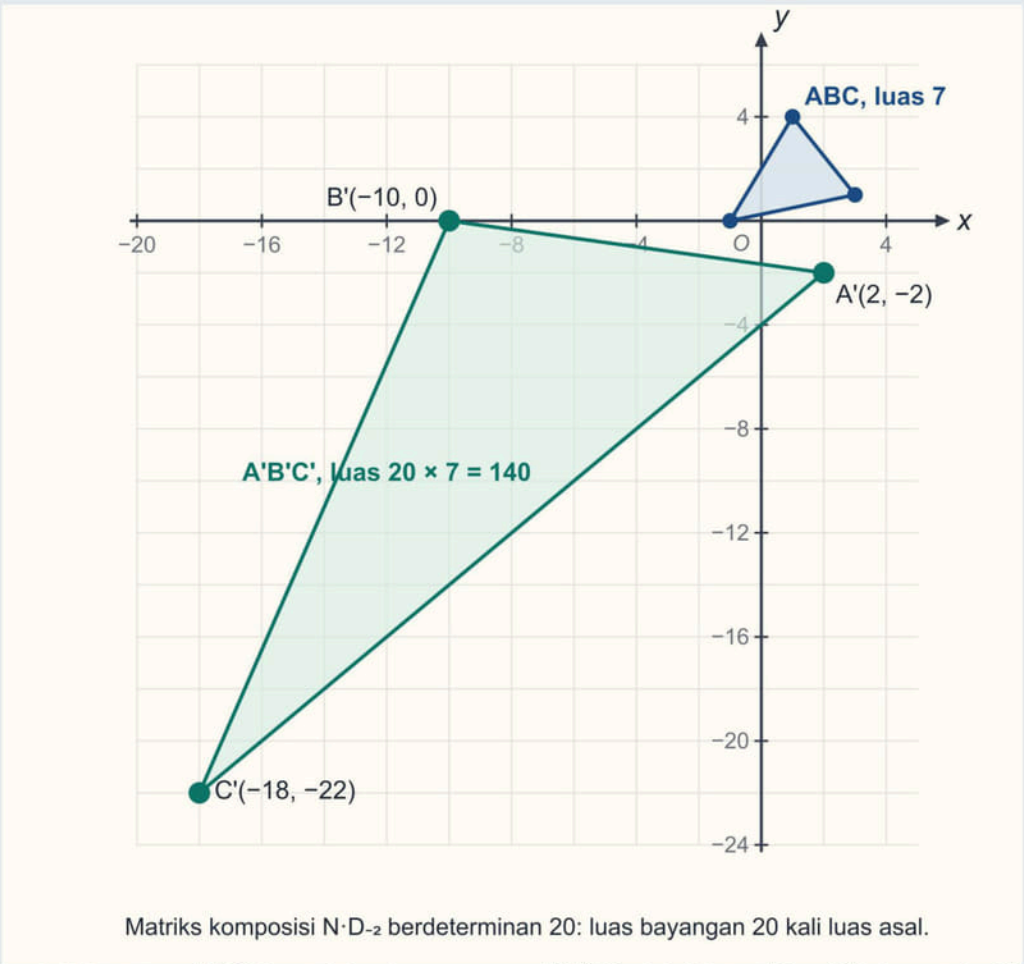
$$L = \frac{1}{2}\left|(3 + 1)(4 - 0) - (1 + 1)(1 - 0)\right| = \frac{1}{2}(16 - 2) = 7$$

Matriks komposisi (dilatasi dulu, jadi di kanan):

$$ND_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \det = 12 + 8 = 20$$

Cek: $\det D_{-2} \cdot \det N = 4 \times 5 = 20$. Bayangan titik sudutnya $A'(2, -2)$, $B'(-10, 0)$, dan $C'(-18, -22)$. Kedua segitiga digambar pada Gambar 2.35.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 2.35 Segitiga ABC (luas 7) dan bayangannya $A'B'C'$ oleh dilatasi $[O, -2]$ lalu matriks N. Luas bayangan $20 \times 7 = 140$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan	Nilai	Alasan
Luas denah setelah dilatasi saja adalah 14	Salah	dilatasi faktor -2 mengalikan luas dengan $(-2)^2 = 4$, jadi $4 \times 7 = 28$
Determinan matriks komposisi adalah -10	Salah	$\det(-2N) = (-2)^2 \times 5 = 20$, bukan -2×5
Luas bayangan akhir 140 satuan luas	Benar	$20 \times 7 = 140$
Bayangan akhir titik A adalah $(2, -2)$	Benar	$(-2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0,\ 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 0) = (2, -2)$
Bila urutannya ditukar (N dulu, lalu dilatasi), luas bayangan akhir tetap 140	Benar	$\det(D_{-2}N) = \det(ND_{-2}) = 20$
Urutan titik sudut bayangan berlawanan dengan urutan semula	Salah	$\det = 20 > 0$, jadi orientasi tetap

Perhatikan pernyataan kedua. Kesalahan $\det(kN) = k \det N$ sudah dibahas di sub bab 1.2, dan di sini kesalahan itu muncul lagi dalam bentuk dilatasi.

6. Memilih cara yang paling hemat

Soal komposisi dapat dikerjakan dengan beberapa cara. Pilih yang paling sedikit langkahnya:

Yang ditanyakan	Cara yang dianjurkan	Alasan
Bayangan satu atau dua titik	langkah demi langkah dengan rumus titik	tidak perlu mengalikan matriks
Bayangan banyak titik atau sebuah bangun	satu matriks komposisi, lalu kalikan dengan setiap titik	matriks cukup dihitung sekali
Luas bayangan	$\lvert\det\rvert$ setiap langkah dikalikan, lalu dikali luas asal	koordinat bayangan tidak diperlukan
Persamaan bayangan garis atau kurva	rumus komposisi, dibalik, lalu substitusi	satu substitusi untuk seluruh kurva
Parameter garis asal	substitusi balik lalu bandingkan dengan λ, dicek dengan cara mundur dua titik	dua cara saling mengecek
Lingkaran	pusat langkah demi langkah, jari-jari dikali $\lvert k\rvert$	persamaan tidak perlu disubstitusi

Apa pun caranya, akhiri dengan **satu titik pengecek** yang dikerjakan tanpa matriks. Pengecekan ini hanya memerlukan beberapa detik dan dapat menangkap kesalahan urutan atau tanda.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal matriks transformasi dan komposisi

1. **Tulis urutan transformasi.** Beri nomor: langkah 1, langkah 2. Kata "kemudian" atau

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

"dilanjutkan" menandai urutan. Notasi $T_2 \circ T_1$ berarti T_1 dulu.

2. **Tentukan matriks tiap langkah** dari bayangan $(1, 0)$ dan $(0, 1)$. Translasi dan pusat bukan O ditulis sebagai rumus, bukan matriks.
3. **Kalikan dari kanan ke kiri.** Matriks langkah pertama paling kanan. Bila ada translasi, tulis $X' = MX + T$ atau $X' = M(X + T)$ sesuai urutan.
4. **Untuk garis: substitusi balik.** Nyatakan x dan y dengan x' dan y' (atau pakai M^{-1}), lalu substitusikan ke persamaan semula.
5. **Bandingkan koefisien dengan faktor λ.** Dua persamaan garis yang sama boleh berbeda kelipatan. Tentukan λ dari koefisien yang sudah diketahui angkanya.
6. **Untuk luas: $|\det|\times$ luas asal.** Determinan komposisi = hasil kali determinan.
7. **Cek dengan satu titik** yang mudah, dikerjakan langkah demi langkah tanpa matriks.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Urutan perkalian terbalik	"T_1 lalu T_2" dihitung M_1M_2	Matriks yang dikerjakan pertama paling kanan: M_2M_1
Translasi dikalikan	Translasi $(1, -1)$ ditulis sebagai matriks lalu dikalikan	Translasi dijumlahkan: $X' = MX + T$
Tanda refleksi $y = -x$	Bayangan (x, y) ditulis (y, x) atau $(-x, -y)$	$(x, y) \to (-y, -x)$. Cek: $(1, 0) \to (0, -1)$
Koefisien disamakan tanpa kelipatan	Pada SA-19, $bx + y + \ldots$ disamakan langsung dengan $2x - y - 9$ sehingga $b = 2$	Cari λ dulu: di sini persamaan perlu dikali -1
$\det(kN) = k \det N$	Dilatasi faktor -2 dianggap mengalikan luas dengan -2 atau 2	Untuk 2×2: $\det(kN) = k^2 \det N$
Luas segitiga lupa $\frac{1}{2}$ atau lupa nilai mutlak	Luas segitiga $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$ ditulis 12, bukan 6	Pakai rumus koordinat lengkap dengan $\frac{1}{2}$ dan nilai mutlak
Matriks ditranspos	Bayangan $(1, 0)$ ditulis sebagai **baris** pertama	Bayangan $(1, 0)$ adalah **kolom** pertama. Cek dengan satu titik
Matriks rotasi dipakai untuk pusat bukan O	Rotasi terhadap $(2, 0)$ dikerjakan dengan R_{90° saja	Geser–putar–geser balik (sub bab 2.6)

BEDAH SOAL ASLI

Soal SA-19 dijawab benar oleh 18,98 % peserta. Polanya persis Contoh terselesaikan 4, tetapi dengan **dua** garis sekaligus: dua garis yang memuat parameter a dan b dicerminkan terhadap $y = x$, lalu ditranslasi. Tiga hal yang harus diperhatikan. Pertama, susun rumus komposisi dalam urutan yang benar (cermin dulu, baru translasi). Kedua, substitusi balik ke **masing-masing** garis. Ketiga, saat menyamakan garis kedua, perhatikan bahwa persamaannya perlu

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

dikalikan -1. Pilihan 2 menanti siswa yang langsung menyamakan koefisien tanpa mengalikan -1, sehingga mendapat $b = 2$.

►. Garis $ax + y - 9 = 0$ dan $x + by + 6 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, kemudian dilanjutkan translasi $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bayangannya berturut-turut adalah $x + 2y - 8 = 0$ dan $2x - y - 9 = 0$.
Nilai dari $2a - b = \ldots$

A. -6
B. -2
C. 0
D. 2
E. 6

Pembahasan **Kunci: E**

Langkah 1 – Rumus komposisi. Pencerminan terhadap $y = x$: $(x, y) \to (y, x)$. Lalu translasi $(1, -1)$:
$x' = y + 1, \qquad y' = x - 1$
Sehingga $x = y' + 1$ dan $y = x' - 1$.

Langkah 2 – Garis pertama. Substitusi ke $ax + y - 9 = 0$:
$a(y' + 1) + (x' - 1) - 9 = 0 \Rightarrow x' + ay' + (a - 10) = 0$
Disamakan dengan $x + 2y - 8 = 0$: $a = 2$ dan $a - 10 = -8$ ✓.

Langkah 3 – Garis kedua. Substitusi ke $x + by + 6 = 0$:
$(y' + 1) + b(x' - 1) + 6 = 0 \Rightarrow bx' + y' + (7 - b) = 0$
Disamakan dengan $2x - y - 9 = 0$ (kalikan -1: $-2x + y + 9 = 0$): $b = -2$ dan $7 - b = 9$ ✓.

Langkah 4. $2a - b = 4 - (-2) = 6$.

Cek ulang dengan titik: garis $2x + y - 9 = 0$ memuat $(0, 9)$ → dicerminkan $(9, 0)$ → ditranslasi $(10, -1)$; $10 + 2(-1) - 8 = 0$ ✓. Garis $x - 2y + 6 = 0$ memuat $(0, 3) \to (3, 0) \to (4, -1)$; $2 \cdot 4 - (-1) - 9 = 0$ ✓.

Jebakan: menyamakan koefisien tanpa memperhatikan bahwa persamaan garis boleh dikali konstanta (garis kedua perlu dikali -1). Pilihan 2 dan -2 muncul bila tanda b terbalik.

Jawaban: E.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut menguji urutan komposisi: garis ditransformasi oleh matriks M **lebih dulu**, baru dirotasi. Tulis matriks komposisinya dengan transformasi pertama di sebelah kanan, lalu nyatakan x dan y asal dalam x' dan y'.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Garis $y = 2x + 1$ ditransformasi oleh matriks $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dilanjutkan rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O.
Persamaan bayangan garis tersebut adalah ....

A. $y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$
B. $x = -1$
C. $x + 4y + 1 = 0$
D. $2x + 5y + 1 = 0$
E. $5x + 2y + 1 = 0$

Pembahasan **Kunci: E**

Konsep: komposisi "M dilanjutkan R_{90°" mempunyai matriks $R_{90^\circ}M$ (yang dikerjakan lebih dulu ditulis di kanan). Untuk bayangan garis, nyatakan x, y asal dalam x', y'.

Langkah 1. $R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga $R_{90^\circ}M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: $x' = -y, y' = x + 2y$.

Langkah 2. Maka $y = -x'$ dan $x = y' - 2y = y' + 2x'$.

Langkah 3. Substitusi ke $y = 2x + 1$: $-x' = 2(y' + 2x') + 1 \Rightarrow 5x' + 2y' + 1 = 0$.

Cek ulang: titik $(0, 1)$ pada garis asal: M memberi $(2, 1)$, rotasi memberi $(-1, 2)$; $-5 + 4 + 1 = 0$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: memakai rotasi searah jarum jam $(x, y) \to (y, -x)$; hasilnya $5x + 2y - 1 = 0$.
- B: urutan transformasi dibalik (rotasi dulu, baru M).
- C: mengalikan M dengan vektor secara salah, $(x, y) \to (x, 2x + y)$.
- D: x dan y tertukar saat menulis hasil akhir.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: setiap pilihan salah berasal dari satu kesalahan tertentu, yaitu arah rotasi terbalik (pilihan A), urutan transformasi dibalik (pilihan B), perkalian matriks dengan vektor yang keliru (pilihan C), atau x dan y tertukar di akhir (pilihan D). Cek dengan satu titik, misalnya $(0, 1)$ yang berbayangan $(-1, 2)$, cukup untuk menyingkirkan semua pengecoh itu.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu urutan transformasinya, lalu matriks atau rumus tiap langkah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Parabola $y = x^2 - 2x$ dicerminkan terhadap garis $x = 1$, kemudian hasilnya dicerminkan terhadap garis $x = 4$.
Persamaan bayangan akhirnya adalah ....

A. $y = x^2 + 10x + 24$
B. $y = x^2 - 14x + 48$
C. $y = x^2 - 8x + 15$
D. $y = x^2 - 2x + 6$
E. $y = x^2 - 2x$

2. Sebuah transformasi linear dengan matriks M memetakan titik $(1, 2)$ ke $(4, 5)$ dan titik $(2, 1)$ ke $(5, 1)$.
Bayangan titik $(3, -1)$ oleh transformasi tersebut adalah ....

A. $(5, -6)$
B. $(7, 0)$
C. $(-5, 6)$
D. $(9, 6)$
E. $(5, 6)$

Kunci singkat: 1. B 2. A

✔ PERIKSA DIRI

- Bila sebuah titik dicerminkan terhadap $y = x$ **kemudian** dirotasi 90° terhadap O, matriks mana yang kamu tulis di kanan, dan mengapa?
- Mengapa translasi tidak dapat dikalikan seperti matriks lain, dan bagaimana kamu menuliskan "cermin lalu translasi" dalam satu rumus?
- Sebuah bangun berluas 6 didilatasi $[O, -3]$ lalu dicerminkan terhadap sumbu Y. Tanpa menghitung koordinat, berapa luas bayangannya, dan apakah orientasinya terbalik?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 2.7: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-2.7

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kuis Akhir Bab 2

MATTL-KB2

Jumlah soal: 25 **Waktu anjuran:** 60 menit

Kerjakan sendiri dan berwaktu. Setelah selesai, cocokkan dengan kunci di Bagian D, isi tabel skor, lalu lihat anjuran di bawahnya.

Kerjakan Kuis Bab 2 di LMS

Skor dan progresmu tersimpan di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-KB2

1. Tali luncur (*flying fox*) di sebuah taman petualangan dipasang lurus dari tiang $A(1, -2, 4)$ ke tiang $B(7, 4, 1)$, dalam meter. Penyangga tambahan dipasang di titik C pada tali sehingga $AC : CB = 2 : 1$.
Koordinat titik C adalah ....

A. $(3, 0, 3)$
B. $(5, 2, 2)$
C. $(4, 1, 2{,}5)$
D. $(13, 10, -2)$
E. $(5, 2, 3)$

2. Seekor burung terbang lurus dengan kecepatan tetap dari puncak pohon $P(2, 3, 12)$ ke ujung tiang $Q(14, 7, 6)$ dalam waktu 14 detik. Satuan koordinat meter, dan sumbu z menyatakan ketinggian.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Vektor perpindahan burung adalah $\overrightarrow{PQ} = (12, 4, 6)$.
☐ B. Kecepatan burung adalah 1 meter per detik.
☐ C. Setelah 7 detik, burung berada di titik $(8, 5, 9)$.
☐ D. Ketinggian burung turun 6 meter setiap detik.
☐ E. Setelah 10 detik, jarak burung ke Q tinggal 4 meter.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Diketahui vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ p+1 \\ 2p \end{pmatrix}$ dengan $|\vec{v}| = \sqrt{21}$.

Jumlah semua nilai p yang memenuhi adalah ....

A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{11}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

E. $-\frac{1}{2}$

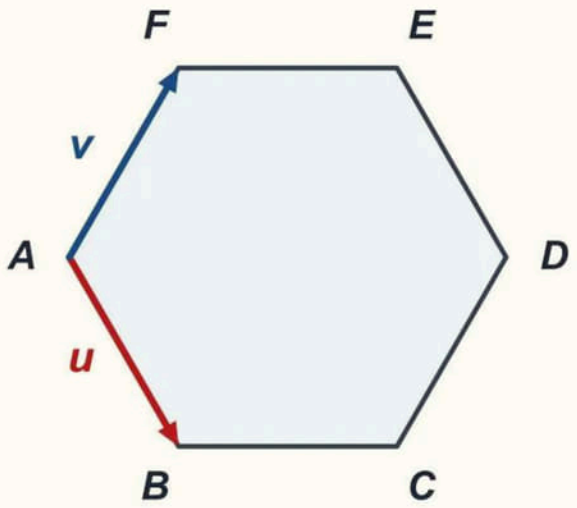
NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. $ABCDEF$ adalah segi enam beraturan dengan $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ dan $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$, seperti pada gambar.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\overrightarrow{AD} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

☐ B. $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$

☐ C. $\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

☐ D. $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + 2\vec{v}$

☐ E. $\overrightarrow{CD} = \vec{v} - \vec{u}$

5. Diketahui $\vec{a} = (2, -1, 2)$ dan $\vec{b} = (1, 2, -2)$.

Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

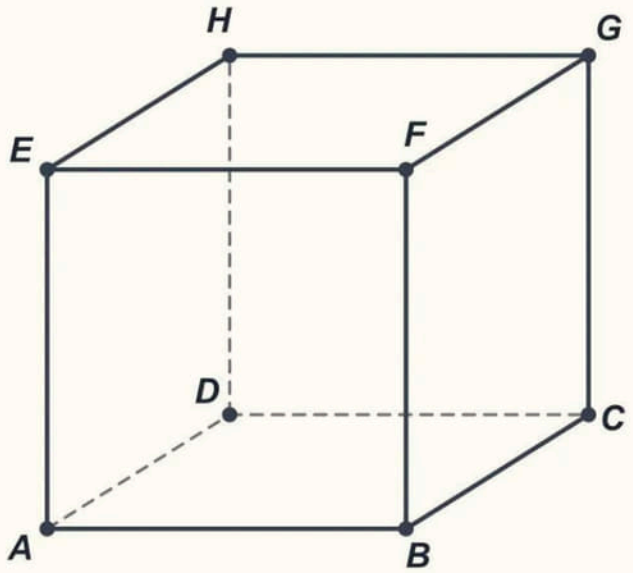
Pernyataan	Benar	Salah
$\lvert\vec{a}\rvert = 3$	○	○
$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert = 4$	○	○
$2\vec{a} - \vec{b} = (3, -4, 6)$	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

6. Besar sudut antara vektor $\vec{p} = (1, 1, 0)$ dan $\vec{q} = (1, 0, 1)$ adalah ....

A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°
E. 120°

7. Kubus $ABCD.EFGH$ pada gambar mempunyai panjang rusuk 2 satuan. Titik A diletakkan di $(0, 0, 0)$ dengan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, dan $\overrightarrow{AE}$ berturut-turut searah sumbu x, y, dan z positif.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Proyeksi skalar $\overrightarrow{AG}$ pada $\overrightarrow{AB}$ adalah $2\sqrt{3}$.
☐ B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = 4$
☐ C. $\overrightarrow{AE}$ tegak lurus $\overrightarrow{BG}$.
☐ D. Sudut antara $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{AF}$ adalah 60°.
☐ E. $\overrightarrow{AG}$ tegak lurus $\overrightarrow{BD}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

8. Sebuah troli barang ditarik dengan gaya $\vec{F} = (30, 40)$ newton sehingga berpindah sejauh $\vec{s} = (8, 0)$ meter di lantai yang datar.
Besar komponen gaya yang searah perpindahan troli adalah .... N

A. 30
B. 40
C. 50
D. 24
E. 240

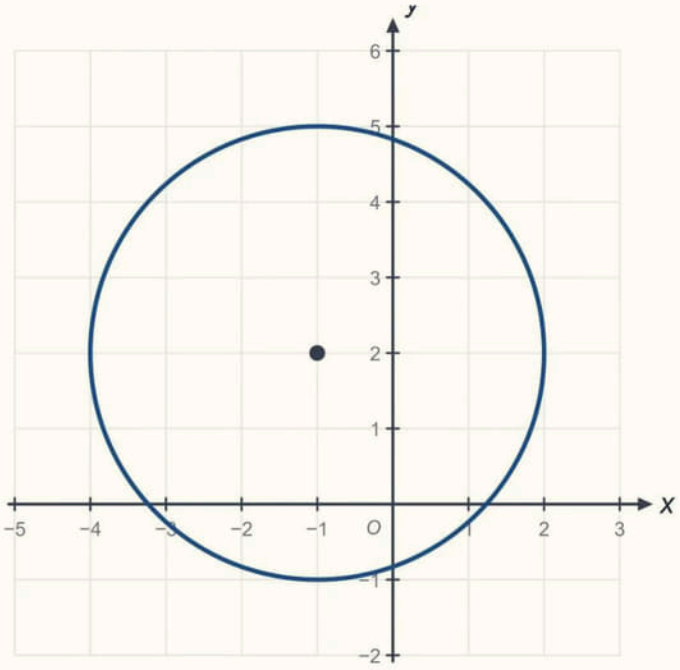
9. Pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ berturut-turut adalah ....

A. $(-3, 4)$ dan 6
B. $(3, -4)$ dan 36
C. $(6, -8)$ dan 6
D. $(3, -4)$ dan 6
E. $(3, -4)$ dan $\sqrt{14}$

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

10. Gambar berikut menunjukkan sebuah lingkaran pada bidang koordinat berpetak satuan.
Pernyataan yang benar tentang lingkaran itu adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Persamaannya $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.
☐ B. Titik $(1, 4)$ terletak di luar lingkaran.
☐ C. Garis $y = 5$ menyinggung lingkaran.
☐ D. Lingkaran memotong sumbu X di dua titik.
☐ E. Jari-jari lingkaran itu 9 satuan.

11. Sebuah lampu taman di titik $(0, 0)$ menerangi daerah berbentuk lingkaran berjari-jari 5 m. Jalan setapak lurus melewati taman itu dan dinyatakan dengan garis $y = x + 1$ (satuan meter).
Panjang bagian jalan setapak yang terkena cahaya lampu adalah ....

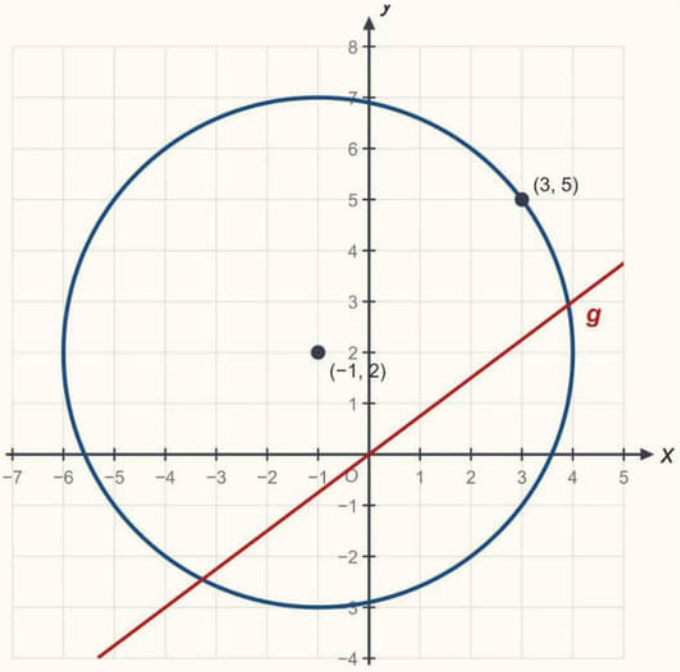
A. 10 m
B. $5\sqrt{2}$ m
C. 7 m
D. 14 m
E. $7\sqrt{2}$ m

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

12. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ di titik $(5, 3)$ adalah ....

A. $5x + 3y = 34$
B. $3x + 4y = 27$
C. $3x + 4y = 25$
D. $4x - 3y = 11$
E. $3x - 4y = 3$

13. Lingkaran pada gambar berpusat di $(-1, 2)$ dan melalui $(3, 5)$. Garis g melalui $(0, 0)$ dan $(4, 3)$.
Salah satu titik singgung garis singgung lingkaran yang **sejajar** garis g adalah ....



A. $(3, 5)$
B. $(-5, -1)$
C. $(2, -2)$
D. $(2, 6)$
E. $(-4, -2)$

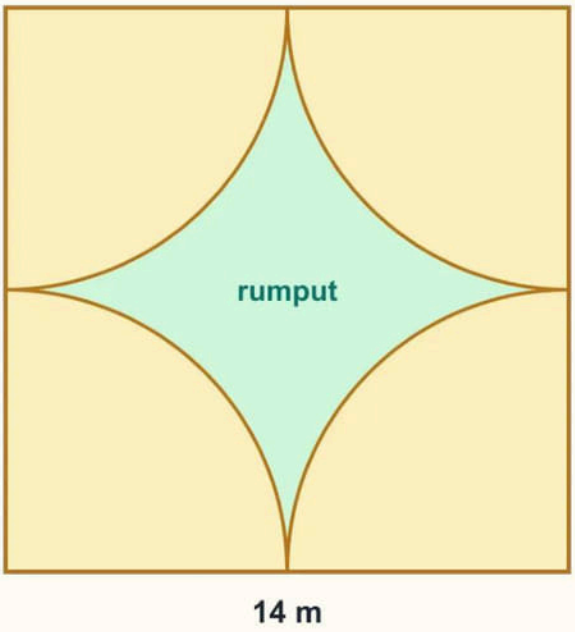
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

14. Dua puli mesin jahit berjari-jari 10 cm dan 4 cm dipasang dengan jarak kedua pusat 30 cm. Kedua puli dihubungkan sabuk yang tidak bersilangan.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Panjang setiap ruas sabuk yang lurus (garis singgung persekutuan luar) kurang dari 30 cm.	○	○
Panjang garis singgung persekutuan dalam kedua puli adalah 26 cm.	○	○
Sabuk melilit puli besar lebih dari setengah kelilingnya.	○	○

15. Sebuah taman berbentuk persegi bersisi 14 m. Di setiap pojoknya dibuat petak bunga berbentuk seperempat lingkaran berjari-jari 7 m dengan pusat di titik pojok itu (kuning pada gambar). Sisa taman ditanami rumput. Gunakan $\pi = \frac{22}{7}$.
Luas bagian yang ditanami rumput adalah .... m^2

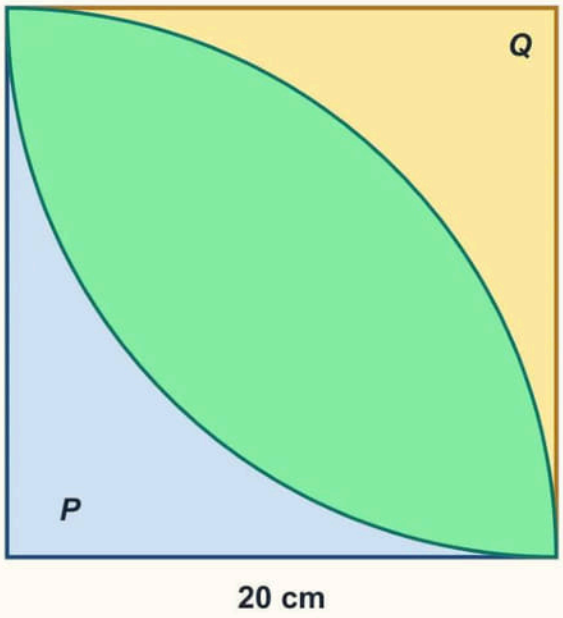


A. 154
B. 157,5
C. 98
D. 42
E. 38,5

16. Sebuah hiasan dinding berbentuk persegi bersisi 20 cm. Daerah biru adalah seperempat lingkaran berpusat di pojok kiri bawah P, dan daerah kuning adalah seperempat lingkaran berpusat di pojok kanan atas Q; keduanya berjari-jari 20 cm. Daerah yang termasuk keduanya tampak hijau. Gunakan $\pi = 3{,}14$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

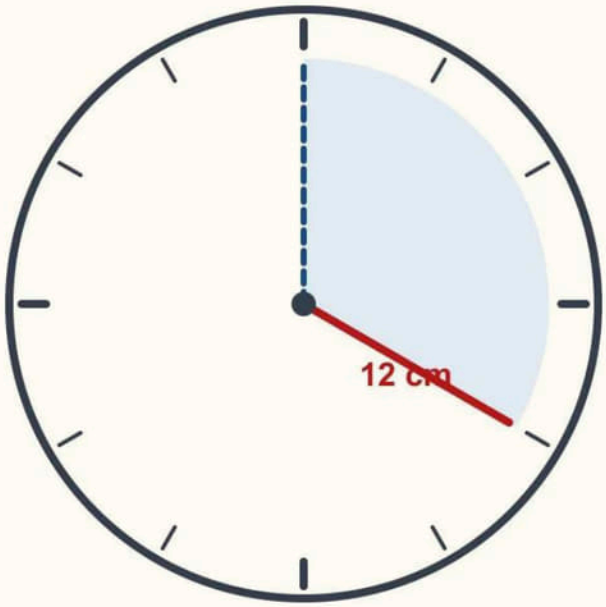


Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Luas daerah hijau adalah 228 cm^2.
☐ B. Luas daerah yang hanya biru (tanpa hijau) adalah 114 cm^2.
☐ C. Luas daerah hijau lebih dari setengah luas persegi.
☐ D. Keliling daerah hijau adalah 62,8 cm.
☐ E. Luas daerah hanya biru dan hanya kuning bersama-sama sama dengan luas hijau.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

17. Jarum menit sebuah jam dinding panjangnya 12 cm. Gambar menunjukkan daerah yang disapu jarum menit dari pukul 10.00 sampai 10.20. Gunakan $\pi = 3{,}14$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



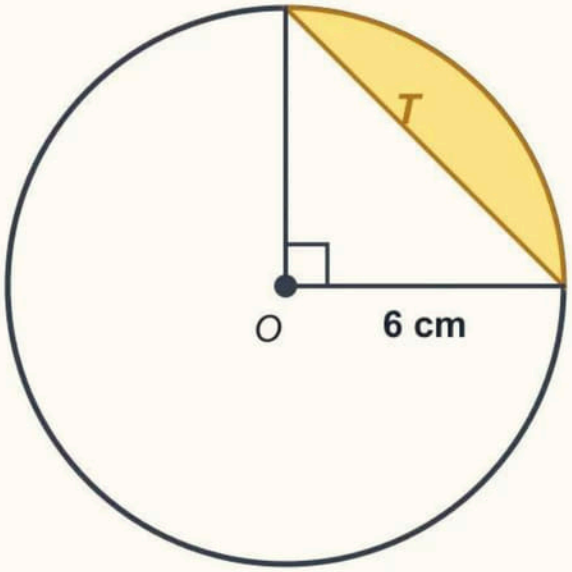
Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Selama 20 menit itu jarum menit berputar sebesar $120°$.	○	○
Luas daerah yang disapu jarum menit kurang dari 150 cm².	○	○
Ujung jarum menit menempuh lintasan sepanjang 25,12 cm.	○	○

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

18. Pada gambar, O adalah pusat lingkaran berjari-jari 6 cm dan kedua jari-jari saling tegak lurus. Daerah T yang diarsir kuning dibatasi tali busur dan busur kecil. Gunakan $\pi = 3{,}14$. Luas daerah T adalah .... cm^2



A. 10,26
B. 28,26
C. 18
D. 46,26
E. 5,13

19. Bayangan titik $A(-2, 5)$ oleh pencerminan terhadap garis $x = 3$ adalah ....

A. $(-2, 1)$
B. $(4, 5)$
C. $(-8, 5)$
D. $(2, -5)$
E. $(8, 5)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

20. Pada peta digital sebuah aplikasi, zona aman berbentuk lingkaran $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Zona itu didilatasi dengan pusat O dan faktor skala 2, kemudian ditranslasi oleh $T=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Pernyataan yang benar tentang bayangan zona itu adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Pusat bayangannya adalah $(1,2)$.
☐ B. Jari-jari bayangannya adalah 6.
☐ C. Persamaan bayangannya $(x-1)^2+(y-2)^2=18$.
☐ D. Luas bayangan empat kali luas zona semula.
☐ E. Titik $(4,-2)$ adalah pusat lingkaran bayangan.

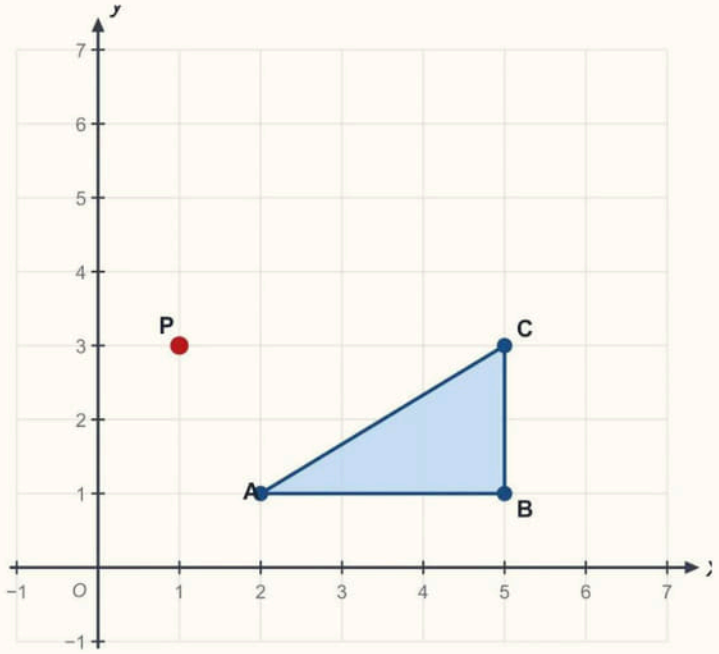
21. Garis $2x-y+3=0$ dirotasi 180° terhadap titik $P(1,2)$.
Pernyataan yang benar tentang bayangannya adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Persamaan bayangannya adalah $2x-y-3=0$.
☐ B. Bayangannya sejajar dengan garis semula.
☐ C. Titik $P(1,2)$ terletak pada bayangannya.
☐ D. Titik $(2,1)$ terletak pada bayangannya.
☐ E. Jarak garis semula ke bayangannya adalah 6 satuan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

22. Segitiga ABC pada gambar dirotasi sebesar 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat titik P.
Koordinat bayangan titik B adalah ....



A. $(-1, -1)$
B. $(2, 4)$
C. $(3, 7)$
D. $(-1, 5)$
E. $(3, -1)$

23. Matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap garis $y = x$ dilanjutkan dilatasi dengan pusat O dan faktor skala 3 adalah ....

A. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

24. Denah kolam berbentuk segitiga dengan luas 6 m^2 digambar pada layar. Gambar itu diolah dengan matriks $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, kemudian dirotasi 90° terhadap O.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\det M = 5$
☐ B. Luas bayangan akhir adalah 60 m².
☐ C. Bila rotasi dikerjakan lebih dulu, luas bayangan akhir tetap sama.
☐ D. Matriks M memetakan titik $(1, 0)$ ke titik $(2, 1)$.
☐ E. Invers matriks M adalah $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

25. Garis $2x + y - 4 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu Y, kemudian dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O.
Persamaan bayangannya adalah ....

A. $x + 2y - 4 = 0$
B. $x - 2y + 4 = 0$
C. $2x - y + 4 = 0$
D. $x + 2y + 4 = 0$
E. $2x + y + 4 = 0$

Tabel skor dan anjuran

Sub bab / subtopik	Nomor soal	Benar	Jika kurang separuh benar
Sub bab 2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan	1, 2, 3, 4, 5	___ / 5	Ulangi hlm. 180
Sub bab 2.2 · Hasil kali skalar dan sudut dua vektor	6, 7, 8	___ / 3	Ulangi hlm. 201
Sub bab 2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis	9, 10, 11	___ / 3	Ulangi hlm. 214
Sub bab 2.4 · Garis singgung lingkaran	12, 13, 14	___ / 3	Ulangi hlm. 229
Sub bab 2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran	15, 16, 17, 18	___ / 4	Ulangi hlm. 248
Sub bab 2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi	19, 20, 21, 22	___ / 4	Ulangi hlm. 268
Sub bab 2.7 · Matriks transformasi dan komposisi	23, 24, 25	___ / 3	Ulangi hlm. 288

Skor 70 % atau lebih: lanjut ke bab berikutnya. Skor 50–69 %: ulangi sub bab pada tabel yang kurang dari separuh benar. Skor di bawah 50 %: baca ulang bab ini dari awal. (Angka ini anjuran belajar, bukan prediksi nilai TKA.)

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bab 3 · Kalkulus: Limit

MATTL-B3

Setelah mempelajari bab ini, kamu dapat:

- menghitung limit fungsi aljabar bentuk tak tentu
- menafsirkan limit di tak hingga sebagai kecenderungan dalam konteks
- menghitung limit fungsi trigonometri tanpa aturan L'Hôpital

Peta bab

Sub bab	Judul
3.1	Limit fungsi aljabar di suatu titik
3.2	Limit di tak hingga dalam konteks
3.3	Limit fungsi trigonometri

Bab 3 di LMS

Buka seluruh latihan bab ini di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-B3

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik

MATTL-3.1

◎ APA YANG DIUJI

Soal limit di TKA tidak menguji hafalan rumus. Soal itu menguji apakah kamu tahu **langkah pertama** yang benar dan dapat memilih cara aljabar yang cocok: substitusi langsung, faktorisasi, atau perkalian bentuk sekawan. Kisi-kisi resmi juga menegaskan bahwa limit dikerjakan **tanpa aturan L'Hôpital**. Semua soal limit aljabar di TKA dapat diselesaikan dengan aljabar kelas X–XI.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-22	Menghitung nilai limit tentu fungsi aljabar dalam bentuk pecahan rasional (pangkat dua dan tiga)	33,59 %

Angka 33,59 % berarti sekitar 2 dari 3 peserta menjawab salah. Padahal soal itu selesai dengan **satu kali substitusi**. Penyebab yang paling mungkin: peserta langsung memfaktorkan atau membagi pembilang dan penyebut karena "soal limit pasti harus diolah", lalu salah hitung di tengah jalan.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menjelaskan arti limit sebagai nilai yang **didekati**, bukan selalu nilai fungsi di titik itu;
- memulai setiap soal dengan substitusi dan membaca hasilnya (nilai biasa, $k/0$, atau $0/0$);
- menyelesaikan bentuk $0/0$ dengan faktorisasi, termasuk pembagian Horner untuk polinomial berderajat tiga;
- menyelesaikan bentuk $0/0$ yang memuat akar dengan perkalian sekawan, termasuk akar pangkat tiga;
- menentukan nilai parameter agar sebuah limit ada dan bernilai tertentu.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Arti limit: nilai yang didekati

Tulisan

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

dibaca "limit $f(x)$ untuk x mendekati a sama dengan L". Artinya, bila x dibuat **sangat dekat** dengan a (dari kiri maupun dari kanan, tetapi $x \neq a$), nilai $f(x)$ menjadi sangat dekat dengan L.

Dua hal penting dari definisi ini:

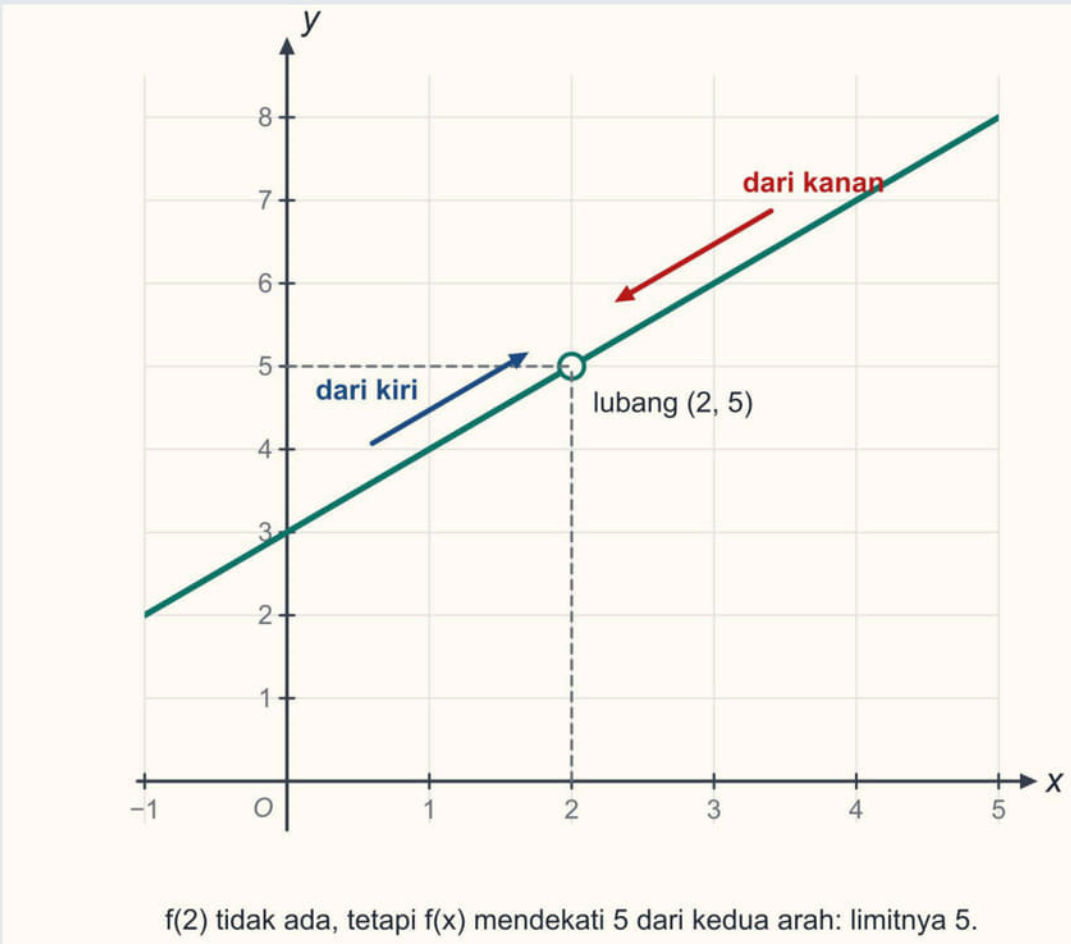
1. Limit tidak menanyakan nilai $f(a)$. Fungsi boleh **tidak terdefinisi** di $x = a$, tetapi limitnya tetap ada.
2. Limit ada bila pendekatan dari kiri (**limit kiri**, $x \to a^-$) dan dari kanan (**limit kanan**, $x \to a^+$) menuju bilangan yang sama.

Mengapa nilai $f(a)$ tidak diperhatikan? Bayangkan kamu berjalan di sepanjang grafik menuju garis tegak $x = a$. Yang ditanyakan limit adalah **ke mana kamu sedang menuju**, bukan apa yang ada tepat di garis itu. Grafik boleh "berlubang" di $x = a$ (fungsinya tidak terdefinisi), atau nilainya di titik itu boleh berbeda dengan arah tujuannya; limitnya tetap ditentukan oleh nilai-nilai di sekitarnya. Gambar 3.1 memperlihatkan grafik berlubang dari Contoh 1 di bawah.

Syarat kedua penting untuk **fungsi bercabang**, yaitu fungsi yang rumusnya berbeda di kiri dan kanan suatu titik. Contohnya tarif parkir atau ongkos kirim yang naik mendadak pada batas tertentu. Misalkan $f(x) = x + 1$ untuk $x < 1$ dan $f(x) = 5 - x$ untuk $x \geq 1$. Dari kiri, nilai f mendekati $1 + 1 = 2$; dari kanan mendekati $5 - 1 = 4$. Karena kedua arah tidak menuju bilangan yang sama, $\lim_{x \to 1} f(x)$ **tidak ada**, walaupun $f(1) = 4$ terdefinisi (Gambar 3.2). Sebaliknya, bila rumus kanan diganti $3 - x$, kedua arah menuju 2 dan limitnya ada, yaitu 2.

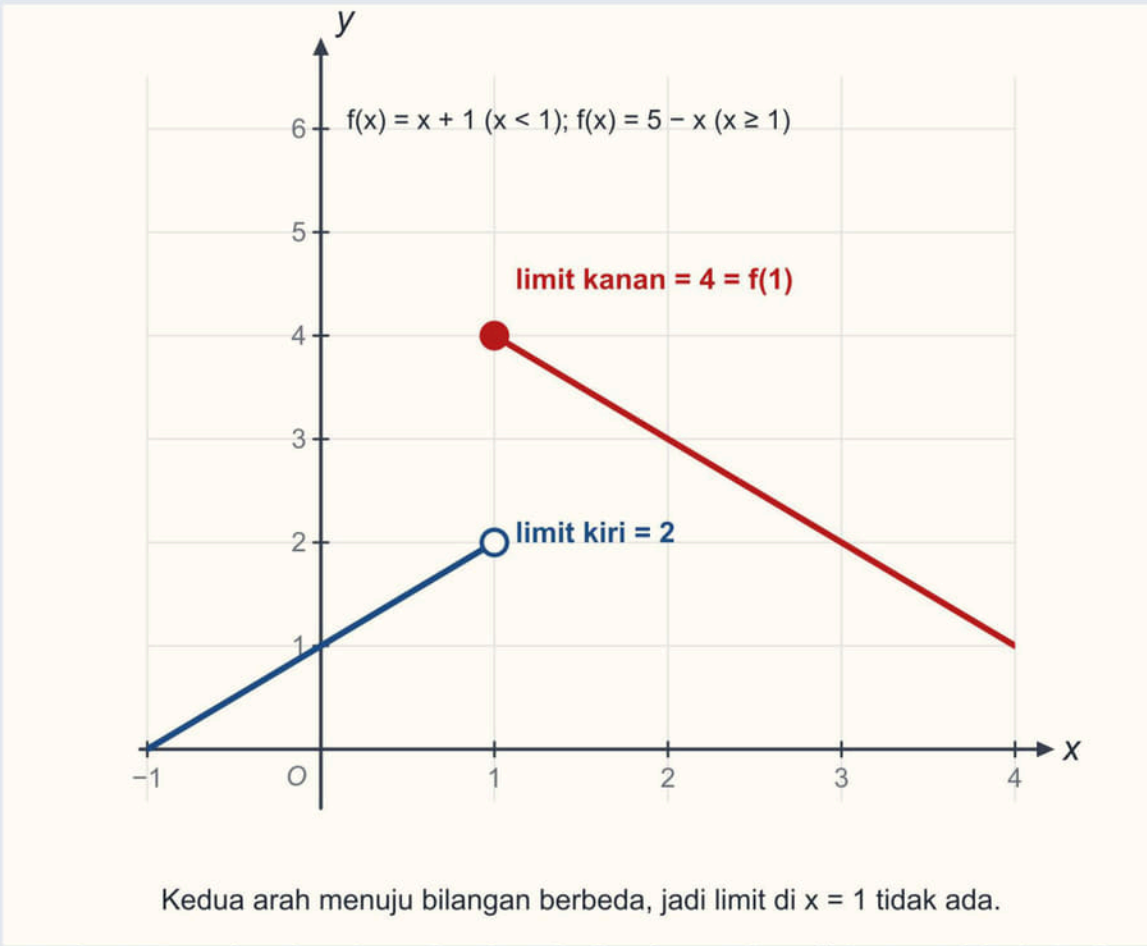
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 3.1 Grafik $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ sama dengan garis $y = x + 3$ yang berlubang di $(2, 5)$. Nilai $f(2)$ tidak ada, tetapi dari kiri dan kanan $f(x)$ mendekati 5. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 3.2 Fungsi bercabang dengan limit kiri 2 dan limit kanan 4 di $x = 1$; limitnya tidak ada. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 1: membaca limit dari tabel

Diketahui

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

Fungsi ini tidak terdefinisi di $x = 2$ karena penyebutnya nol. Tentukan limitnya untuk x mendekati 2.

Penyelesaian. Hitung $f(x)$ untuk x yang makin dekat ke 2 dari kedua arah.

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1

Dari kiri maupun dari kanan, nilainya mendekati 5. Jadi

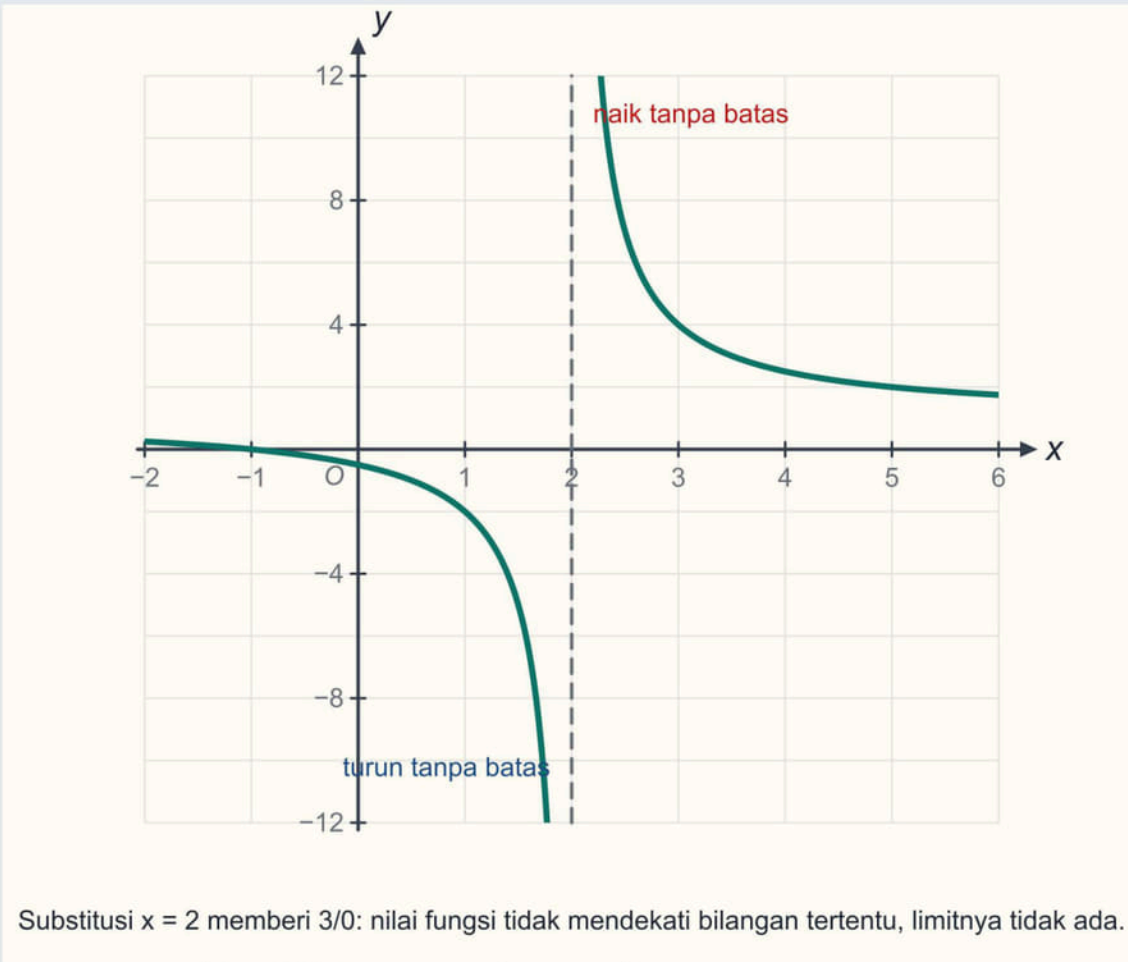
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$$

Hasil ini juga dapat diperoleh secara aljabar: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, sehingga untuk $x \neq 2$ berlaku $f(x) = x + 3$, dan $x + 3$ mendekati 5. Tabel membantu memahami makna limit, sedangkan aljabar dipakai untuk menghitungnya dengan cepat.

Limit yang tidak ada. Untuk $g(x) = (x + 1)/(x - 2)$, nilai $g(1{,}999) = -2.999$ dan $g(2{,}001) = 3.001$. Makin dekat ke 2, nilai mutlaknya makin besar tanpa batas (positif dari kanan, negatif dari kiri). Fungsi ini tidak mendekati bilangan tertentu, jadi limitnya **tidak ada**. Di soal, kemungkinan ini sering ditulis "tidak ada (tak hingga)". Grafiknya pada Gambar 3.3: di dekat $x = 2$, kedua cabang menjauh ke atas dan ke bawah tanpa batas.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 3.3 Grafik $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Substitusi $x = 2$ memberi $\frac{3}{0}$; nilai fungsi membesar tanpa batas, jadi limitnya tidak ada. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Langkah pertama selalu substitusi

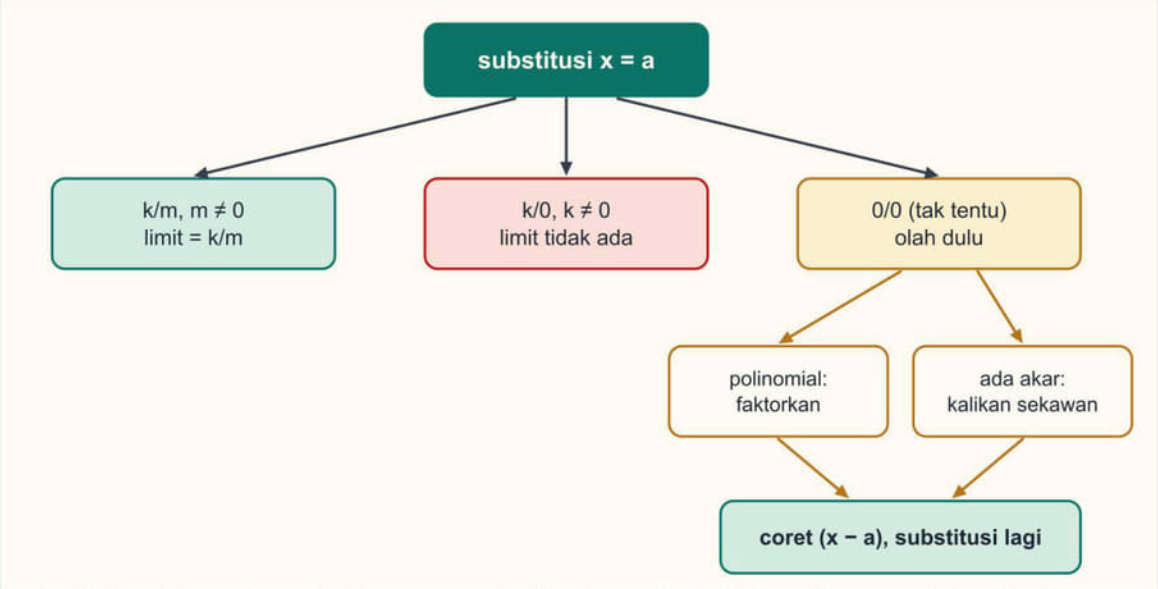
Fungsi aljabar (polinomial, pecahan polinomial, bentuk akar) **kontinu** di setiap titik yang termasuk domainnya. Kontinu artinya grafiknya tidak putus di titik itu, sehingga nilai limit sama dengan nilai fungsinya. Karena itu, **selalu substitusikan $x = a$ lebih dulu**, lalu baca hasilnya:

Hasil substitusi	Arti	Tindakan
$\frac{k}{m}$ dengan $m \neq 0$	fungsi terdefinisi di a	selesai: limit $= \frac{k}{m}$
$\frac{k}{0}$ dengan $k \neq 0$	nilai fungsi membesar tanpa batas	limit tidak ada (tak hingga)
$\frac{0}{0}$	**bentuk tak tentu**	olah dulu: faktorkan atau kalikan sekawan

Mengapa $0/0$ disebut tak tentu? Karena bentuk ini dapat berakhir pada nilai apa saja. Ketiga limit berikut sama-sama berbentuk $0/0$ di $x = 1$, tetapi hasilnya berbeda (diperiksa numerik di $x = 1 \pm 0{,}000001$):

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x - 1} = 0$$

Jadi $0/0$ **bukan** 0 dan bukan 1. Bentuk ini hanya memberi tanda bahwa ada faktor yang sama, biasanya $(x - a)$, yang tersembunyi di pembilang dan penyebut. Seluruh keputusan setelah substitusi diringkas pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Setelah substitusi, hasilnya menentukan langkah: selesai, limit tidak ada, atau bentuk tak tentu yang harus diolah (faktorkan atau kalikan sekawan) lalu disubstitusi lagi. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Sifat-sifat limit yang membuat substitusi sah: limit jumlah sama dengan jumlah limit, limit hasil kali sama dengan hasil kali limit, dan limit hasil bagi sama dengan hasil bagi limit **asalkan limit penyebutnya bukan nol**. Karena itu, untuk polinomial $p(x)$, $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$: setiap suku

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

x^n mendekati a^n. Syarat "penyebut bukan nol" itulah yang dilanggar oleh bentuk $\frac{k}{0}$ dan $\frac{0}{0}$, sehingga keduanya perlu perlakuan khusus.

Contoh terselesaikan 2: cukup substitusi

Tentukan

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{4 - 3x^2}$$

Penyelesaian. Substitusi $x = 2$:

- pembilang: $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$;
- penyebut: $4 - 3 \cdot 2^2 = 4 - 12 = -8 \neq 0$.

Penyebut tidak nol, jadi soal selesai:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{4 - 3x^2} = \frac{3}{-8} = -\frac{3}{8}$$

Dua kesalahan yang sering terjadi di sini: (1) menulis $3x^2 = (3x)^2 = 36$ sehingga penyebutnya menjadi -32; (2) lupa tanda negatif penyebut sehingga menjawab $\frac{3}{8}$. Inilah pola soal SA-22. Pengecohnya bukan konsep limit, melainkan **ketelitian berhitung**.

3. Bentuk 0/0 pada pecahan polinomial: faktorkan

Bila substitusi $x = a$ membuat pembilang **dan** penyebut bernilai nol, menurut **teorema faktor** keduanya memuat faktor $(x - a)$. Faktor itu boleh dicoret karena saat x mendekati a, nilai x tidak pernah sama dengan a, sehingga $x - a \neq 0$. Setelah dicoret, substitusikan lagi.

Untuk polinomial berderajat tiga, cari faktor sisanya dengan **pembagian Horner** (lihat sub bab 1.5).

Contoh terselesaikan 3: faktorisasi dengan Horner

Tentukan

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

Penyelesaian.

Langkah 1 – substitusi. Pembilang: $1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Penyebut: $1 + 2 - 3 = 0$. Bentuknya $0/0$, jadi $(x - 1)$ adalah faktor keduanya.

Langkah 2 – faktorkan penyebut. $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Langkah 3 – faktorkan pembilang dengan Horner (koefisien $1, 2, -1, -2$, dibagi oleh $x - 1$):

	1	2	-1	-2
$x = 1$		1	3	2
hasil	1	3	2	0

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sisa 0, sehingga

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x^2+3x+2) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Langkah 4 – coret dan substitusi.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x+2)}{x+3} = \frac{2\cdot 3}{4} = \frac{3}{2}$$

Cek numerik: di $x = 1{,}000001$ nilai fungsinya $\approx 1{,}5000009$ ✓.

Bila setelah satu kali dicoret hasil substitusinya **masih** $0/0$, berarti faktor $(x-a)$ muncul lebih dari sekali (misalnya penyebut $(x-a)^2$). Faktorkan lagi sampai bentuk $0/0$ hilang.

4. Bentuk 0/0 yang memuat akar: kalikan sekawan

Bentuk sekawan dari $\sqrt{A} - b$ adalah $\sqrt{A} + b$ (tanda di tengah dibalik). Hasil kalinya tidak lagi memuat akar:

$$(\sqrt{A} - b)(\sqrt{A} + b) = A - b^2$$

Kalikan pembilang **dan** penyebut dengan sekawan yang sama (artinya mengalikan dengan 1), sehingga nilai pecahannya tidak berubah. Setelah itu faktor $(x-a)$ biasanya muncul dan dapat dicoret.

Contoh terselesaikan 4: satu sekawan dan dua sekawan

(a) Tentukan

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x-5}$$

Penyelesaian. Substitusi memberi $(3-3)/0 = 0/0$. Kalikan dengan sekawan $\sqrt{x+4}+3$:

$$\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{(x+4)-9}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+3}$$

Substitusi $x=5$: hasilnya $\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$. Cek numerik di $x = 5{,}000001$: $\approx 0{,}1666667$ ✓.

(b) Tentukan

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$$

Penyelesaian. Substitusi memberi $(3-3)/(2-2) = 0/0$. Akar ada di pembilang **dan** penyebut, jadi kalikan dengan **dua** sekawan sekaligus: $\sqrt{2x+3}+3$ dan $\sqrt{x+1}+2$.

$$\frac{\big((2x+3)-9\big)\big(\sqrt{x+1}+2\big)}{\big((x+1)-4\big)\big(\sqrt{2x+3}+3\big)} = \frac{2(x-3)\big(\sqrt{x+1}+2\big)}{(x-3)\big(\sqrt{2x+3}+3\big)}$$

Coret $(x-3)$, lalu substitusi $x=3$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2\big(\sqrt{x+1}+2\big)}{\sqrt{2x+3}+3} = \frac{2(2+2)}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cek numerik di $x = 3{,}000001$: $\approx 1{,}3333333$ ✓. Perhatikan: sekawan pembilang "pindah" ke penyebut dan sebaliknya. Bagian ini mudah tertukar sehingga jawabannya terbalik ($\frac{3}{4}$).

Akar pangkat tiga. Sekawan kuadrat tidak menghilangkan akar pangkat tiga. Pakai rumus selisih pangkat tiga:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Dengan $a = \sqrt[3]{A}$, faktor "sekawan"-nya adalah $a^2 + ab + b^2$.

Contoh terselesaikan 5: akar pangkat tiga

Tentukan

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x - 7}$$

Penyelesaian. Substitusi: $(\sqrt[3]{8} - 2)/0 = 0/0$. Misalkan $a = \sqrt[3]{x+1}$, sehingga $a^3 = x + 1$ dan $x - 7 = a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$. Maka

$$\frac{a - 2}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)} = \frac{1}{a^2 + 2a + 4}$$

Saat $x \to 7, a \to 2$, sehingga limitnya $\frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$. Cek numerik di $x = 7{,}000001$: $\approx 0{,}0833333$ ✓.

5. Mencari parameter agar limit ada

Soal jenis ini memberi limit yang **sudah diketahui nilainya** dan memuat huruf (parameter) yang belum diketahui. Kuncinya satu kalimat:

> Bila penyebut menuju 0 dan limitnya ada (berupa bilangan), pembilang **juga harus** menuju 0.

Alasannya: bila pembilang menuju $k \neq 0$ sementara penyebut menuju 0, hasilnya $k/0$ dan limitnya tidak ada. Jadi syarat "pembilang = 0 di $x = a$" memberi persamaan pertama. Persamaan kedua diperoleh dari nilai limitnya.

Contoh terselesaikan 6: parameter pada bentuk akar

Diketahui

$$\lim_{x \to 4} \frac{a\sqrt{x} - 4}{x - 4} = b$$

dengan b suatu bilangan. Tentukan a dan b.

Penyelesaian.

Langkah 1 – syarat pembilang nol. Penyebut menuju 0, jadi $a\sqrt{4} - 4 = 0$, sehingga $2a = 4$ dan $a = 2$.

Langkah 2 – hitung limitnya. Tulis $x - 4 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)$:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{x}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Jadi $a=2$ dan $b=\frac{1}{2}$. Cek: dengan $a=3$, nilai fungsi di $x=4{,}000001$ sekitar 2.000.000 (meledak), jadi memang hanya $a=2$ yang membuat limitnya ada. Dengan $a=2$, nilai di titik yang sama $\approx 0{,}4999999$ ✓.

6. Menilai beberapa pernyataan sekaligus

Pada PG kompleks atau Benar/Salah, setiap pernyataan bisa menuntut cara yang berbeda. Terapkan langkah yang sama pada setiap pernyataan: **substitusi dulu**, baru pilih cara.

Contoh terselesaikan 7: menilai pernyataan

Tentukan benar atau salah setiap pernyataan berikut.

(1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}=\dfrac{4}{3}$ (2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=0$ (3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\dfrac{1}{6}$

(4) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=12$

(5) Karena fungsi $(x^2-9)/(x-3)$ tidak terdefinisi di $x=3$, limitnya untuk $x\to 3$ tidak ada.

Penyelesaian.

Pernyataan	Nilai	Alasan
(1)	Benar	$0/0$; $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}\to\frac{4}{3}$
(2)	Salah	substitusi memberi $2/0$: limitnya tidak ada (tak hingga), bukan 0
(3)	Benar	sekawan: $\frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)}=\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}\to\frac{1}{6}$
(4)	Benar	$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$, jadi limitnya $4+4+4=12$
(5)	Salah	$\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3\to 6$; limit tidak menanyakan nilai di $x=3$

Semua nilai di atas sudah dicek numerik dengan x yang berjarak $0{,}000001$ dari titik tujuannya. Pernyataan (2) dan (5) mewakili dua salah paham yang khas: "$k/0$ sama dengan 0" dan "tidak terdefinisi berarti limitnya tidak ada".

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal limit aljabar di suatu titik

1. **Substitusi dulu.** Hitung pembilang dan penyebut di $x=a$ secara terpisah. Tulis hasilnya.
2. **Baca hasilnya.** Bila k/m dengan $m\neq 0$: selesai. Bila $k/0$: limit tidak ada. Bila $0/0$: lanjut ke langkah 3.
3. **Pilih cara.** Pecahan polinomial: faktorkan (Horner bila berderajat tiga). Memuat akar

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

kuadrat: kalikan sekawan. Memuat akar pangkat tiga: pakai $a^3 - b^3$.

4. **Coret faktor $(x - a)$, lalu substitusi lagi.** Bila masih $0/0$, ulangi langkah 3.
5. **Untuk soal parameter:** tulis syarat "pembilang = 0 di $x = a$", lalu hitung limit untuk persamaan kedua. Jawab yang ditanya (misalnya $a - b$, bukan a saja).
6. **Cek numerik bila ragu.** Hitung fungsi di $x = a + 0{,}001$ dengan kalkulator sederhana atau perhitungan kasar. Nilainya harus dekat dengan jawabanmu.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Langsung memfaktorkan padahal bukan $0/0$	Pada soal tipe SA-22, pembilang dicoba difaktorkan dan dibagi; waktu habis dan hasilnya salah	Substitusi dulu; bila penyebut tidak nol, soal selesai
Salah hitung pangkat	$3x^2$ di $x = 2$ dihitung $(3 \cdot 2)^2 = 36$, padahal $3 \cdot 4 = 12$	Hitung pangkat dulu, baru kalikan koefisien
Tanda negatif penyebut hilang	$\frac{3}{-8}$ ditulis $\frac{3}{8}$	Tulis hasil pembilang dan penyebut lengkap dengan tandanya
$0/0$ dianggap 0 atau 1	Berhenti setelah substitusi dan menjawab 0	$0/0$ artinya "olah dulu", bukan jawaban
$k/0$ dianggap 0	$\frac{2}{0} = 0$	$k/0$ dengan $k \neq 0$: limit tidak ada (tak hingga)
Hanya mencoret satu faktor	Penyebut $(x - 1)^2$, tetapi faktor $(x - 1)$ hanya dicoret sekali lalu disimpulkan "tidak ada"	Substitusi ulang setelah mencoret; masih $0/0$ berarti faktorkan lagi
Sekawan salah tanda atau salah tempat	Mengalikan $\sqrt{A} - b$ dengan $\sqrt{A} - b$, atau sekawan hanya dikalikan ke pembilang	Sekawan = tanda tengah dibalik, dikalikan ke pembilang **dan** penyebut
Hasil dua sekawan terbalik	Menjawab $\frac{3}{4}$ padahal $\frac{4}{3}$ (Contoh 4b)	Ingat: sekawan pembilang berakhir di penyebut
Akar pangkat tiga diberi sekawan kuadrat	$(\sqrt[3]{A} - 2)(\sqrt[3]{A} + 2)$ masih memuat akar	Pakai $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Soal parameter tanpa syarat pembilang nol	Mencoba menebak a dan b	Tulis dulu "pembilang = 0 di $x = a$"

BEDAH SOAL ASLI

Soal SA-22 dijawab benar oleh 33,59 % peserta. Bentuknya tampak "menakutkan": pembilang berpangkat tiga dan penyebut berpangkat dua. Kesan itu mendorong orang untuk langsung memfaktorkan. Padahal penyebutnya **tidak nol** di $x = 3$, jadi jawabannya cukup nilai fungsi di

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$x = 3$. Perhatikan juga perbedaan $9x^2$ dan $(9x)^2$, serta tanda negatif penyebut. Kedua hal itu dipakai sebagai pengecoh di pilihan jawaban. Kerjakan dulu sebelum membaca pembahasannya.

►. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{5 + 3x - 9x^2} = \ldots$

A. $-\dfrac{7}{67}$

B. $-\dfrac{6}{67}$

C. $\dfrac{6}{76}$

D. $\dfrac{7}{67}$

E. $\dfrac{7}{76}$

Pembahasan **Kunci: A**

Konsep: coba substitusi langsung lebih dulu. Jika penyebut tidak nol, nilai limit sama dengan nilai fungsinya.

Langkah 1 – Pembilang di $x = 3$. $27 - 27 + 6 + 1 = 7$.

Langkah 2 – Penyebut di $x = 3$. $5 + 9 - 81 = -67 \neq 0$.

Langkah 3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{5 + 3x - 9x^2} = \dfrac{7}{-67} = -\dfrac{7}{67}$.

Cek ulang: $9x^2 = 9 \cdot 9 = 81$, bukan $(9x)^2$.

Analisis pilihan:

- D ✗ : lupa tanda negatif penyebut.
- B ✗ : pembilang dihitung 6 (lupa $+1$).
- C ✗ dan E ✗ : penyebut ditulis 76 (digit tertukar) dan tanda negatif hilang.

Jawaban: A.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memadukan dua cara di sub bab ini: sekawan untuk pembilang berbentuk akar dan pemfaktoran untuk penyebut. Substitusi dulu untuk memastikan bentuknya $\frac{0}{0}$, lalu rasionalkan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Nilai $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-1}$ adalah ....

A. $\dfrac{1}{8}$

B. $-\dfrac{1}{4}$

C. $-\dfrac{1}{2}$

D. $-\dfrac{1}{8}$

E. limit tidak ada

Pembahasan **Kunci: D**

Konsep: rasionalkan pembilang dengan sekawan $\sqrt{x+5}+2$, lalu faktorkan $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Langkah 1. $\sqrt{x+5}-2=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}+2}$.

Langkah 2. $\dfrac{x+1}{(\sqrt{x+5}+2)(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{(\sqrt{x+5}+2)(x-1)}\to\dfrac{1}{4\cdot(-2)}=-\dfrac{1}{8}$.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: tanda faktor $(x-1)$ di $x=-1$ dihitung $+2$.
- B: faktor $(x-1)$ dihitung -1.
- C: faktor $\sqrt{x+5}+2$ dari sekawan terlupa.
- E: bentuk $\frac{0}{0}$ belum berarti limit tidak ada.

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: setelah dikalikan sekawan, pembilang menjadi $x+1$, yaitu faktor yang **sama** dengan salah satu faktor penyebut. Setiap pilihan salah berasal dari menghitung satu faktor sisa dengan keliru: tanda $(x-1)$ di $x=-1$, atau faktor $\sqrt{x+5}+2$ yang terlupa. Tulis semua faktor sisa sebelum substitusi agar tidak ada yang tertinggal.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tuliskan dulu hasil substitusinya (k/m, $k/0$, atau $0/0$) sebelum memilih cara.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 - 1}$ adalah ....

A. $\dfrac{7}{2}$

B. $-\dfrac{7}{2}$

C. 7

D. $\dfrac{5}{2}$

E. limit tidak ada

2. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3}$ adalah ....

A. $\dfrac{1}{6}$

B. $-\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{3}$

D. $\dfrac{2}{3}$

E. limit tidak ada

Kunci singkat: 1. A 2. C

✔ PERIKSA DIRI

- Apa yang kamu lakukan pertama kali pada setiap soal limit di suatu titik, dan apa arti tiap kemungkinan hasilnya (k/m, $k/0$, $0/0$)?
- Mengapa faktor $(x - a)$ boleh dicoret saat menghitung limit untuk $x \to a$, padahal $x - a = 0$ di $x = a$?
- Pada soal parameter, persamaan apa yang selalu kamu tulis lebih dulu, dan mengapa?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 3.1: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-3.1

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks

MATTL-3.2

◎ APA YANG DIUJI

Di sub bab 3.1, x mendekati sebuah bilangan. Di sub bab ini, x **membesar tanpa batas**. Soal TKA tidak menulisnya sebagai "$x \to \infty$". Soal menyampaikannya dengan kata-kata sehari-hari: "porsi sangat banyak", "dalam jangka panjang", "pelatihan berlangsung sangat lama". Tugasmu ada dua: **menerjemahkan** kata-kata itu menjadi limit di tak hingga, lalu **menafsirkan** hasilnya dalam konteks soal.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-23	Menentukan kecenderungan nilai tertentu menggunakan konsep limit tak tentu di ketakhinggaan dalam konteks kehidupan sehari-hari	24,58 %

Angka 24,58 % berarti hanya sekitar 1 dari 4 peserta yang menjawab benar. Hitungannya sebenarnya pendek. Kesulitannya kemungkinan besar ada pada **makna**. Pilihan jawaban yang salah berasal dari keuntungan pada saat porsinya nol, atau dari satu koefisien saja. Kesalahan seperti itu muncul bila arti "porsi sangat banyak" dalam bahasa matematika belum jelas.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- mengenali ungkapan dalam soal cerita yang berarti $x \to \infty$;
- menghitung limit fungsi rasional di tak hingga dengan membagi pangkat tertinggi, dan mengenali tiga kemungkinan hasilnya;
- membedakan nilai awal, nilai pada waktu tertentu, dan nilai kecenderungan (limit) dalam konteks;
- menghitung limit selisih dua bentuk akar di tak hingga dengan perkalian sekawan;
- menilai beberapa pernyataan tentang model kontekstual, termasuk "apakah nilai limit itu pernah tercapai".

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Arti limit di tak hingga: kecenderungan

Tulisan

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

artinya: bila x dibuat **sangat besar** (lebih besar daripada bilangan berapa pun yang kamu pilih), nilai $f(x)$ menjadi sangat dekat dengan L. Simbol ∞ (tak hingga) **bukan bilangan**. Simbol itu hanya menyatakan "membesar tanpa batas".

Dalam soal cerita, L disebut **kecenderungan** atau **nilai jangka panjang**. Garis $y = L$ adalah **asimtot datar** grafik f: grafiknya makin lama makin mendekati garis itu (lihat juga sub bab 1.7).

Semua perhitungan di sub bab ini bertumpu pada satu fakta sederhana. Untuk bilangan tetap c dan pangkat $k > 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

Misalnya $\frac{5}{x}$ bernilai $0{,}005$ untuk $x = 1.000$ dan $0{,}000005$ untuk $x = 1.000.000$. Makin besar penyebut, makin kecil hasil baginya.

Contoh terselesaikan 1: biaya rata-rata

Sebuah usaha sablon kaus mengeluarkan biaya tetap Rp2.000.000 (sewa alat dan desain) ditambah Rp15.000 untuk setiap kaus (data disusun untuk contoh). Biaya rata-rata per kaus bila dibuat x kaus adalah

$$R(x) = \frac{2.000.000 + 15.000x}{x}$$

Berapa biaya rata-rata per kaus bila pesanannya sangat banyak?

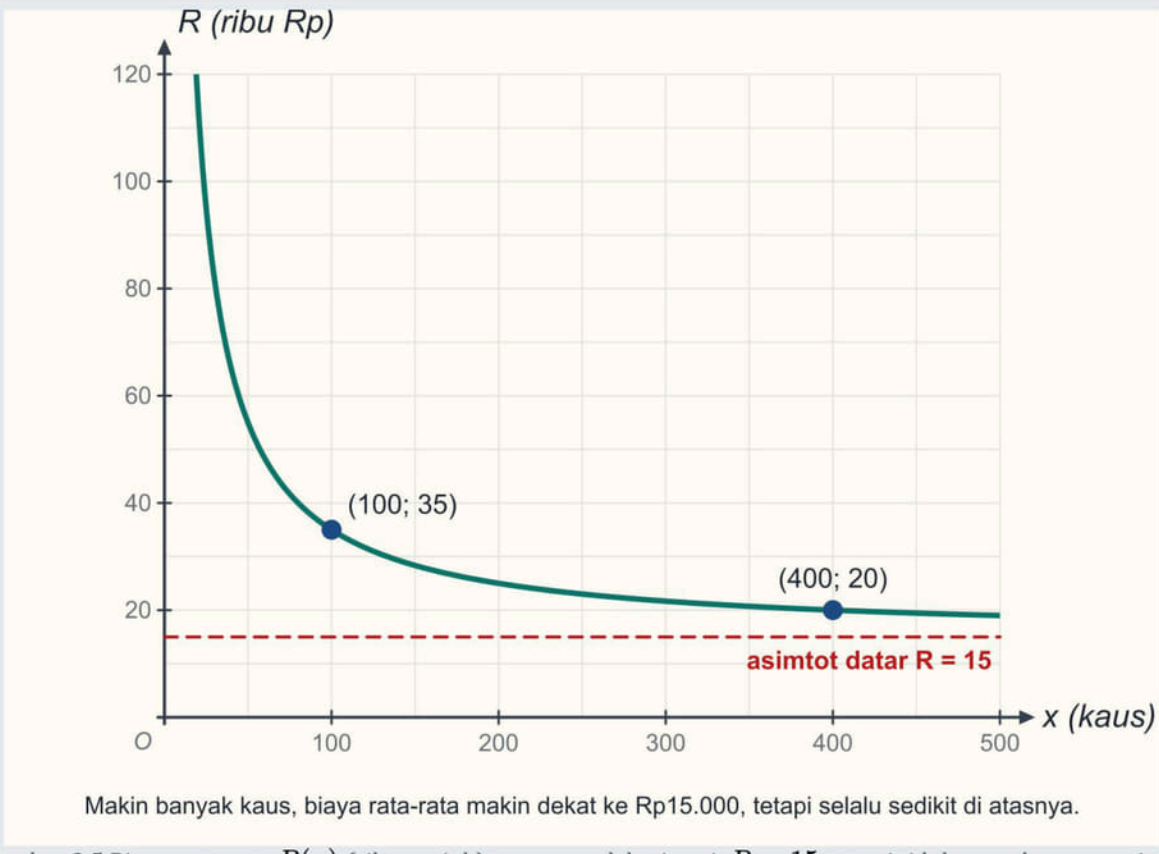
Penyelesaian. "Sangat banyak" berarti $x \to \infty$. Bagi setiap suku pembilang dengan x:

$$R(x) = \frac{2.000.000}{x} + 15.000 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} R(x) = 0 + 15.000 = 15.000$$

Banyak kaus x	10	100	1.000	10.000	100.000
$R(x)$ (rupiah)	215.000	35.000	17.000	15.200	15.020

Biaya rata-rata **mendekati** Rp15.000 per kaus. Maknanya: biaya tetap "terbagi" ke sangat banyak kaus, sehingga yang tersisa hampir hanya biaya per kaus. Perhatikan juga bahwa $R(x)$ selalu sedikit **lebih besar** daripada 15.000, karena suku $\frac{2.000.000}{x}$ selalu positif. Nilai limit didekati, tetapi tidak pernah dicapai. Gambar 3.5 memperlihatkan perilaku itu pada grafik.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 3.5 Biaya rata-rata $R(x)$ (ribu rupiah) turun mendekati garis $R = 15$, tetapi tidak pernah mencapainya. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

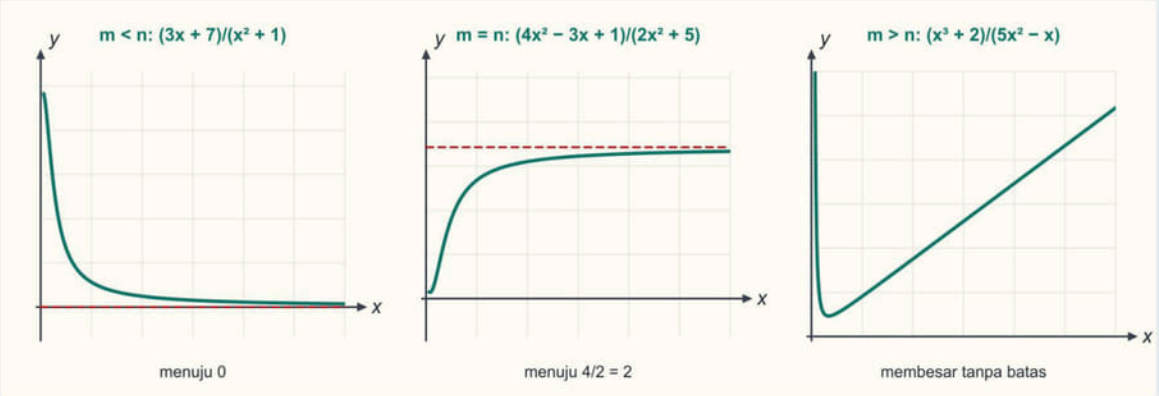
2. Fungsi rasional: bagi dengan pangkat tertinggi penyebut

Untuk pecahan polinomial, substitusi "$x = \infty$" tidak bermakna dan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$. Caranya: **bagi setiap suku pembilang dan penyebut dengan x berpangkat tertinggi di penyebut**. Semua suku berbentuk $\frac{c}{x^k}$ menuju 0, sehingga yang tersisa hanya suku-suku "terkuat".

Hasilnya selalu jatuh ke salah satu dari tiga kasus. Misalkan derajat pembilang m dengan koefisien utama a, dan derajat penyebut n dengan koefisien utama p.

Kasus	Hasil limit untuk $x \to \infty$	Arti grafik
$m < n$	0	asimtot datar $y = 0$
$m = n$	$\frac{a}{p}$ (perbandingan koefisien utama)	asimtot datar $y = \frac{a}{p}$
$m > n$	tak hingga ($+\infty$ atau $-\infty$): limit tidak ada	tidak punya asimtot datar

Mengapa begitu? Ambil contoh $m = n = 2$. Setelah dibagi x^2, pembilang menjadi $a + (\text{suku-suku yang menuju } 0)$ dan penyebut menjadi $p + (\text{suku-suku yang menuju } 0)$. Jadi hasil baginya menuju $\frac{a}{p}$. **Koefisien utama** adalah koefisien suku berpangkat tertinggi, **bukan** koefisien yang ditulis paling depan. Ketiga kasus tampak berbeda pada grafik (Gambar 3.6): kasus pertama mendatar ke sumbu X, kasus kedua mendatar ke garis $y = \frac{a}{p}$, dan kasus ketiga terus naik.



Gambar 3.6 Fungsi-fungsi pada Contoh 2: derajat pembilang lebih kecil (menuju 0), sama (menuju perbandingan koefisien utama), dan lebih besar (membesar tanpa batas). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 2: empat kasus cepat

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+5}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x+7}{x^2+1}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2}{5x^2-x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6-5x^2}{2x^2+x}$

Penyelesaian.

(a) Derajat sama (2 dan 2). Bagi dengan x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

(b) Derajat pembilang (1) lebih kecil daripada derajat penyebut (2). Bagi dengan x^2: pembilang menjadi $\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2} \to 0$, sedangkan penyebut menjadi $1+\frac{1}{x^2} \to 1$. Hasilnya 0.

(c) Derajat pembilang (3) lebih besar. Bagi dengan x^2: pembilang menjadi $x+\frac{2}{x^2}$, yang membesar tanpa batas, sedangkan penyebut menuju 5. Limitnya tak hingga (tidak ada).

(d) Hati-hati: suku berpangkat tertinggi pembilang adalah $-5x^2$, ditulis di **belakang**. Koefisien utamanya -5, bukan 6:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6}{x^2}-5}{2+\frac{1}{x}} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$$

Cek numerik ($x = 1.000.000$): (a) $\approx 1{,}9999985$; (b) $\approx 0{,}000003$; (c) ≈ 200.000 dan terus membesar; (d) $\approx -2{,}4999987$ ✓.

3. Membaca konteks: nilai awal, nilai sesaat, dan kecenderungan

Dalam satu soal kontekstual, tiga jenis nilai sering muncul bersamaan dan sering dipakai sebagai pengecoh:

Jenis nilai	Ungkapan di soal	Cara menghitung
Nilai awal	"mula-mula", "saat $t = 0$", "sebelum pelatihan"	substitusi $x = 0$
Nilai sesaat	"pada menit ke-50", "setelah 8 bulan"	substitusi nilai itu
Kecenderungan	"sangat banyak", "jangka panjang", "sangat lama", "terus-menerus"	limit $x \to \infty$

Dua pertanyaan tambahan yang sering muncul di soal Benar/Salah:

1. **Apakah nilai limit pernah dicapai?** Selesaikan persamaan $f(x) = L$. Bila persamaannya tidak punya penyelesaian, nilai itu hanya didekati.
2. **Didekati dari bawah atau dari atas?** Tulis ulang fungsi sebagai L + sisa. Caranya dengan pembagian: misalnya $\frac{1.200t+400}{t+2} = 1.200 - \frac{2.000}{t+2}$. Karena sisanya negatif, fungsi selalu berada di **bawah** L, dan makin besar t, makin kecil sisanya.

Contoh terselesaikan 3: menilai pernyataan dalam konteks

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Seorang peternak menebar ikan nila di sebuah kolam. Banyak ikan setelah t bulan dimodelkan oleh (data disusun untuk contoh)

$$P(t) = \frac{1.200t + 400}{t + 2} \text{ ekor}$$

Tentukan benar atau salah setiap pernyataan berikut.

1. Banyak ikan yang ditebar mula-mula adalah 200 ekor.
2. Dalam jangka panjang, banyak ikan mendekati 1.200 ekor.
3. Suatu saat banyak ikan tepat 1.200 ekor.
4. Pada bulan ke-8, banyak ikan sudah lebih dari 1.000 ekor.
5. Banyak ikan selalu bertambah dari bulan ke bulan.

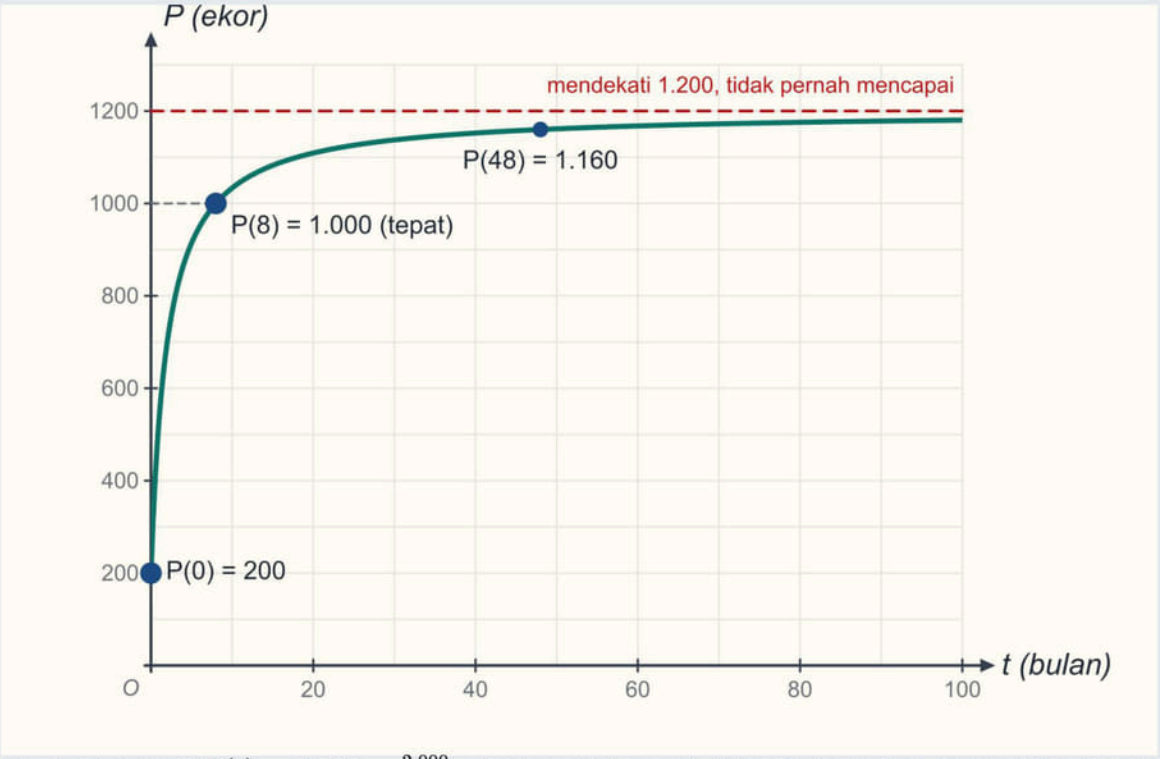
Penyelesaian. Tulis dulu bentuk sisa: $1.200t + 400 = 1.200(t + 2) - 2.000$, sehingga

$$P(t) = 1.200 - \frac{2.000}{t + 2}$$

Pernyataan	Nilai	Alasan
1	Benar	$P(0) = \frac{400}{2} = 200$
2	Benar	derajat sama, perbandingan koefisien utama $\frac{1.200}{1} = 1.200$
3	Salah	$P(t) = 1.200$ berarti $\frac{2.000}{t+2} = 0$, tidak mungkin; 1.200 hanya didekati
4	Salah	$P(8) = \frac{9.600+400}{10} = 1.000$, tepat sama dengan 1.000, bukan lebih
5	Benar	makin besar t, makin kecil $\frac{2.000}{t+2}$, sehingga $P(t)$ makin besar

Nilai P di beberapa titik sebagai cek: $P(18) = 1.100$, $P(48) = 1.160$, $P(98) = 1.180$. Nilainya naik dan makin rapat ke 1.200. Lihat Gambar 3.7.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 3.7 Grafik $P(t) = 1.200 - \frac{2.000}{t+2}$: nilai awal 200, tepat 1.000 pada bulan ke-8, dan mendekati 1.200 dalam jangka panjang. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Pernyataan 4 adalah pola pengecoh yang sangat sering dipakai: hasil hitungnya **tepat sama**, sedangkan pernyataannya berbunyi "lebih dari". Pola ini akan kamu temui lagi di soal prediksi sub bab ini.

4. Selisih dua bentuk akar: kalikan sekawan

Bentuk

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}\right)$$

berbentuk $\infty-\infty$, yang juga **tak tentu** (bukan 0). Bila $a \neq p$, akar dengan koefisien x^2 lebih besar "menang", sehingga hasilnya $+\infty$ (bila $a > p$) atau $-\infty$ (bila $a < p$). Bila $a = p$, kalikan dengan sekawan:

$$\sqrt{U}-\sqrt{V}=\frac{U-V}{\sqrt{U}+\sqrt{V}}$$

Suku ax^2 saling menghapus di $U - V$, sehingga pembilang tinggal $(b-q)x+(c-r)$. Bagi pembilang dan penyebut dengan x. Penyebut menuju $\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$. Jadi, untuk $a = p$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+qx+r}\right)=\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$$

Rumus ini boleh dipakai sebagai cara cepat, tetapi kamu harus tahu asalnya. Dengan begitu kamu dapat menurunkannya ulang bila lupa, dan tahu kapan rumus itu **tidak** berlaku ($a \neq p$).

Contoh terselesaikan 4: sekawan langkah demi langkah

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tentukan

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+1}-\sqrt{x^2+2x-5}\right)$$

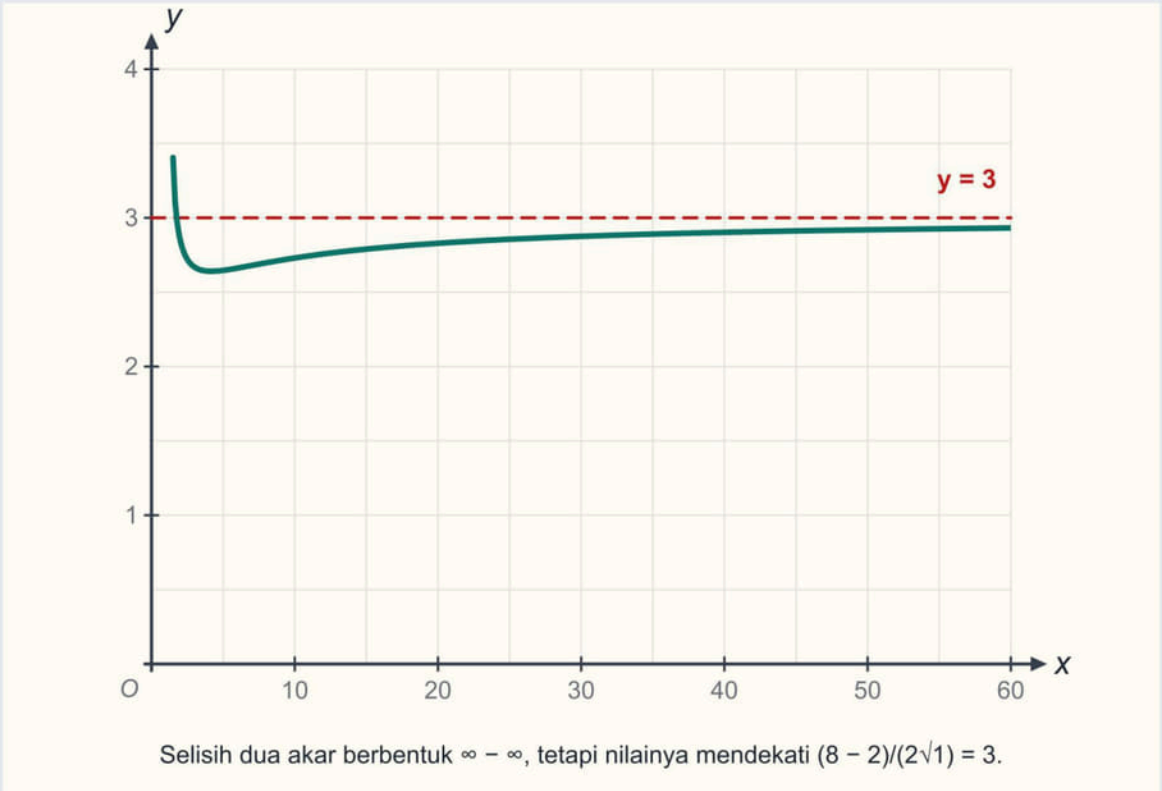
Penyelesaian. Koefisien x^2 sama ($a=p=1$). Kalikan sekawan:

$$\frac{(x^2+8x+1)-(x^2+2x-5)}{\sqrt{x^2+8x+1}+\sqrt{x^2+2x-5}}=\frac{6x+6}{\sqrt{x^2+8x+1}+\sqrt{x^2+2x-5}}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan x. Untuk $x>0$ berlaku $x=\sqrt{x^2}$, jadi x masuk ke dalam akar sebagai x^2:

$$\frac{6+\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}\to\frac{6}{1+1}=3$$

Rumus cepat memberi hasil yang sama: $\frac{8-2}{2\sqrt{1}}=3$. Cek numerik: di $x=10.000$ nilainya $\approx 2{,}99955$, dan di $x=1.000.000$ nilainya $\approx 2{,}9999955$ ✓. Grafiknya pada Gambar 3.8: walaupun kedua akar sama-sama membesar tanpa batas, selisihnya mendatar ke 3.



Gambar 3.8 Grafik $\sqrt{x^2+8x+1}-\sqrt{x^2+2x-5}$ mendekati garis $y=3$ untuk x besar. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 5: bentuk akar dikurangi bentuk linear

Tentukan

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+2}-3x+2\right)$$

Penyelesaian. Tulis $-3x+2=-(3x-2)$. Untuk x besar, $3x-2$ positif, sehingga $3x-2=\sqrt{(3x-2)^2}=\sqrt{9x^2-12x+4}$. Bentuknya menjadi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+2}-\sqrt{9x^2-12x+4}\right)=\frac{-6-(-12)}{2\sqrt{9}}=\frac{6}{6}=1$$

Cek numerik di $x=1.000.000$: $\approx 1{,}0000002$ ✓. Kesalahan yang sering terjadi: menulis $3x-2=\sqrt{9x^2+4}$ (lupa suku tengah $-12x$), sehingga hasilnya menjadi -1.

Contoh terselesaikan 6: akar di dalam pecahan

Tentukan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+3}$$

Penyelesaian. Pangkat tertinggi "efektif" pembilang adalah $\sqrt{x^2}=x$, sama dengan penyebut. Bagi dengan x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{4}}{1}=2$$

Cek numerik di $x=1.000.000$: $\approx 1{,}999994$ ✓. Jawaban 4 (lupa mengakarkan koefisien) adalah pengecoh yang khas.

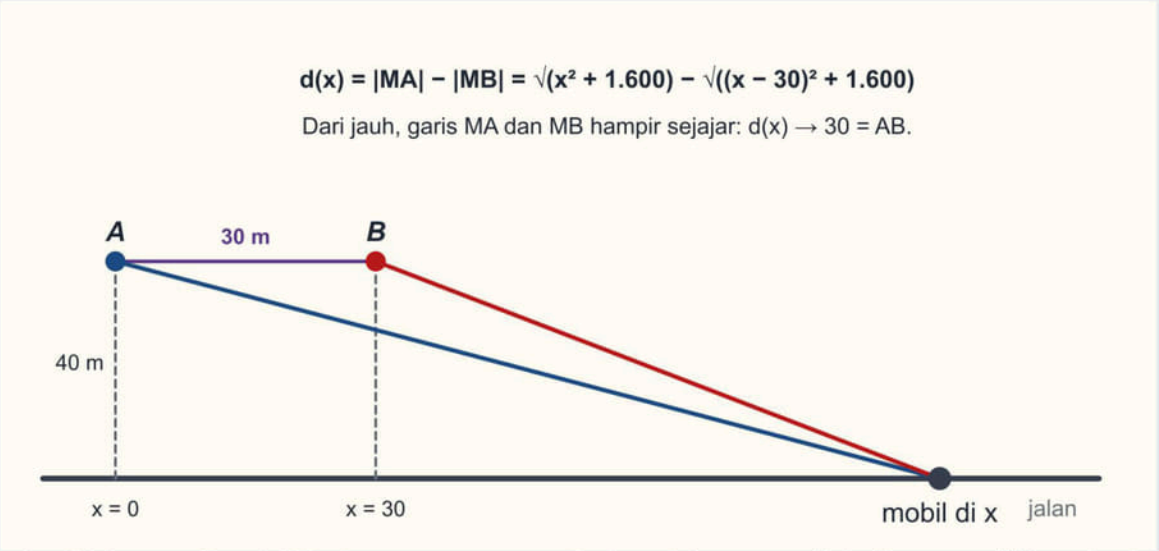
Contoh terselesaikan 7: selisih akar dalam konteks

Dua menara pemancar A dan B berdiri 40 m dari tepi sebuah jalan lurus dan berjarak 30 m satu sama lain, sejajar jalan (data disusun untuk contoh). Pasang sumbu x di sepanjang jalan sehingga titik jalan yang paling dekat ke menara A berada di $x=0$ dan titik jalan yang paling dekat ke menara B berada di $x=30$. Sebuah mobil berada di titik x (meter) pada jalan itu (lihat Gambar 3.9). Dengan teorema Pythagoras, selisih jarak mobil ke menara A dan ke menara B adalah

$$d(x)=\sqrt{x^2+1.600}-\sqrt{(x-30)^2+1.600}$$

Bila mobil terus melaju menjauh, selisih jarak itu mendekati berapa meter?

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 3.9 Susunan Contoh 7. Dari tempat yang sangat jauh, garis ke menara A dan ke menara B hampir sejajar, sehingga selisih panjangnya mendekati $AB = 30$ m. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Penyelesaian. "Terus melaju menjauh" berarti $x \to \infty$. Uraikan akar kedua: $(x-30)^2 + 1.600 = x^2 - 60x + 2.500$. Koefisien x^2 di kedua akar sama ($a = p = 1$), dengan $b = 0$ dan $q = -60$:

$$\lim_{x \to \infty} d(x) = \frac{0 - (-60)}{2\sqrt{1}} = 30$$

x (m)	100	1.000	10.000
$d(x)$ (m)	27,08	29,975	29,9998

Selisih jarak mendekati **30 m**, yaitu jarak antara kedua menara. Hasil ini masuk akal secara geometri: dari tempat yang sangat jauh, kedua menara terlihat hampir searah, sehingga garis dari mobil ke A dan ke B hampir sejajar dan selisih panjangnya hampir sama dengan AB. Inilah cara memeriksa jawaban limit di soal kontekstual: **tanyakan apakah hasilnya masuk akal** dalam cerita soal.

5. Mengubah $x \to \infty$ menjadi $h \to 0$

Kadang limit di tak hingga lebih mudah dihitung bila dibalik. Misalkan $h = \frac{1}{x}$. Saat $x \to \infty$, $h \to 0$ (dari arah positif). Limit di tak hingga berubah menjadi limit menuju 0, yang dapat diselesaikan dengan cara di sub bab 3.1 (faktorisasi atau sekawan) atau sub bab 3.3 (rumus trigonometri).

Contoh singkat: dengan $h = \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+4h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h\left(\sqrt{1+4h} + 1\right)} = \frac{4}{2} = 2$$

Cek numerik: untuk $n = 10.000$ nilainya $\approx 1{,}9998$, dan untuk $n = 1.000.000$ nilainya $\approx 1{,}999998$ ✓. Teknik ini dipakai lagi di sub bab 3.3, saat keliling segi-n beraturan dihitung

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

untuk n yang sangat besar.

Bila limitnya tak hingga dalam konteks. Bila derajat pembilang lebih besar daripada derajat penyebut, fungsi membesar tanpa batas. Dalam konteks, artinya **tidak ada nilai kecenderungan**: besaran itu terus bertambah selama x bertambah. Soal biasanya memasang pernyataan seperti "dalam jangka panjang biayanya mendekati Rp…". Pernyataan itu salah bila fungsinya tidak mempunyai asimtot datar.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal limit di tak hingga berkonteks

1. **Terjemahkan pertanyaannya.** Garis bawahi ungkapan waktu atau banyak barang. "Sangat banyak", "jangka panjang", "sangat lama" berarti $x \to \infty$. "Mula-mula" berarti $x = 0$.
2. **Tentukan bentuknya.** Pecahan polinomial: bandingkan derajat. Selisih akar: periksa apakah koefisien x^2 sama.
3. **Hitung dengan cara yang sesuai.** Pecahan: bagi dengan pangkat tertinggi penyebut. Selisih akar: sekawan atau rumus $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$ (hanya bila $a = p$).
4. **Kembalikan ke konteks dan satuan.** Hasil limit 3 pada fungsi "dalam juta rupiah" berarti Rp3.000.000. Hasil 1.200 pada model banyak ikan berarti 1.200 ekor (Contoh 3).
5. **Untuk Benar/Salah, cek dua hal tambahan:** apakah nilai limit pernah dicapai, dan apakah kata "lebih dari" atau "kurang dari" cocok dengan hasil hitungan yang tepat.
6. **Cek numerik kasar.** Substitusikan $x = 1.000$. Hasilnya harus dekat dengan jawabanmu.

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Menghitung nilai awal, bukan kecenderungan	"Porsi sangat banyak" dijawab dengan $K(0) = \frac{10}{2} = 5$ juta (pengecoh SA-23)	"Sangat banyak" berarti $x \to \infty$, bukan $x = 0$
Hanya mengambil satu koefisien	Menjawab 9 juta karena koefisien p^2 pembilang 9, lupa membagi dengan 3	Limit = **perbandingan** koefisien utama pembilang dan penyebut
Membandingkan koefisien pangkat yang berbeda	Pada $\frac{8x^2+1}{2x^2+4x}$, menjawab $\frac{8}{4} = 2$ (koefisien x penyebut), padahal $\frac{8}{2} = 4$	Bandingkan koefisien pangkat **tertinggi** di pembilang dan penyebut
Koefisien utama ditulis di belakang	Pada $\frac{6-5x^2}{2x^2+x}$, menjawab $\frac{6}{2} = 3$	Cari suku berpangkat tertinggi, bukan suku yang ditulis pertama
Satuan diabaikan	Fungsi dalam juta rupiah, menjawab "Rp3" atau "Rp3.000"	Tulis satuan dari kalimat soal di samping hasil limit
"Mendekati" disangka "tercapai"	Menyatakan banyak ikan suatu saat tepat 1.200 ekor	Selesaikan $f(x) = L$; bila tidak ada penyelesaian, nilai itu hanya didekati

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

"Tepat sama" dibaca "lebih dari"	$P(8) = 1.000$ dianggap "sudah lebih dari 1.000 ekor" (Contoh 3)	Hitung tepat, lalu baca kata pembanding di pernyataan
$\infty - \infty$ dianggap 0	$\sqrt{x^2+8x+1} - \sqrt{x^2+2x-5}$ dianggap mendekati 0, padahal 3 (Contoh 4)	Kalikan sekawan; hasilnya bisa bilangan selain 0
Rumus $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$ dipakai saat $a \neq p$	Menghitung $\sqrt{4x^2+x} - \sqrt{x^2+5x}$ dengan rumus cepat	Rumus cepat hanya untuk koefisien x^2 yang sama; bila berbeda, hasilnya tak hingga

• BEDAH SOAL ASLI

Soal SA-23 dijawab benar oleh 24,58 % peserta. Fungsinya pecahan dengan pembilang dan penyebut sama-sama berderajat dua, jadi hitungannya hanya satu langkah (Contoh terselesaikan 2a). Mengapa banyak yang salah? Karena pilihan jawabannya dirancang dari **kesalahan makna**: Rp5.000.000 adalah keuntungan saat $p = 0$ ($\frac{10}{2}$), Rp9.000.000 berasal dari koefisien utama pembilang saja (lupa membagi dengan 3), sedangkan Rp10.000.000 dan Rp2.000.000 berasal dari suku tetap pembilang dan penyebut. Sebelum menghitung, tulis dulu: "porsi sangat banyak" berarti $p \to \infty$, dan hasil dalam **juta rupiah**.

►. Roni, penjual nasi goreng, menjual dagangannya sebanyak p porsi dan memperoleh keuntungan (dalam jutaan rupiah) yang dinyatakan dengan fungsi

$$K(p) = \frac{9p^2 + 2p + 10}{3p^2 + 3p + 2}$$

Keuntungan yang akan diperoleh Roni apabila ia menjual nasi goreng dengan porsi sangat banyak adalah ....

A. Rp2.000.000,00
B. Rp3.000.000,00
C. Rp5.000.000,00
D. Rp9.000.000,00
E. Rp10.000.000,00

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: B**

Konsep: "porsi sangat banyak" berarti $p \to \infty$. Untuk fungsi rasional berderajat sama, limitnya adalah perbandingan koefisien pangkat tertinggi.

Langkah 1 – Bagi pembilang dan penyebut dengan p^2.

$$\lim_{p\to\infty} \frac{9+\frac{2}{p}+\frac{10}{p^2}}{3+\frac{3}{p}+\frac{2}{p^2}} = \frac{9+0+0}{3+0+0} = 3$$

Langkah 2. Keuntungan mendekati 3 juta rupiah = **Rp3.000.000,00**.

Cek numerik: $K(1.000) = \dfrac{9.002.010}{3.003.002} \approx 2{,}998$ ✓ (mendekati 3).

Analisis pilihan:

- Rp5.000.000 ✗: memakai $\frac{10}{2}$, yaitu nilai saat $p = 0$, bukan $p \to \infty$.
- Rp2.000.000 ✗ dan Rp10.000.000 ✗: hanya mengambil suku tetap penyebut atau pembilang.
- Rp9.000.000 ✗: hanya mengambil koefisien utama pembilang, lupa membagi dengan 3.

Jawaban: B.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut meminta kamu menyusun sendiri fungsi rasionalnya dari cerita sebelum menghitung limit di tak hingga. Tulis banyak jawaban benar dan banyak soal setelah n hari, lalu bentuk perbandingannya.

►. Seorang siswa sudah mengerjakan 20 soal latihan dengan 12 jawaban benar. Mulai hari ini, setiap hari ia mengerjakan 10 soal baru dan rata-rata menjawab benar 8 soal.
Bila kebiasaan itu berlangsung sangat lama, persentase jawaban benar dari seluruh soal yang pernah ia kerjakan mendekati ....

A. 60%
B. terus naik mendekati 100%
C. 70%
D. 80%
E. 40%

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: D**

Konsep: setelah n hari, persentase benar $B(n) = \dfrac{12 + 8n}{20 + 10n} \times 100\%$. Untuk $n \to \infty$, limit fungsi rasional berderajat sama adalah perbandingan koefisien utama.

Langkah 1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{12 + 8n}{20 + 10n} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$.

Langkah 2. Jadi persentasenya mendekati 80%.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: persentase awal $\frac{12}{20}$.
- B: mengira persentase terus naik tanpa batas; jawaban benar per hari hanya 8 dari 10.
- C: rata-rata sederhana dari 60% dan 80%.
- E: membagi 8 dengan 20 (soal awal).

Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: nilai awal 60% tidak menentukan kecenderungan jangka panjang. Lama-kelamaan 20 soal awal itu tidak berarti lagi, sehingga persentasenya mendekati persentase harian, $\frac{8}{10} = 80\%$. Hasil ini masuk akal dan dapat dipakai sebagai cek: limit model campuran seperti ini mendekati perbandingan dari bagian yang terus ditambahkan.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tulis dulu ungkapan apa yang berarti $t \to \infty$, lalu bandingkan derajat pembilang dan penyebut (atau kalikan sekawan bila ada akar).

1. Kadar suatu obat dalam darah t jam setelah diminum dimodelkan $C(t) = \dfrac{6t}{t^2 + 4}$ mg/L. Untuk $t \to \infty$, nilai $C(t)$ mendekati .... mg/L, dan artinya adalah ....

A. 0, artinya kadar obat lama-kelamaan habis dari darah
B. 6, artinya kadar obat menuju koefisien suku utama pembilang
C. 1,5, artinya kadar obat menetap pada nilai terbesarnya
D. 3, artinya kadar obat menetap pada setengah dari angka 6
E. membesar tanpa batas, artinya obat menumpuk dalam darah

2. Sebuah layang-layang terbang pada ketinggian tetap 30 m. Bila jarak mendatar dari tangan pemegang ke titik tepat di bawah layang-layang x m, panjang benang yang terulur (dianggap lurus) adalah $L(x) = \sqrt{x^2 + 900}$ m. Untuk $x \to \infty$, selisih $L(x) - x$ mendekati .... m

A. 30
B. 0
C. 900
D. 15
E. membesar tanpa batas

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kunci singkat: 1. A 2. B

✔ PERIKSA DIRI

- Ungkapan apa saja dalam soal cerita yang berarti $x \to \infty$, dan apa bedanya dengan "nilai awal"?
- Untuk pecahan polinomial, apa tiga kemungkinan hasil limit di tak hingga, dan bagaimana kamu menentukan kasusnya dengan cepat?
- Bagaimana cara memeriksa apakah nilai limit pernah benar-benar dicapai oleh fungsi dalam konteks soal?



Latihan interaktif di LMS

Sub bab 3.2: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-3.2

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab 3.3 · Limit fungsi trigonometri

MATTL-3.3

◎ APA YANG DIUJI

Sub bab ini memuat soal asli TKA 2025 yang **paling sedikit dijawab benar** dari seluruh 25 soal. Limit trigonometri di TKA tidak berhenti pada "hitung nilai limit berikut". Soal dapat meminta kamu **menyatakan luas sebuah bangun dalam sudut**, lalu menilai apa yang terjadi bila sudutnya mendekati nilai tertentu. Seperti limit aljabar, semuanya dikerjakan **tanpa aturan L'Hôpital**: cukup satu limit dasar, beberapa identitas trigonometri, dan substitusi.

Indikator resmi soal asli TKA 2025 untuk sub bab ini:

Soal asli	Indikator resmi	Siswa yang menjawab benar
SA-24	Menentukan nilai limit dari rasio luas segitiga dengan luas setengah lingkaran untuk nilai parameter mendekati suatu sudut dalam pi	5,95 %
SA-25	Menentukan pasangan parameter pembentuk fungsi trigonometri yang memenuhi persamaan limit fungsi trigonometri tertentu	23,78 %

Angka 5,95 % berarti hanya sekitar 1 dari 17 peserta yang menjawab SA-24 dengan benar. Soal itu menggabungkan tiga hal sekaligus: geometri (menyatakan luas dalam jari-jari dan sudut), trigonometri, dan limit, dalam bentuk PG kompleks yang menuntut semua pernyataan dinilai tepat. SA-25 (23,78 %) menguji limit trigonometri dengan x menuju 3, bukan menuju 0, sehingga rumus dasar tidak dapat langsung dipakai.

Setelah mempelajari sub bab ini, kamu dapat:

- menjelaskan mengapa limit trigonometri harus dihitung dalam radian dan memakai limit dasar $\sin x/x \to 1$;
- menghitung limit bentuk $\sin ax$, $\tan ax$, dan $1 - \cos ax$ untuk $x \to 0$;
- menentukan pasangan parameter yang membuat sebuah limit trigonometri bernilai tertentu;
- memakai substitusi $u = x - a$ untuk limit trigonometri dengan x menuju $a \neq 0$;
- menyatakan luas dan panjang pada bangun datar dalam jari-jari dan sudut, lalu mengambil limitnya;
- menilai pernyataan tentang pengaruh jari-jari dan sudut terhadap nilai limit.

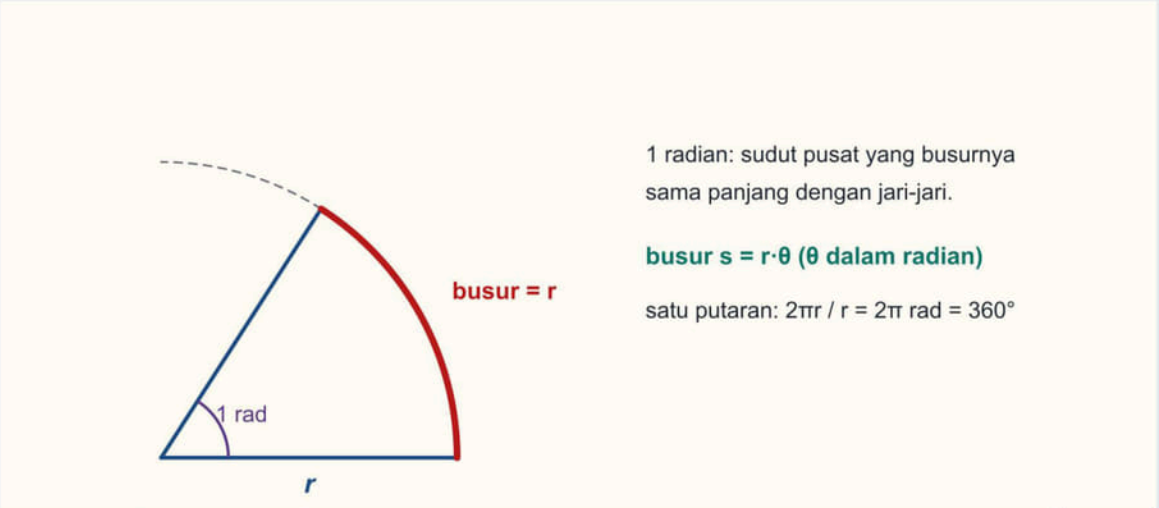
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

◆ KONSEP, RUMUS, DAN CONTOH

1. Radian dan limit dasar

Dalam limit, sudut **selalu dalam radian**. Ingat: π radian $= 180°$, jadi $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$.

Apa itu radian? Satu radian adalah sudut pusat yang busurnya **sama panjang dengan jari-jari** (Gambar 3.10). Akibatnya, sudut θ radian pada lingkaran berjari-jari r menghasilkan busur sepanjang $s = r\theta$; pada lingkaran satuan ($r = 1$), panjang busur **sama dengan** besar sudutnya. Keliling lingkaran $2\pi r$ memuat $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ jari-jari, jadi satu putaran $= 2\pi$ radian $= 360°$. Kesamaan "busur = sudut" inilah yang membuat perbandingan $\sin x$ dengan x masuk akal: keduanya panjang ruas pada lingkaran satuan.



Gambar 3.10 Satu radian: sudut pusat yang busurnya sepanjang jari-jari. Secara umum busur $s = r\theta$ dengan θ dalam radian. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Semua limit trigonometri di TKA bertumpu pada satu limit dasar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

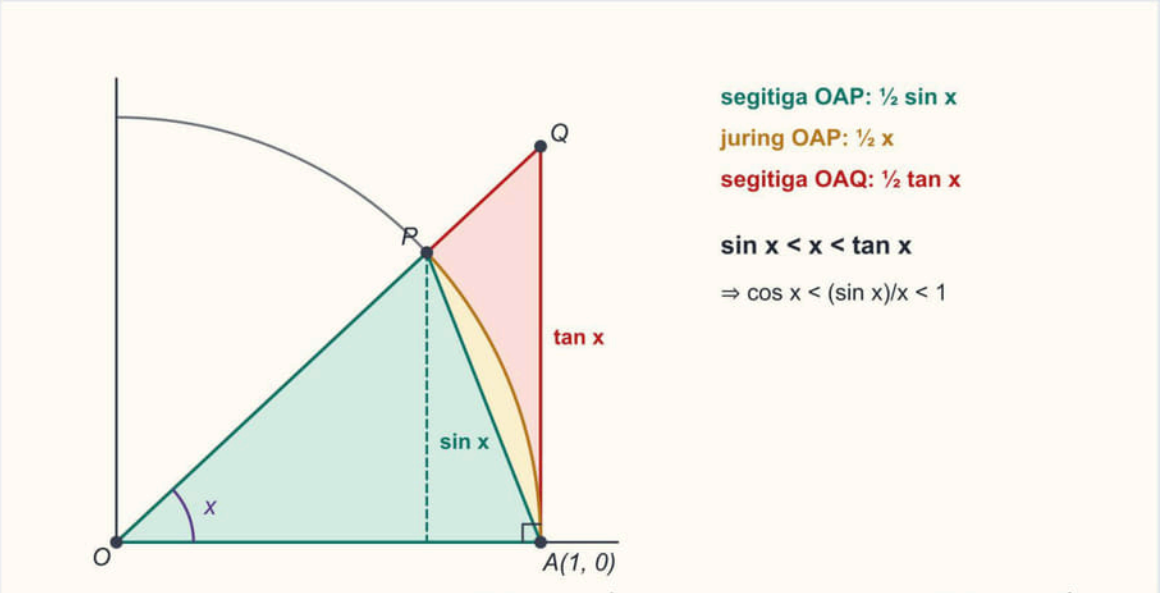
Tabel berikut memeriksanya secara numerik (x dalam radian):

x	0,1	0,01	0,001
$\frac{\sin x}{x}$	0,99833	0,99998	0,9999998
$\frac{\tan x}{x}$	1,00335	1,00003	1,0000003

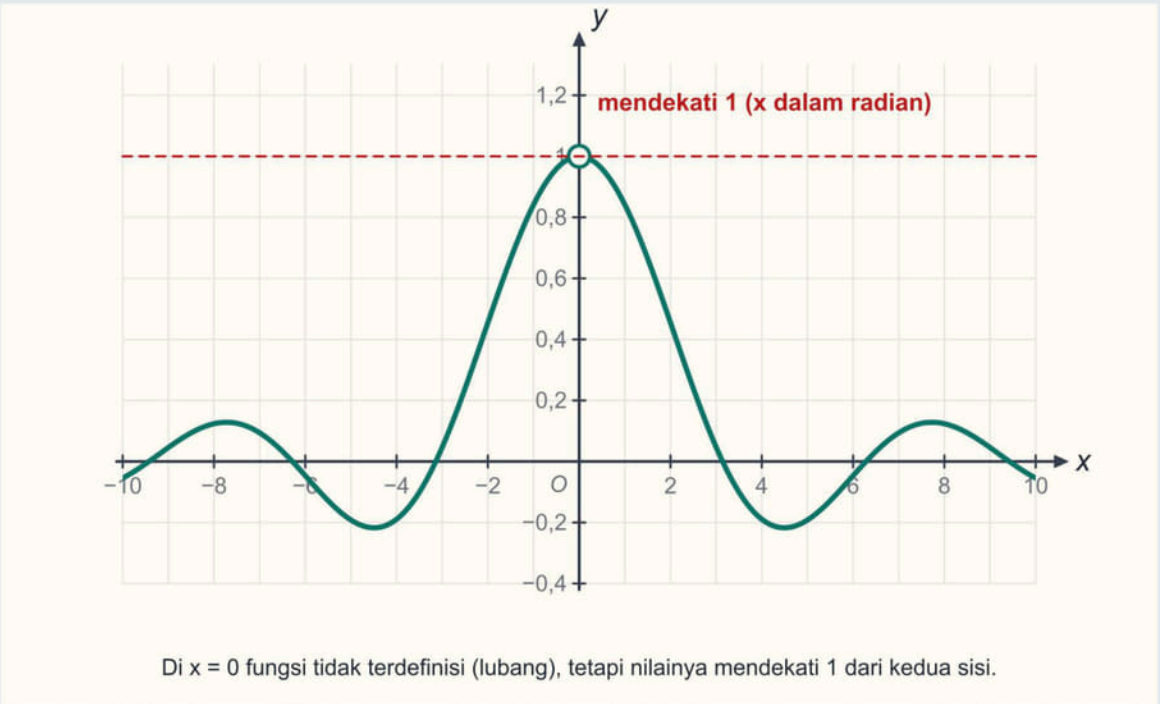
Mengapa hasilnya 1? Gambarlah lingkaran berjari-jari 1 dan sudut pusat x (radian, $0 < x < \frac{\pi}{2}$). Tiga daerah bersarang: segitiga di dalam juring (luas $\frac{1}{2}\sin x$), juring (luas $\frac{1}{2}x$), dan segitiga siku-siku yang dibentuk garis singgung (luas $\frac{1}{2}\tan x$). Jadi $\sin x < x < \tan x$. Bila dibagi $\sin x$ dan dibalik, diperoleh $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Saat $x \to 0$, $\cos x \to 1$, sehingga $\frac{\sin x}{x}$ terjepit menuju 1. Ketiga daerah itu digambar pada Gambar 3.11, dan grafik $\frac{\sin x}{x}$ yang

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

"berlubang" di $x = 0$ pada Gambar 3.12.



Gambar 3.11 Pada lingkaran satuan: segitiga OAP (luas $\frac{1}{2}\sin x$) termuat dalam juring OAP (luas $\frac{1}{2}x$), yang termuat dalam segitiga OAQ (luas $\frac{1}{2}\tan x$). Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.



Gambar 3.12 Grafik $y = \frac{\sin x}{x}$ (x dalam radian) tidak terdefinisi di $x = 0$, tetapi mendekati 1 dari kedua sisi. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Bila sudut dalam derajat, hasilnya bukan 1. Untuk x derajat, $\frac{\sin x^\circ}{x}$ mendekati $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$ (cek numerik di $x = 0{,}01$: $0{,}0174533$). Karena itu, setiap kali soal menyebut "θ mendekati $\frac{\pi}{6}$", bekerjalah dalam radian.

2. Rumus dasar dan cara memakainya

Dari limit dasar, untuk $a, b \neq 0$:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

Mengapa? Sisipkan sudutnya: $\frac{\sin ax}{bx}=\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}$. Faktor pertama menuju 1 (limit dasar dengan sudut ax), sehingga hasilnya $\frac{a}{b}$.

Cara memakainya: pecah bentuk yang rumit menjadi **perkalian** beberapa pecahan kecil. Setiap $\sin$ atau $\tan$ dipasangkan dengan satu faktor x (atau dengan $\sin/\tan$ lain). Setiap pasangan menyumbang "perbandingan sudut"-nya.

Contoh terselesaikan 1: memasangkan faktor

Tentukan

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 8x}\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\tan 5x}{\sin^2 2x}$$

Penyelesaian.

(a) Langsung $\frac{6}{3}=2$.

(b) Langsung $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(c) Pembilang memuat dua faktor (x dan $\tan 5x$), penyebut juga dua ($\sin 2x\cdot\sin 2x$). Pasangkan:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\frac{\tan 5x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$$

Cek numerik di $x=0{,}00001$: (a) $2{,}0000$; (b) $0{,}2500$; (c) $1{,}2500$ ✓. Pada (c), jumlah faktor sinus/tangen dan faktor x di atas dan di bawah harus "seimbang". Bila tidak seimbang, hasilnya 0 atau tak hingga.

3. Bentuk $1-\cos$: ubah menjadi sinus kuadrat

Rumus dasar hanya memuat $\sin$ dan $\tan$. Bila muncul $1-\cos$, ubah dulu dengan identitas sudut rangkap. Dari $\cos 2A=1-2\sin^2 A$ diperoleh $1-\cos 2A=2\sin^2 A$. Dengan $u=2A$:

$$1-\cos u=2\sin^2\frac{u}{2}$$

Perhatikan: sudutnya **dibagi dua**. Jadi $1-\cos 6x=2\sin^2 3x$ dan $1-\cos 3x=2\sin^2\frac{3x}{2}$. Akibatnya, untuk $a\neq 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin\frac{ax}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{ax}{2}}{x}=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2}$$

Misalnya untuk $a=6$ hasilnya 18 (cek numerik di $x=0{,}0001$: $17{,}999999$ ✓). Bentuk $1-\cos$ "setara" dengan **dua** faktor x. Karena itu, $1-\cos ax$ dibagi satu faktor x saja menghasilkan 0.

Contoh terselesaikan 2: memakai identitas $1-\cos$

(a) Tentukan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\tan 3x}$$

Penyelesaian. Ubah $1-\cos 6x = 2\sin^2 3x$, lalu pasangkan:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot\sin 3x}{x\cdot\tan 3x} = 2\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{3} = 6$$

(b) Tentukan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 2x\cos 2x}{x^3}$$

Penyelesaian. Substitusi memberi $0/0$. Keluarkan faktor bersama $\sin 2x$:

$$\frac{\sin 2x\,(1-\cos 2x)}{x^3} = \frac{\sin 2x\cdot 2\sin^2 x}{x^3}$$

$$= 2\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} \;\to\; 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 4$$

Cek numerik di $x = 0{,}0001$: (a) $5{,}9999996$; (b) $3{,}9999999$ ✓. Pada (b), jangan menganggap $\sin 2x \approx \sin 2x\cos 2x$ lalu menyimpulkan pembilangnya 0. Selisih kecil itulah yang menentukan hasil, dan identitas $1-\cos$ "membuka" selisih itu.

Parameter dalam limit trigonometri. Indikator SA-25 menyebut "pasangan parameter yang memenuhi persamaan limit". Soal jenis ini memberi nilai limit, lalu menanyakan pasangan bilangan (a, b) yang cocok. Caranya: hitung limitnya **dalam a dan b** dengan rumus dasar, samakan dengan nilai yang diberikan, lalu uji setiap pasangan.

Contoh terselesaikan 3: mencari pasangan parameter

Diketahui

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x\tan bx} = 8$$

dengan $a, b \neq 0$. Tentukan benar atau salah: pasangan (a, b) berikut memenuhi persamaan itu.

Penyelesaian. Ubah $1-\cos ax = 2\sin^2\frac{ax}{2}$, lalu pasangkan:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{ax}{2}\cdot\sin\frac{ax}{2}}{x\cdot\tan bx} = 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a/2}{b} = \frac{a^2}{2b}$$

Syaratnya $\frac{a^2}{2b} = 8$, atau $a^2 = 16b$.

Pasangan (a, b)	Nilai	Alasan
$(4, 1)$	Benar	$\frac{16}{2} = 8$
$(8, 4)$	Benar	$\frac{64}{8} = 8$
$(4, 2)$	Salah	$\frac{16}{4} = 4$
$(-4, 1)$	Benar	$a^2 = 16$ juga; $\cos(-4x) = \cos 4x$
$(2, 4)$	Salah	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cek numerik di $x = 0{,}0001$ untuk kelima pasangan: 8; 8; 4; 8; 0,5 ✓. Perhatikan pasangan $(-4, 1)$. Pasangan ini mudah ditolak karena "parameter negatif terasa salah". Padahal a muncul sebagai a^2, jadi tandanya tidak berpengaruh.

4. Limit menuju $a \neq 0$: substitusi dulu, lalu $u = x - a$

Rumus dasar hanya berlaku untuk sudut yang menuju **0**. Bila x menuju bilangan lain, lakukan dua langkah.

1. **Substitusi dulu**, sama seperti di sub bab 3.1. Fungsi trigonometri juga kontinu di domainnya. Bila hasilnya bukan $0/0$, soal selesai. Contoh: $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ di $x = \frac{\pi}{2}$ bernilai $\frac{1}{1+0} = 1$, jadi limitnya 1.
2. **Bila $0/0$, misalkan $u = x - a$.** Saat $x \to a$, $u \to 0$. Tulis ulang semua bagian dalam u, lalu pakai rumus dasar.

Hati-hati dengan sudut yang bergeser. Misalnya $\sin(\pi + u) = -\sin u$ dan $\cos(\pi + u) = -\cos u$. Tanda negatif ini sering hilang.

Contoh terselesaikan 4: substitusi $u = x - a$

(a) Tentukan

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(3x - 6)}{x^2 - 4}$$

Penyelesaian. Substitusi memberi $\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$. Misalkan $u = x - 2$. Maka $3x - 6 = 3u$ dan $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = u(u + 4)$:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin 3u}{u} \cdot \frac{1}{u + 4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(b) Tentukan

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \cos(2x - 2)}{(x^2 - 1)\sin(x - 1)}$$

Penyelesaian. Misalkan $u = x - 1$. Maka $2x - 2 = 2u$, sehingga $1 - \cos 2u = 2\sin^2 u$, dan $x^2 - 1 = u(u + 2)$:

$$\lim_{u \to 0} \frac{2\sin u \cdot \sin u}{u\,(u + 2)\sin u} = \lim_{u \to 0} 2 \cdot \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{u + 2} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

(c) Tentukan

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

Penyelesaian. Misalkan $u = x - \pi$, jadi $x = \pi + u$ dan $\sin x = \sin(\pi + u) = -\sin u$:

$$\lim_{u \to 0} \frac{-\sin u}{u} = -1$$

Cek numerik (jarak $0{,}0001$ dari titik tujuan): (a) $0{,}75000$; (b) $1{,}00005$ dan $0{,}99995$ dari kedua

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

sisi; (c) $-1{,}0000$ ✓. Jawaban $+1$ pada (c) adalah jebakan khas: rumus "$\sin u/u \to 1$" dipakai tanpa memperhatikan pergeseran sudut.

Contoh terselesaikan 5: memfaktorkan dengan identitas

Tidak semua limit menuju $a \neq 0$ memerlukan $u = x - a$. Kadang cukup memfaktorkan seperti di aljabar. Tentukan

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$$

Penyelesaian. Di $x = \frac{\pi}{4}$: $1 - 1 = 0$ dan $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, jadi bentuknya $0/0$. Tulis $1 - \tan x = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}$. Faktor $(\sin x - \cos x)$ dapat dicoret:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$$

Cek numerik di $x = \frac{\pi}{4} \pm 0{,}000001$: $\approx -1{,}41421$ ✓.

5. Limit dalam geometri: nyatakan dulu dalam jari-jari dan sudut

Inilah tipe SA-24. Polanya selalu tiga langkah:

1. **Nyatakan setiap besaran** (luas, panjang) dalam ukuran tetap (jari-jari r atau panjang sisi) dan sudut θ. Gunakan segitiga siku-siku yang muncul bila kamu menarik garis tinggi.
2. **Bentuk perbandingannya dan sederhanakan.** Bila kedua luas sebanding dengan r^2, faktor r^2 habis. Artinya **ukuran bangun tidak memengaruhi** perbandingan. Yang tersisa hanya fungsi dari θ.
3. **Ambil limitnya.** Bila fungsi itu kontinu di sudut yang didekati, cukup **substitusi** sudutnya. Bila hasilnya $0/0$ (biasanya saat $\theta \to 0$), pakai rumus dasar.

Rumus-rumus yang paling sering dipakai:

Bangun	Besaran dalam ukuran dan sudut
Segitiga sama kaki, alas $2a$, sudut puncak θ	tinggi $= \frac{a}{\tan(\theta/2)}$; luas $= \frac{a^2}{\tan(\theta/2)}$
Segitiga dengan dua sisi s mengapit sudut θ	luas $= \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$; sisi ketiga $= 2s \sin\frac{\theta}{2}$
Juring berjari-jari r, sudut pusat θ (radian)	busur $= r\theta$; luas $= \frac{1}{2}r^2\theta$; tali busur $= 2r \sin\frac{\theta}{2}$
Setengah lingkaran berjari-jari r	luas $= \frac{1}{2}\pi r^2$

Asal rumus baris pertama: garis tinggi dari puncak membagi segitiga sama kaki menjadi dua segitiga siku-siku dengan sudut $\frac{\theta}{2}$ di puncak, sisi depan a, dan sisi samping t (tinggi). Jadi $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{a}{t}$, sehingga $t = \frac{a}{\tan(\theta/2)}$.

Contoh terselesaikan 6: rasio luas pada logo (menilai pernyataan)

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Logo koperasi sekolah tahun ajaran 2026/2027 berbentuk rumah: sebuah persegi dengan sisi $2a$, dan di atasnya segitiga sama kaki ABC ($AC = BC$) yang alasnya AB berimpit dengan sisi atas persegi. Sudut puncak di C adalah θ. Luas segitiga dinyatakan dengan X dan luas persegi dengan Y. Tentukan benar atau salah setiap pernyataan berikut.

1. Panjang sisi persegi memengaruhi nilai limit $\frac{X}{Y}$.
2. Untuk $\theta \to \frac{\pi}{3}$, nilai $\frac{X}{Y}$ mendekati $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
3. Untuk $\theta \to \frac{\pi}{2}$, nilai $\frac{X}{Y}$ mendekati $\frac{1}{2}$.
4. Jika $\theta \to \pi$, maka $\frac{X}{Y} \to 0$.
5. Nilai $\frac{X}{Y}$ sama untuk berapa pun θ.

Penyelesaian.

Langkah 1 – nyatakan dalam a dan θ. Alas segitiga $2a$, jadi menurut tabel di atas

$$X = \frac{a^2}{\tan\frac{\theta}{2}}, \qquad Y = (2a)^2 = 4a^2$$

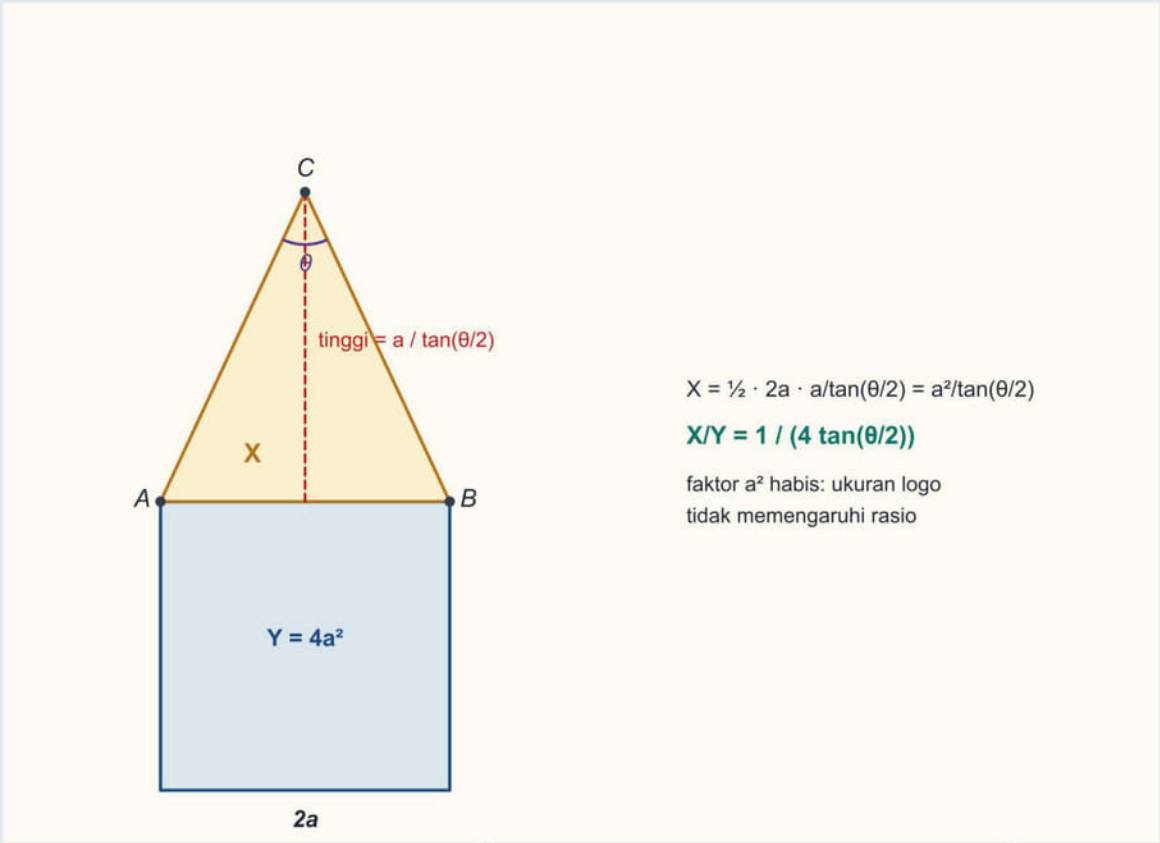
Langkah 2 – perbandingan.

$$\frac{X}{Y} = \frac{a^2}{4a^2\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4\tan\frac{\theta}{2}}$$

Faktor a^2 habis. Fungsi ini kontinu untuk $0 < \theta < \pi$. Gambar 3.13 menunjukkan dari mana rumus X berasal.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan



Gambar 3.13 Logo Contoh 6: persegi bersisi $2a$ dan atap segitiga sama kaki bersudut puncak θ. Garis tinggi membagi atap menjadi dua segitiga siku-siku, sehingga tinggi $= \frac{a}{\tan(\theta/2)}$. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Langkah 3 – nilai setiap pernyataan.

Pernyataan	Nilai	Alasan
1	Salah	a^2 habis dibagi; rasio hanya bergantung pada θ
2	Benar	$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, jadi rasionya $\frac{\sqrt{3}}{4}$
3	Salah	$\tan\frac{\pi}{4} = 1$, jadi rasionya $\frac{1}{4}$, bukan $\frac{1}{2}$
4	Benar	saat $\frac{\theta}{2} \to \frac{\pi}{2}$, nilai $\tan\frac{\theta}{2}$ membesar tanpa batas, jadi rasionya $\to 0$ (atap makin pipih)
5	Salah	rasio berubah bila θ berubah (lihat pernyataan 2 dan 3)

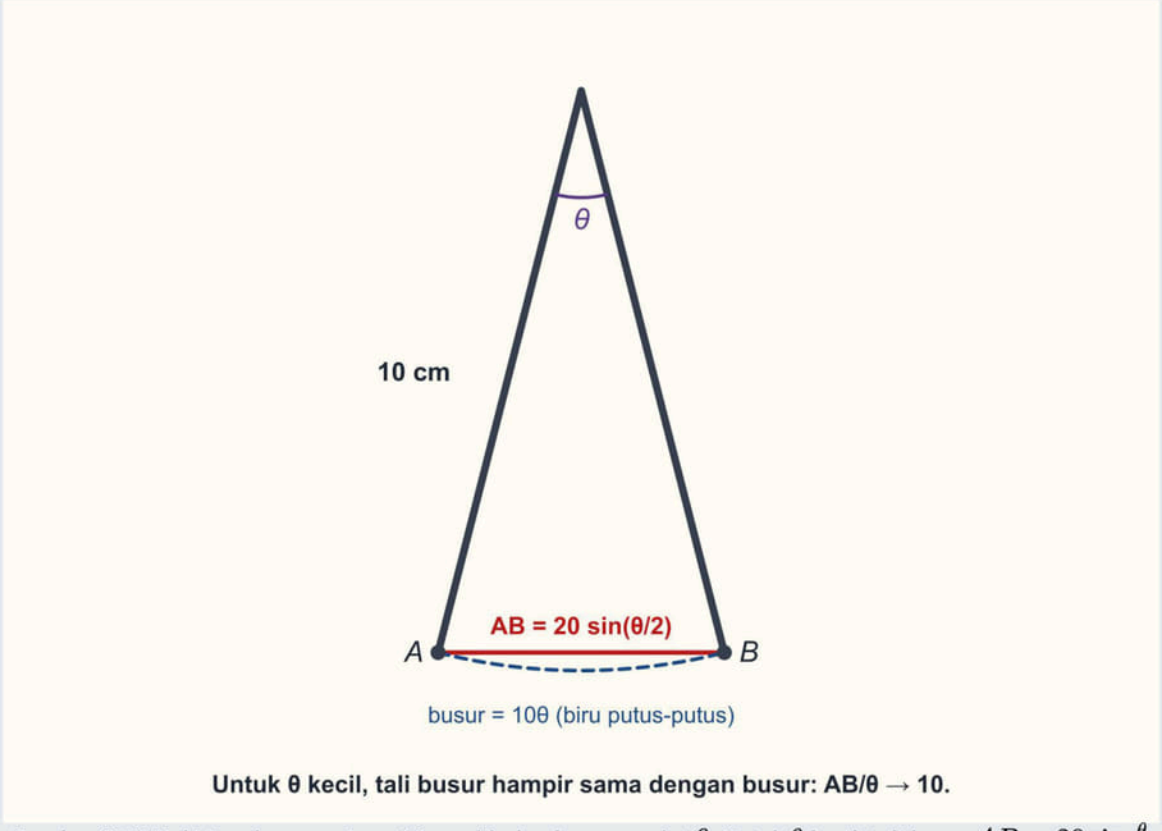
Cek dengan bangun yang dikenal. Untuk $\theta = \frac{\pi}{3}$, segitiganya sama sisi bersisi $2a$ dengan luas $\sqrt{3}\,a^2$. Dibagi $4a^2$ hasilnya $\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}433$, cocok dengan pernyataan 2. Hitungan numerik dengan $a = 1$ dan $a = 7$ memberi nilai yang sama, $0{,}4330127$. Untuk $\theta \to 0$, atapnya makin tinggi dan rasionya membesar tanpa batas, sehingga limitnya tidak ada.

Perhatikan bahwa pernyataan 2 dan 3 **tidak memerlukan rumus limit trigonometri sama sekali**. Fungsinya kontinu di sudut itu, jadi cukup substitusi. Jangan macet karena mencari "rumus limit": bagian yang sulit justru langkah 1.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Contoh terselesaikan 7: limit geometri saat sudut menuju 0

Sebuah jangka memiliki dua kaki yang masing-masing panjangnya 10 cm. Kaki jangka dibuka dengan sudut θ radian (lihat Gambar 3.14). Jarak kedua ujung kaki adalah AB. Tentukan nilai limit AB/θ untuk $\theta \to 0$, dan jelaskan artinya.



Gambar 3.14 Kaki jangka sepanjang 10 cm dibuka dengan sudut θ. Untuk θ kecil, tali busur $AB = 20 \sin \frac{\theta}{2}$ hampir sama dengan busur 10θ. Sumber: digambar oleh Tim Next Level Study Indonesia.

Penyelesaian. Kedua kaki dan AB membentuk segitiga sama kaki dengan dua sisi 10 cm yang mengapit sudut θ. Menurut tabel, $AB = 2 \cdot 10 \sin \frac{\theta}{2} = 20 \sin \frac{\theta}{2}$. Substitusi $\theta = 0$ memberi $0/0$, jadi pakai rumus dasar:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{AB}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{20 \sin \frac{\theta}{2}}{\theta} = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Artinya, untuk bukaan yang sangat kecil, $AB \approx 10\,\theta$ cm. Cek: untuk $\theta = 0{,}2$ radian, $AB = 20 \sin 0{,}1 \approx 1{,}9967$ cm, sangat dekat dengan $10 \times 0{,}2 = 2$ cm ✓.

▲ STRATEGI DAN JEBAKAN

Langkah menjawab soal limit trigonometri

1. **Substitusi dulu.** Bila hasilnya bukan $0/0$, soal selesai (termasuk banyak pernyataan pada soal geometri).
2. **Periksa ke mana x menuju.** Bila menuju 0, pakai rumus dasar. Bila menuju $a \neq 0$,

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

misalkan $u = x - a$ atau faktorkan dengan identitas.

3. **Ubah semua** $1 - \cos$ menjadi $2\sin^2$(setengah sudut).
4. **Pecah menjadi perkalian pasangan** sinus/tangen dengan faktor x (atau u). Hitung setiap pasangan sebagai perbandingan sudut.
5. **Pada soal geometri:** gambar garis tinggi, nyatakan setiap luas dalam r (atau sisi) dan θ, coret r^2, baru ambil limit.
6. **Pada PG kompleks:** nilai setiap pernyataan secara terpisah, dan cek satu nilai dengan bangun yang kamu kenal (misalnya $\theta = \frac{\pi}{2}$ atau segitiga sama sisi).

Jebakan khas

Jebakan	Contoh salah tafsir	Cara menghindari
Rumus "menuju 0" dipakai saat $x \to a \neq 0$	Pada $\frac{\sin(3x-6)}{x^2-4}$ untuk $x \to 2$, langsung menjawab $\frac{3}{1}$ dengan "membandingkan koefisien", padahal $\frac{3}{4}$ (Contoh 4a)	Substitusi $u = x - a$ dulu sampai sudutnya menuju 0
Sudut dalam derajat	Rumus $\frac{\sin x}{x} \to 1$ dipakai dengan x dalam derajat, atau $\frac{\pi}{6}$ dan 30 dicampur dalam satu hitungan	Semua perhitungan limit dalam radian; π radian $= 180^\circ$
Sudut tidak dibagi dua	$1 - \cos 6x = 2\sin^2 6x$	$1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$: sudutnya **separuh**
Ukuran bangun dianggap berpengaruh	"Jari-jari makin besar, rasio luas makin besar"	Nyatakan kedua luas dalam r; bila keduanya memuat r^2, r tidak berpengaruh
Faktor $\frac{1}{2}$ pada rumus luas	Luas segitiga ditulis $2r \cdot t$ tanpa $\frac{1}{2}$, sehingga rasio menjadi dua kali lipat	Tulis rumus lengkap: $\frac{1}{2} \times$ alas $\times$ tinggi
Tanda pada sudut bergeser	$\sin(\pi + u)$ ditulis $\sin u$, sehingga hasil -1 menjadi 1	Pakai $\sin(\pi + u) = -\sin u$, $\cos(\pi + u) = -\cos u$
Pendekatan "$\sin ax \approx ax$" pada selisih	$\sin 2x - \sin 2x \cos 2x$ dianggap $2x - 2x = 0$	Keluarkan faktor bersama, lalu pakai identitas $1 - \cos$
Mencari rumus limit padahal fungsi kontinu	Bingung menghitung $\theta \to \frac{\pi}{3}$ karena "harus pakai rumus limit"	Bila tidak $0/0$, substitusi saja
Pasangan tidak seimbang	$1 - \cos ax$ dibagi satu faktor x dianggap $\frac{a}{2}$	$1 - \cos$ setara dua faktor x; dibagi satu faktor x hasilnya 0

BEDAH SOAL ASLI

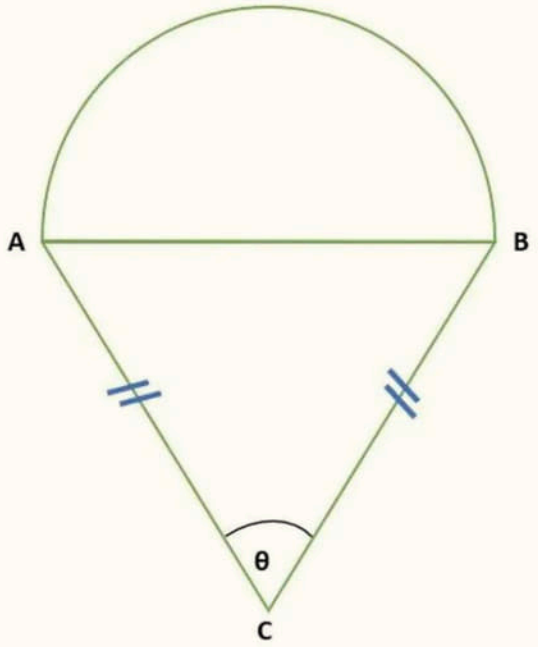
Soal SA-24 dijawab benar oleh 5,95 % peserta, terendah dari seluruh soal asli 2025. Soal ini tidak memerlukan rumus limit yang rumit. Yang sulit adalah **langkah 1** pada konsep 5:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

menyatakan luas segitiga X dan luas setengah lingkaran Y dalam jari-jari r dan sudut puncak θ. Tarik garis tinggi dari C ke tengah AB. Garis itu membagi θ menjadi dua sudut $\frac{\theta}{2}$, persis seperti Contoh terselesaikan 6, dengan $a = r$. Setelah $\frac{X}{Y}$ menjadi fungsi θ saja, setiap pernyataan dinilai dengan substitusi. Perhatikan tiga hal: (1) apakah r habis dibagi; (2) nilai $\cot \frac{\theta}{2}$ di sudut yang ditanyakan, dalam radian; (3) apa yang terjadi bila $\theta \to \pi$. Kerjakan dulu sebelum membaca pembahasannya.

►. Sebuah setengah lingkaran dengan diameter AB terletak pada segitiga sama kaki ABC ($AC = BC$) dan memiliki panjang 2π, sehingga membentuk daerah berbentuk "kerucut es krim" seperti pada gambar. Sudut puncak segitiga di titik C adalah θ.
Jika luas segitiga ABC dinyatakan dengan X dan luas setengah lingkaran dinyatakan dengan Y, manakah pernyataan yang benar tentang nilai $\lim_{\theta \to a} \dfrac{X}{Y}$?

(Pilih semua jawaban benar.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Besar jari-jari memengaruhi nilai limit.

☐ B. Besar sudut tidak memengaruhi nilai limit.

☐ C. Nilai $\dfrac{X}{Y}$ selalu sama untuk berapa pun θ.

☐ D. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{X}{Y} = \dfrac{2}{\pi}$

☐ E. Jika $\theta \to \pi$, maka $\dfrac{X}{Y} \to 0$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: E**

Langkah 1 – Nyatakan X dan Y dalam r dan θ. Misalkan jari-jari setengah lingkaran r, jadi $AB = 2r$. Garis tinggi dari C membagi sudut θ menjadi dua sudut $\frac{\theta}{2}$, sehingga tinggi segitiga

$$t = \frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{2}\cdot 2r \cdot \frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{r^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

Luas setengah lingkaran $Y = \dfrac{1}{2}\pi r^2$.

Langkah 2 – Perbandingan.

$$\frac{X}{Y} = \frac{2}{\pi\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\pi}\cot\frac{\theta}{2}$$

Fungsi ini kontinu untuk $0 < \theta < \pi$, sehingga $\lim\limits_{\theta\to a}\dfrac{X}{Y} = \dfrac{2}{\pi}\cot\dfrac{a}{2}$.

Analisis tiap pernyataan:

1. ✗ r^2 habis dibagi, jadi jari-jari (berapa pun panjang setengah lingkarannya) **tidak** memengaruhi limit.
2. ✗ Nilai limit bergantung pada a (sudut yang didekati).
3. ✗ $\frac{X}{Y}$ berubah bila θ berubah.
4. ✗ $\lim\limits_{\theta\to\pi/6}\dfrac{X}{Y} = \dfrac{2}{\pi}\cot\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2(2+\sqrt{3})}{\pi} \approx 2{,}38$, bukan $\dfrac{2}{\pi}$. Nilai $\dfrac{2}{\pi}$ baru diperoleh bila $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ (karena $\cot\dfrac{\pi}{4} = 1$).
5. ✓ Jika $\theta \to \pi$, maka $\cot\dfrac{\theta}{2} \to \cot\dfrac{\pi}{2} = 0$, jadi $\dfrac{X}{Y} \to 0$ (segitiga menjadi sangat pipih).

Catatan: naskah sumber menulis "Jawaban benar lebih dari satu", tetapi hasil perhitungan menunjukkan hanya pernyataan 5 yang benar (pernyataan 4 benar hanya jika sudutnya $\frac{\pi}{2}$).

Jawaban: pernyataan 5.

Catatan jujur tentang kunci SA-24. Lembar soal asli memuat petunjuk "Jawaban benar lebih dari satu". Namun perhitungan yang konsisten dengan gambar (AB diameter, $AC = BC$, θ sudut puncak) memberi

$$\frac{X}{Y} = \frac{2}{\pi}\cot\frac{\theta}{2}$$

dan dengan rumus ini **hanya pernyataan 5** (pilihan E) yang benar. Limit pada pernyataan 4 (pilihan D) bernilai $\frac{2}{\pi}\cot\frac{\pi}{12} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{\pi} \approx 2{,}38$, bukan $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$. Nilai $\frac{2}{\pi}$ baru diperoleh bila $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Rumus ini dapat dicek numerik: untuk $r = 2$ dan $\theta = 1{,}1$ radian, luas segitiga yang dihitung dari koordinat A, B, C memberi $\frac{X}{Y} \approx 1{,}0384$, sama dengan nilai $\frac{2}{\pi}\cot 0{,}55$. Karena itu kunci Bank Soal NLS, yang dipakai buku ini, hanya pernyataan 5. Asal petunjuk "lebih dari satu" tidak dapat kami pastikan. Dugaan kami: penyusun soal menganggap kaki segitiga tetap sama dengan diameter ($AC = BC = 2r$) sambil mengubah θ. Model itu memberi $\frac{X}{Y} = \frac{4\sin\theta}{\pi}$, yang memang bernilai $\frac{2}{\pi}$ di $\theta = \frac{\pi}{6}$. Akan tetapi, model itu tidak konsisten: alas $2r$ dan kaki $2r$ hanya mungkin bila segitiganya sama sisi ($\theta = \frac{\pi}{3}$). Pelajaran untuk ujian: bila hitunganmu yang

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

rapi hanya membenarkan satu pernyataan, periksa ulang model dan hitunganmu sekali. Bila hasilnya tetap, pegang hasil hitungan, jangan sekadar mengikuti petunjuk jumlah jawaban.

Soal SA-25 dijawab benar oleh 23,78 % peserta. Jebakannya: x menuju **3**, bukan 0, sehingga rumus dasar belum dapat dipakai. Mulailah dengan substitusi $u = x - 3$ (konsep 4). Bagian $x - \frac{9}{x}$ perlu disederhanakan menjadi $\frac{x^2-9}{x}$ agar faktor $(x-3)$ terlihat, dan pembilang $1 - \cos 6u$ diubah dengan identitas sudut setengah. Hitung tanda dengan cermat. Dua pilihan jawaban bernilai negatif.

►. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1 - \cos(6x - 18)}{\left(x - \frac{9}{x}\right)\sin(6x - 18)} = \ldots$

A. $-\dfrac{3}{2}$

B. $-\dfrac{2}{3}$

C. 0

D. $\dfrac{2}{3}$

E. $\dfrac{3}{2}$

Pembahasan **Kunci: E**

Rumus yang dipakai: $1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$, $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin au}{bu} = \dfrac{a}{b}$.

Langkah 1 – Substitusi $u = x - 3$ $(u \to 0)$. Maka $6x - 18 = 6u$ dan

$$x - \frac{9}{x} = \frac{x^2 - 9}{x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x} = \frac{u(u+6)}{u+3}$$

Langkah 2 – Ubah pembilang. $1 - \cos 6u = 2\sin^2 3u$.

Langkah 3 – Susun limit.

$$\lim_{u \to 0} \frac{2\sin^2 3u \cdot (u+3)}{u(u+6)\sin 6u} = \lim_{u \to 0} 2 \cdot \frac{\sin 3u}{u} \cdot \frac{\sin 3u}{\sin 6u} \cdot \frac{u+3}{u+6}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{2}$$

Cek numerik: $x = 3{,}001 \to$ nilai $\approx 1{,}4999$ ✓.

Analisis pilihan: $-\frac{3}{2}$ dan $-\frac{2}{3}$ muncul dari salah tanda $1 - \cos$; $\frac{2}{3}$ dari membalik perbandingan; 0 dari menganggap pembilang "lebih cepat" nol tanpa menghitung.

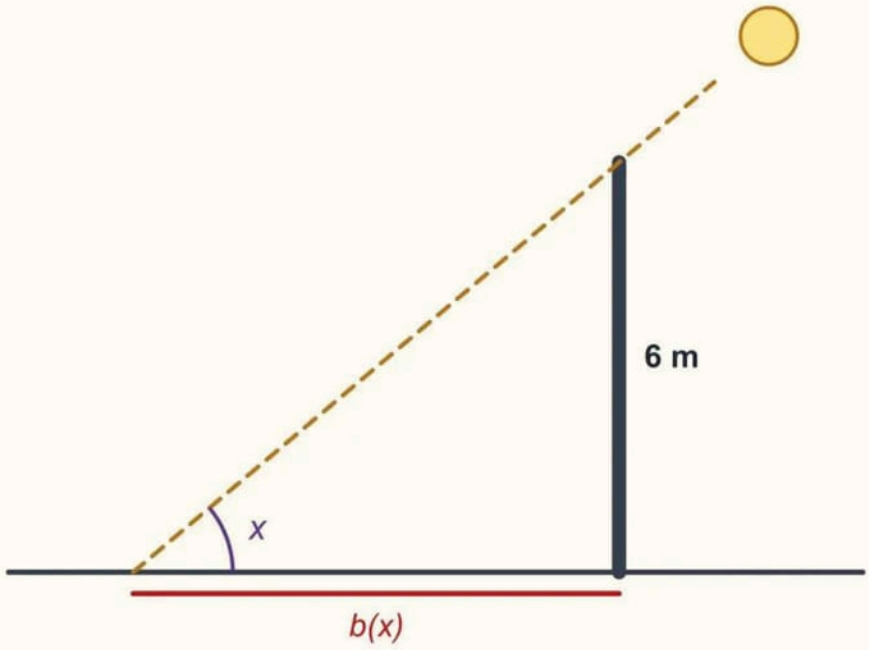
Jawaban: E.

• BEDAH SOAL PREDIKSI

Soal berikut memakai limit trigonometri pada panjang bayangan tiang. Untuk setiap pernyataan, tentukan dulu apakah sudutnya menuju 0 atau menuju $\frac{\pi}{2}$, lalu apakah bentuknya $\frac{0}{0}$ atau cukup disubstitusi.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

►. Sebuah tiang setinggi 6 m berdiri tegak di tanah datar. Ketika sudut elevasi matahari x radian ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), panjang bayangan tiang adalah $b(x) = \dfrac{6}{\tan x}$ m (lihat gambar). Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} b(x) = 6$

☐ B. $\lim\limits_{x \to 0^+} b(x) = 0$

☐ C. $\lim\limits_{x \to 0} x\, b(x) = 6$

☐ D. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{b(x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 6$

☐ E. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{b(x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = 6$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pembahasan **Kunci: A, C, D**

Konsep: fungsi kontinu cukup disubstitusi; untuk limit menuju $\frac{\pi}{2}$, misalkan $u = \frac{\pi}{2} - x$ agar sudut menuju 0, lalu pakai $\lim_{u \to 0} \frac{\tan u}{u} = 1$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — fungsi kontinu di $\frac{\pi}{4}$: $\frac{6}{1} = 6$.
- B ✗ — $\tan x \to 0^+$, jadi $b(x)$ membesar tanpa batas: bayangan sangat panjang saat matahari rendah.
- C ✓ — $\dfrac{6x}{\tan x} \to 6 \cdot 1$.
- D ✓ — misalkan $u = \frac{\pi}{2} - x$: $\tan x = \cot u$, jadi $\dfrac{6 \tan u}{u} \to 6$.
- E ✗ — dengan u yang sama: $\dfrac{6 \tan u}{u^2} = \dfrac{6 \tan u}{u} \cdot \dfrac{1}{u}$ membesar tanpa batas.

Jawaban: A, C, dan D.

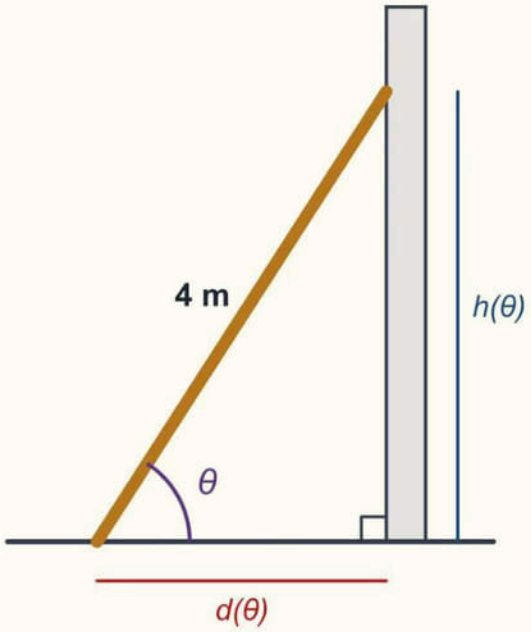
Hal yang patut dicatat dari pembahasan di atas: untuk limit menuju $\frac{\pi}{2}$, sudut digeser dengan $u = \frac{\pi}{2} - x$ sehingga $\tan x$ menjadi $\cot u$ dan rumus dasar dapat dipakai. Pernyataan 4 dan 5 hanya berbeda pangkat penyebutnya: $\frac{\tan u}{u}$ menuju 1, tetapi bila dibagi u sekali lagi nilainya membesar tanpa batas. Hasil-hasilnya juga masuk akal: saat matahari rendah, bayangan sangat panjang; saat matahari hampir tegak, bayangan hampir hilang.

✎ LATIHAN

Kerjakan tanpa melihat kunci. Untuk setiap soal, tuliskan dulu apakah sudutnya menuju 0 atau menuju bilangan lain, lalu ubah semua $1 - \cos$ sebelum menghitung. Pada soal bergambar, nyatakan setiap panjang dan luas dalam sudutnya lebih dulu.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

1. Sebuah tangga sepanjang 4 m bersandar pada dinding tegak dan membentuk sudut θ radian dengan lantai (lihat gambar). Jarak kaki tangga ke dinding $d(\theta) = 4\cos\theta$ dan tinggi ujung atas tangga $h(\theta) = 4\sin\theta$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{h(\theta)}{\theta} = 4$

☐ B. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{4 - d(\theta)}{\theta^2} = 2$

☐ C. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{4 - d(\theta)}{\theta} = 4$

☐ D. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{h(\theta)}{\theta\, d(\theta)} = 1$

☐ E. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{d(\theta)}{h(\theta)} = 1$

2. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^3}$ adalah ....

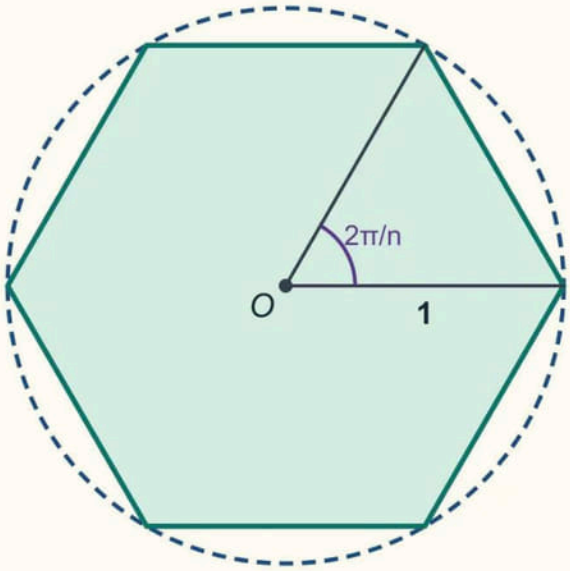
A. 0
B. 4
C. 8
D. 2
E. $\dfrac{1}{2}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{x \sin 2x}$ adalah ....

A. 2
B. -4
C. -1
D. -2
E. $-\dfrac{1}{2}$

4. Segi-n beraturan dibuat di dalam lingkaran berjari-jari 1 (gambar untuk $n = 6$).
Kelilingnya $K(n) = 2n \sin \dfrac{\pi}{n}$ dan luasnya $L(n) = \dfrac{n}{2} \sin \dfrac{2\pi}{n}$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $K(6) = 6$.
☐ B. $\lim\limits_{n \to \infty} K(n) = 2\pi$.
☐ C. $\lim\limits_{n \to \infty} K(n)$ membesar tanpa batas karena banyak sisinya bertambah terus.
☐ D. $\lim\limits_{n \to \infty} L(n) = \pi$.
☐ E. $K(n)$ selalu lebih besar daripada keliling lingkaran.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Nilai $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}$ adalah ....

A. $\dfrac{1}{4}$

B. 1

C. $\dfrac{1}{2}$

D. $-\dfrac{1}{2}$

E. limit tidak ada

Kunci singkat: 1. A, B, D 2. B 3. D 4. A, B, D 5. C

✔ PERIKSA DIRI

- Mengapa limit dasar $\sin x / x \to 1$ hanya berlaku bila x dalam radian dan menuju 0, dan apa yang kamu lakukan bila x menuju bilangan lain?
- Bagaimana kamu mengubah $1 - \cos u$, dan mengapa bentuk ini setara dengan dua faktor x?
- Pada soal rasio luas seperti SA-24, langkah apa yang membuat jari-jari "hilang", dan kapan kamu cukup menyubstitusi sudutnya?

Latihan interaktif di LMS

Sub bab 3.3: kerjakan latihannya dan lihat progresmu.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-3.3

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kuis Akhir Bab 3

MATTL-KB3

Jumlah soal: 25 **Waktu anjuran:** 60 menit

Kerjakan sendiri dan berwaktu. Setelah selesai, cocokkan dengan kunci di Bagian D, isi tabel skor, lalu lihat anjuran di bawahnya.

Kerjakan Kuis Bab 3 di LMS

Skor dan progresmu tersimpan di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-KB3

1. Sebuah persegi panjang mempunyai luas $(x^2 - 9)$ cm² dan lebar $(x - 3)$ cm, dengan $x > 3$.
Panjang persegi panjang itu untuk x yang sangat dekat dengan 3 mendekati .... cm

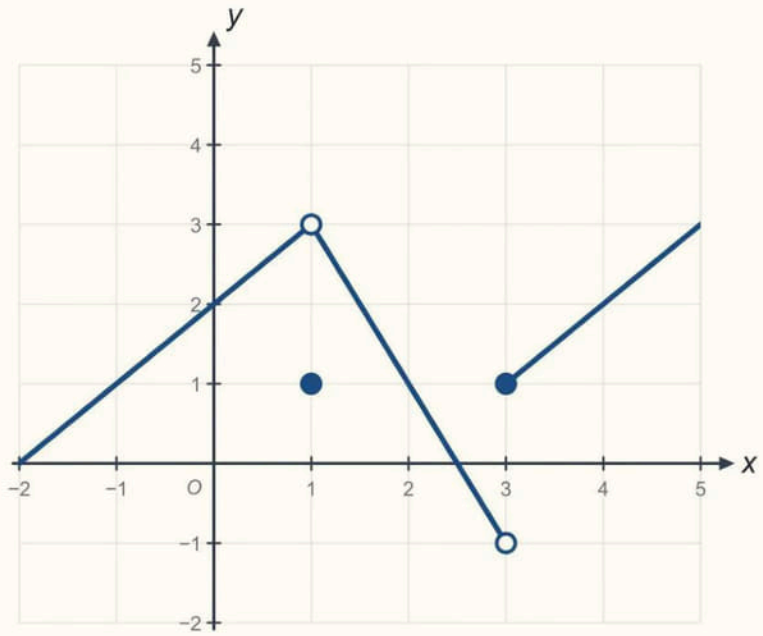
A. 0
B. 3
C. 6
D. 9
E. tidak dapat ditentukan

2. Sebuah kubus bersisi x dm dibandingkan dengan kubus bersisi 2 dm. Perbandingan selisih volume terhadap selisih luas alas kedua kubus adalah $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.
Nilai perbandingan itu untuk x mendekati 2 adalah ....

A. 3
B. 12
C. 2
D. $\frac{1}{3}$
E. 0

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Gambar berikut adalah grafik fungsi f. Bulatan kosong berarti titik itu tidak termasuk grafik, sedangkan bulatan penuh termasuk grafik.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

☐ B. $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

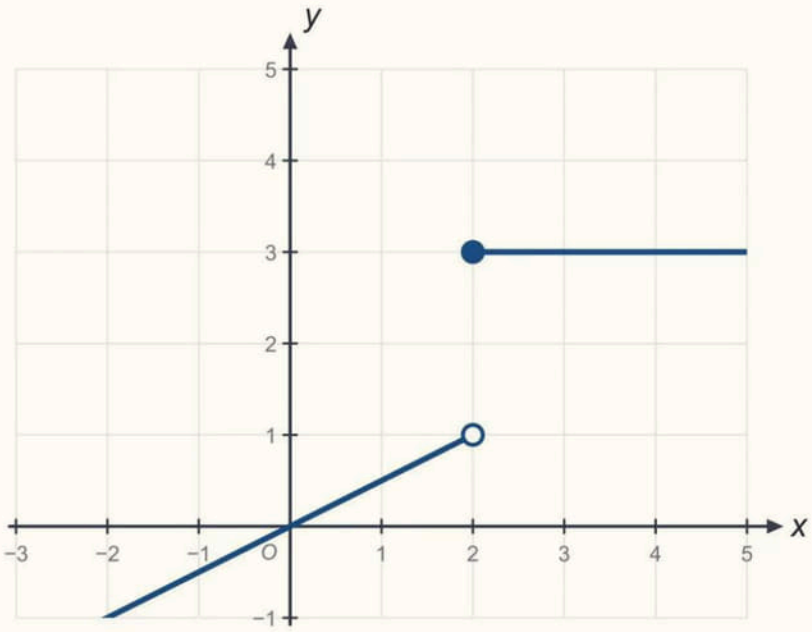
☐ C. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -1$

☐ D. $\lim_{x \to 3} f(x)$ ada

☐ E. $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

4. Gambar berikut adalah grafik fungsi bercabang g.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 1$	○	○
$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3$	○	○
$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$	○	○

5. Nilai $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3}$ adalah ....

A. $\dfrac{2}{3}$

B. $\dfrac{1}{4}$

C. limit tidak ada

D. $\dfrac{3}{2}$

E. $\dfrac{1}{6}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

6. Diketahui $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $a=1$

☐ B. $b=6$

☐ C. $a+b=-5$

☐ D. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}=\dfrac{5}{4}$

☐ E. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x+2}=\dfrac{5}{4}$

7. Nilai $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ adalah ....

A. $\dfrac{3}{2}$

B. $-\dfrac{3}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}$

D. 0

E. nilai limit tidak ada

8. Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{x+1}=2$

☐ B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\dfrac{1}{4}$

☐ C. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{3}$

☐ D. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$

☐ E. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=0$

9. Setelah x tahun, biaya perawatan total sebuah gedung sekolah dimodelkan $B(x)=6x^2-x$ juta rupiah, sedangkan dana yang terkumpul $D(x)=3x^2+5$ juta

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

rupiah.

Dalam jangka sangat panjang, perbandingan $\frac{B(x)}{D(x)}$ mendekati ....

A. 0
B. 6
C. $-\frac{1}{5}$
D. tak hingga
E. 2

10. Sebuah toko daring mencatat bahwa setelah n hari, bagian pembeli yang menulis ulasan adalah $U(n) = \frac{3n + 40}{5n + 100}$.

Dalam jangka panjang, persentase pembeli yang menulis ulasan mendekati ....

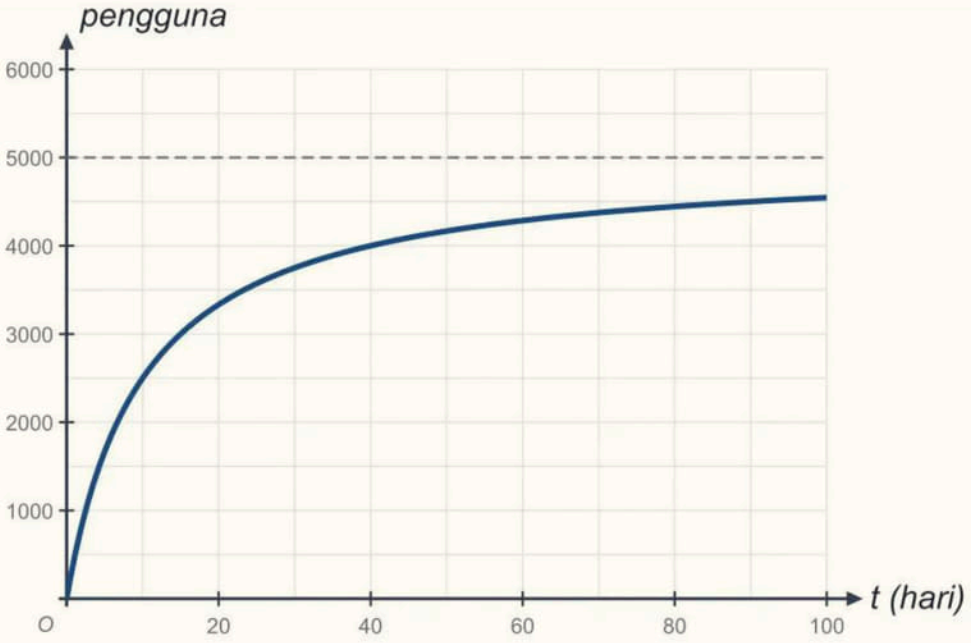
A. 60%
B. 40%
C. 30%
D. 50%
E. 100%

11. Nilai $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x + 1 \right)$ adalah ....

A. $\frac{3}{4}$
B. $-\frac{1}{4}$
C. $\frac{7}{4}$
D. $\frac{5}{2}$
E. $\frac{7}{2}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

12. Banyak pengguna sebuah aplikasi belajar setelah t hari dimodelkan $P(t) = \dfrac{5.000t}{t+10}$, dengan grafik seperti pada gambar.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Dalam jangka panjang, banyak pengguna mendekati 5.000 orang.	○	○
Pada suatu hari, banyak pengguna tepat 5.000 orang.	○	○
Pada hari ke-10, banyak pengguna 2.500 orang.	○	○

13. Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - x}{x^3 + 4} = 2$

☐ B. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2} = 1$

☐ C. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x} - x\right) = 3$

☐ D. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5 - 3x^2}{x^2 + 1} = 5$

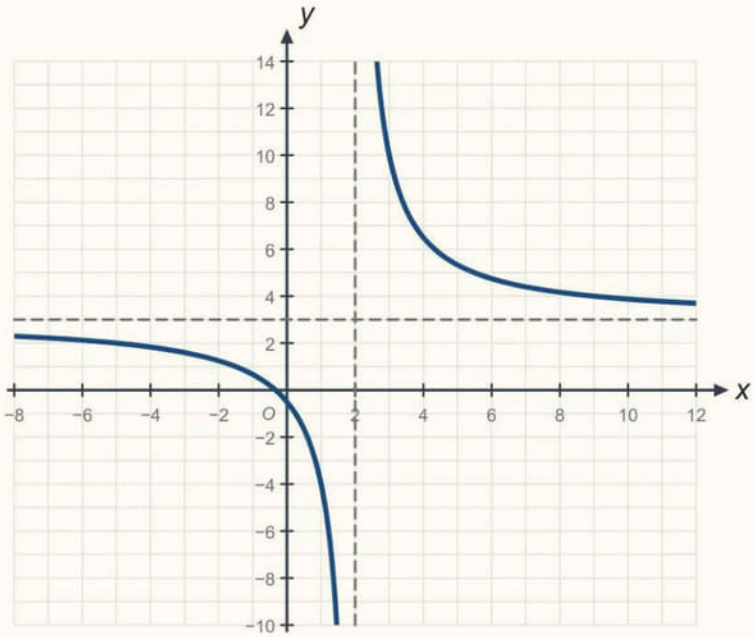
☐ E. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 + 1}}{3x - 2} = 1$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

14. Gambar berikut adalah grafik $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ beserta kedua asimtotnya (garis putus-putus).

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$

☐ B. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$

☐ C. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

☐ D. Grafik f memotong garis $y = 3$.

☐ E. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

15. Sebuah kolam penampungan berisi 100 liter air yang mengandung 5 kg garam. Mulai pukul 08.00, air laut berkadar 0,2 kg garam per liter dialirkan ke kolam itu dengan laju 10 liter per menit, dan tidak ada air yang keluar.

Bila pengaliran terus berlangsung sangat lama, kadar garam air kolam mendekati .... kg per liter

A. 0,05

B. 0,2

C. 2

D. 0,5

E. 0,02

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

16. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\tan 2x}$ adalah ....

A. $\dfrac{1}{2}$
B. 4
C. 8
D. 2
E. 1

17. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x \sin 2x}$ adalah ....

A. 2
B. 8
C. 1
D. 16
E. 4

18. Nilai $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ adalah ....

A. -1
B. 1
C. 0
D. $\dfrac{\pi}{2}$
E. tidak ada

19. Diketahui $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax \tan x}{1 - \cos bx} = 4$ dengan $a, b \neq 0$.
Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(4, 2)$
☐ B. $(2, 1)$
☐ C. $(1, 2)$
☐ D. $(8, 2)$
☐ E. $(2, -1)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

20. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$ adalah ....

A. $\dfrac{1}{3}$

B. 1

C. $\dfrac{1}{4}$

D. $\dfrac{1}{2}$

E. $-\dfrac{1}{4}$

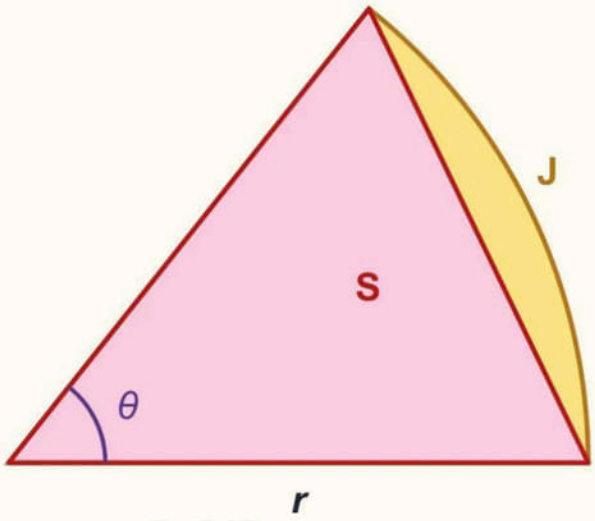
NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

21. Sepotong kue berbentuk juring lingkaran berjari-jari r dengan sudut pusat θ radian. Segitiga S dibentuk oleh kedua sisi lurus potongan dan tali busurnya, sedangkan J adalah luas juring (lihat gambar).

Pernyataan yang benar tentang perbandingan $\frac{S}{J}$ adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Untuk $\theta \to \pi$, perbandingan $\frac{S}{J}$ mendekati 1.

☐ B. Nilai $\frac{S}{J}$ tidak bergantung pada r.

☐ C. Untuk $\theta \to 0$, perbandingan $\frac{S}{J}$ mendekati 1.

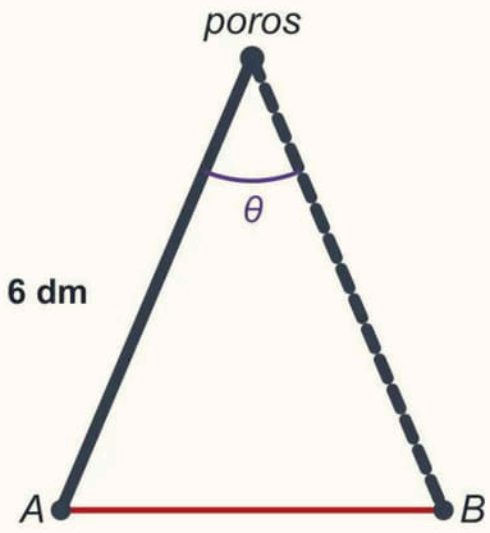
☐ D. Untuk $0 < \theta < \pi$, nilai $\frac{S}{J}$ selalu lebih dari 1.

☐ E. Untuk $\theta \to \frac{\pi}{2}$, perbandingan $\frac{S}{J}$ mendekati $\frac{2}{\pi}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

22. Lengan robot sepanjang 6 dm berputar pada porosnya sebesar θ radian, dari posisi A ke posisi B. Jarak lurus antara kedua posisi ujung lengan adalah $AB = 12\sin\dfrac{\theta}{2}$ dm.

Nilai $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{AB}{\theta}$ adalah ....



A. 12
B. 6
C. 3
D. 1
E. 0

23. Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

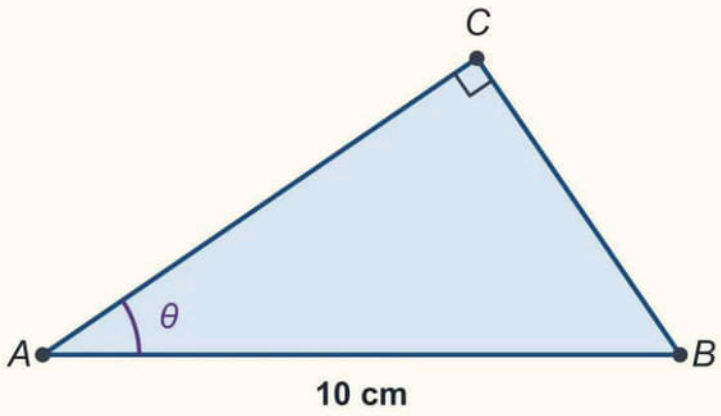
Pernyataan	Benar	Salah
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = 3$	○	○
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 1$	○	○
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{x^2} = 1$	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

24. Papan kayu berbentuk segitiga ABC siku-siku di C dengan sisi miring $AB = 10$ cm dan $\angle A = \theta$ (lihat gambar). Luas papan $L(\theta) = 25 \sin 2\theta$ cm^2 dan kelilingnya $K(\theta) = 10 + 10\cos\theta + 10\sin\theta$ cm.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{L(\theta)}{\theta} = 50$

☐ B. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{L(\theta)}{\theta^2} = 50$

☐ C. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} L(\theta) = 25$

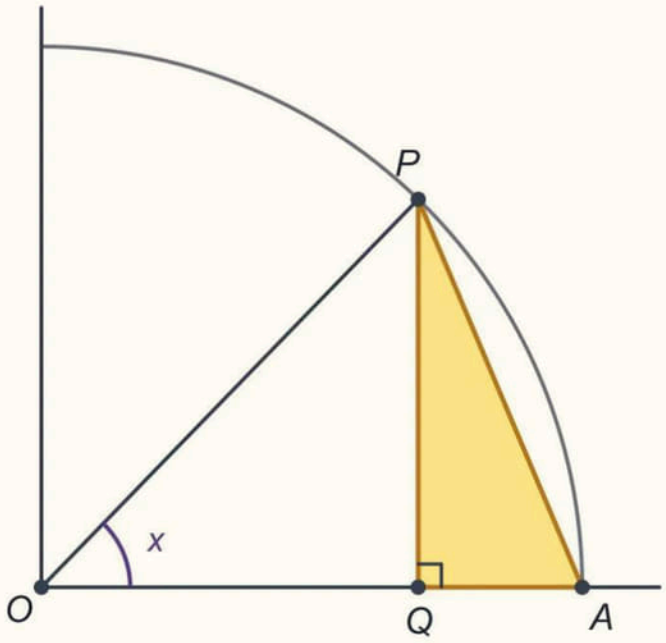
☐ D. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} L(\theta) = 25$

☐ E. $\lim\limits_{\theta \to 0} K(\theta) = 20$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

25. Sebuah roda berjari-jari 1 m berputar sehingga titik P pada tepinya membentuk sudut x radian terhadap jari-jari OA. Titik Q adalah kaki tegak lurus dari P ke OA (lihat gambar). Luas segitiga PQA dinyatakan $T(x)$.

Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{T(x)}{x^3}$ adalah ....



A. $\dfrac{1}{2}$

B. 1

C. membesar tanpa batas

D. $\dfrac{1}{4}$

E. $\dfrac{1}{8}$

Tabel skor dan anjuran

Sub bab / subtopik	Nomor soal	Benar	Jika kurang separuh benar
Sub bab 3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	___ / 8	Ulangi hlm. 318
Sub bab 3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks	9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	___ / 7	Ulangi hlm. 333
Sub bab 3.3 · Limit fungsi trigonometri	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25	___ / 10	Ulangi hlm. 348

Skor 70 % atau lebih: lanjut ke bab berikutnya. Skor 50–69 %: ulangi sub bab pada tabel yang kurang dari separuh benar. Skor di bawah 50 %: baca ulang bab ini dari awal. (Angka ini anjuran belajar, bukan prediksi nilai TKA.)

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bagian C · Simulasi TKA

Kerjakan setelah semua bab selesai. Simulasi 1 memakai soal asli TKA 2025; simulasi berikutnya adalah paket prediksi. Kerjakan tiap simulasi dalam sekali duduk sesuai waktunya, tanpa membuka materi.

Daftar simulasi

Simulasi	Jumlah soal	Waktu	Kode LMS
Simulasi 1 — Soal Asli TKA 2025	25 soal	60 menit	MATTL-FIN1
Simulasi 2 — Prediksi TKA 2026	25 soal	60 menit	MATTL-FIN2
Simulasi 3 — Prediksi TKA 2026	25 soal	60 menit	MATTL-FIN3
Simulasi 4 — Prediksi TKA 2026	25 soal	60 menit	MATTL-FIN4

Saran: beri jeda beberapa hari antarsimulasi. Setelah tiap simulasi, cocokkan jawaban di Bagian D lalu ulangi sub bab yang ditunjuk tabel anjuran sebelum mengerjakan simulasi berikutnya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Simulasi 1 — Soal Asli TKA 2025

MATTL-FIN1

Petunjuk

Jumlah soal: 25. Waktu: 60 menit.

Kerjakan sekaligus tanpa membuka materi. Tandai jawaban pada lembar jawaban. Kunci dan pembahasan ada di Bagian D; hitung skor dan lihat tabel anjuran di akhir paket.

Kerjakan Simulasi 1 di LMS

Hasil dan analisis per sub bab tersimpan di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-FIN1

1. Perhatikan matriks berikut!

$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Invers dari matriks F adalah ....

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Diketahui suku banyak $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x - 6$. Apabila $f(x)$ dibagi oleh $x^2 + x + 1$, sisanya $5x - 1$. Nilai dari $a + b = \ldots$

A. 11

B. 5

C. -1

D. -5

E. -7

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Di manakah koordinat titik potong grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ terhadap sumbu X?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(-2, 0)$
☐ B. $(-1, 0)$
☐ C. $(3, 0)$
☐ D. $(4, 0)$
☐ E. $(5, 0)$

4. Sebuah pabrik minuman tradisional memproduksi tiga jenis minuman, yaitu wedang jahe (WJ), beras kencur (BK), dan kunir asem (KA). Dalam proses produksinya digunakan tiga bahan utama, yaitu jahe (J) dalam gram, gula merah (GM) dalam gram, dan air (A) dalam mililiter. Setiap botol minuman memerlukan bahan sebagai berikut (baris: WJ, BK, KA; kolom: J, GM, A).

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 50 \\ 10 & 25 & 40 \\ 12 & 8 & k \end{bmatrix}$$

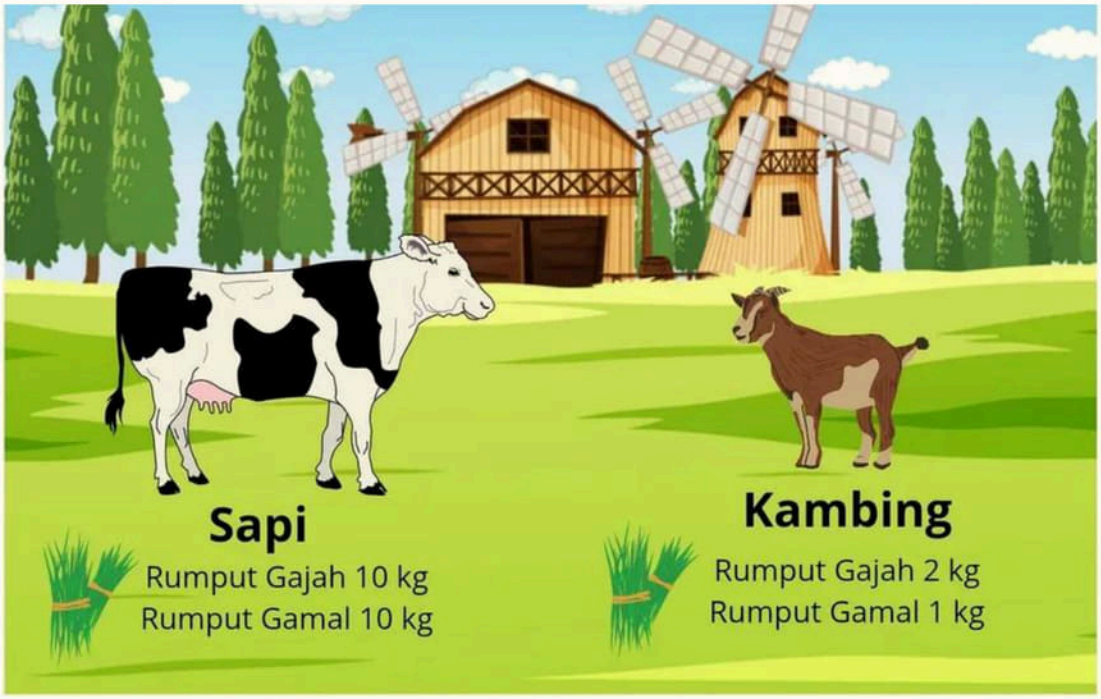
Pada suatu hari pabrik tersebut menerima pesanan WJ, BK, dan KA berturut-turut 100, 120, dan 80 botol, ditulis $P = \begin{bmatrix} 100 & 120 & 80 \end{bmatrix}$.
Jumlah bahan baku yang digunakan untuk seluruh pesanan adalah J $= 4.160$ gram, GM $= 5.140$ gram, dan A $= 13.000$ ml.
Banyak air yang dibutuhkan untuk memproduksi satu botol kunir asem adalah ....

A. 30 ml
B. 35 ml
C. 40 ml
D. 45 ml
E. 50 ml

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Pak Andi memiliki beberapa sapi dan kambing. Semua hewan ternaknya selalu diberi pakan berupa campuran rumput gajah dan rumput gamal. Setiap hari, ia selalu menyediakan 38 kg rumput gajah dan 34 kg rumput gamal untuk seluruh kambing dan sapi miliknya (tanpa sisa). Kebutuhan pakan setiap ekor ternak milik Pak Andi per hari ditunjukkan pada gambar.

Jika banyak sapi dan kambing yang dipelihara Pak Andi berturut-turut adalah x dan y, maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \ldots$



A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

6. Seorang pemilik hotel mengelola 3 hotel yang berada di kota yang berbeda. Ketiga hotel memiliki konsep dan tipe kamar yang sama, yaitu *Standard Room*, *Deluxe Room*, dan *Suite Room*, dengan kapasitas dan harga per malam seperti pada gambar.
Pemilik hotel akan menghitung pendapatan ketiga hotel tersebut. Bagaimana kondisi pendapatan ketiga hotel dalam 1 hari jika semua tipe kamar terisi penuh?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



KAPASITAS KAMAR HOTEL

TIPE KAMAR	HOTEL A	HOTEL B	HOTEL C	Harga (per malam)
Standard Room	9	6	7	Rp 150.000
Deluxe Room	6	7	5	Rp 500.000
Suite Room	3	2	4	Rp 1.000.000

Pilih semua jawaban yang benar.

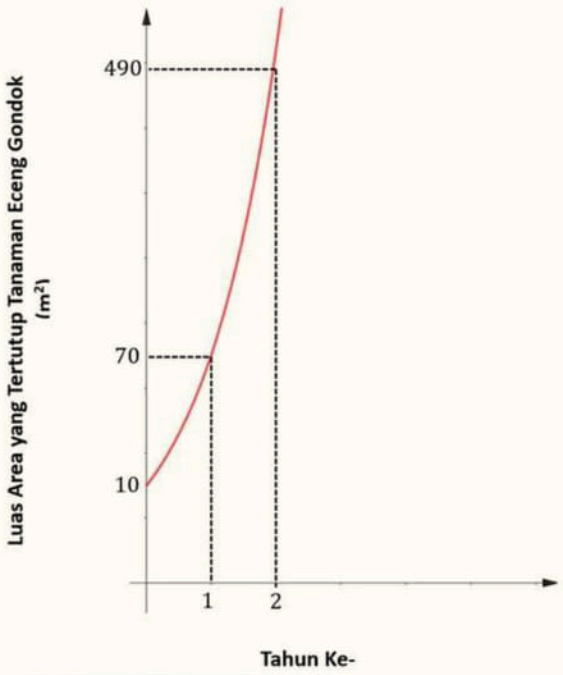
☐ A. Pendapatan Hotel A dan Hotel C sama besar.
☐ B. Pendapatan Hotel B lebih besar daripada Hotel A.
☐ C. Pendapatan paling besar diperoleh dari Hotel C.
☐ D. Masing-masing hotel memiliki selisih pendapatan yang sama besar.
☐ E. Pendapatan yang diperoleh dari ketiga hotel tersebut lebih dari Rp20.000.000,00.

7. Seorang peneliti lingkungan mengamati pertumbuhan tanaman eceng gondok di beberapa danau di sekitar wilayah X selama 3 tahun. Hasilnya menunjukkan bahwa pertumbuhan luas area yang tertutup eceng gondok dapat dimodelkan dengan fungsi eksponensial yang grafiknya seperti pada gambar (sumbu mendatar: tahun ke-; sumbu tegak: luas area dalam m^2).
Setelah 3 tahun pengamatan, peneliti mencatat luas area yang tertutup eceng gondok di beberapa wilayah perairan sebagai berikut.

Wilayah Perairan	Luas Area Tertutup Eceng Gondok (m^2)
Danau A	15.000
Danau B	16.500
Danau C	17.000
Danau D	17.500
Danau E	18.000

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Dengan pola pertumbuhan yang sama, wilayah perairan manakah yang luas area tertutup eceng gondoknya **lebih dari 49 m²** pada awal pengamatan?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Danau A
☐ B. Danau B
☐ C. Danau C
☐ D. Danau D
☐ E. Danau E

8. Sebuah drum bahan bakar logam mengalami penambahan volume saat terkena panas, yang dinyatakan dengan fungsi
$V(T) = 0{,}05T^3 + 0{,}4T^2 + 20T$
dengan T adalah suhu dalam derajat Celsius dan $V(T)$ adalah penambahan volume dalam liter.
Apabila terdapat 10 drum dengan jenis dan ukuran yang sama, total penambahan volume drum-drum tersebut ketika terkena panas dengan suhu yang sama dapat dinyatakan dengan ....

A. $50T^3 + 40T^2 + 200T$
B. $50T^3 + 4T^2 + 200T$
C. $5T^3 + 4T^2 + 200T$
D. $0{,}5T^3 + 4T^2 + 200T$
E. $0{,}5T^3 + 0{,}4T^2 + 200T$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

9. Sebuah perusahaan menawarkan saham kepada pembeli. Perusahaan menyiapkan modal saham yang akan dijual dan dapat dinyatakan sebagai fungsi
$f(x) = x^3 - 70x^2 - 600x + 74.000$
dengan nilai $f(x)$ dalam jutaan rupiah dan x menyatakan banyak saham dalam satuan unit. Modal saham yang dimiliki perusahaan tersebut adalah 2 miliar rupiah (2.000 juta). Tentukan **Benar** atau **Salah**: perusahaan **mungkin** menjual sejumlah unit saham berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
30 unit saham	○	○
40 unit saham	○	○
60 unit saham	○	○

10. Populasi kelinci di suatu pulau dimodelkan dengan fungsi eksponensial
$K(t) = 4 \cdot 2^{t/4}$
dengan t menyatakan waktu dalam tahun dan $K(t)$ menyatakan populasi dalam ribu ekor. Bagaimana interpretasi yang tepat mengenai model populasi kelinci tersebut? Tentukan **Benar** atau **Salah** untuk setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Setiap 4 tahun populasi bertambah menjadi 4 kalinya.	○	○
Pada saat awal populasi kelinci berjumlah 4 ribu ekor.	○	○
Populasi mencapai 1 juta ekor sebelum 20 tahun dari awal pengamatan.	○	○

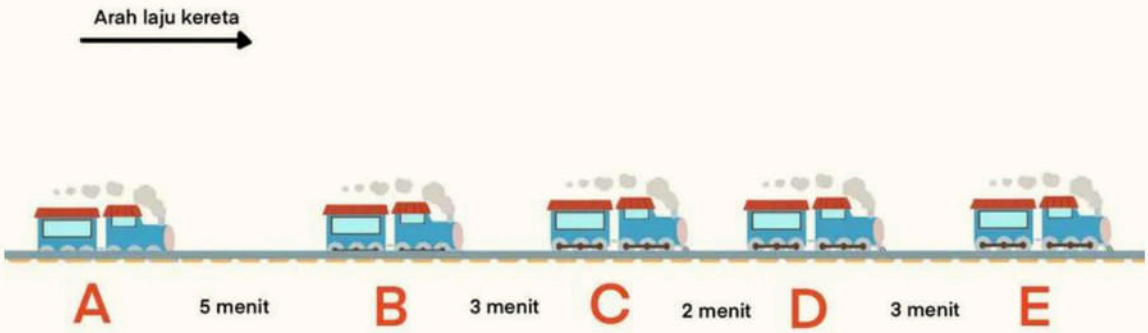
11. Diketahui trapesium sama kaki $ABCD$ dengan $AD = BC$ dan titik $A(0, 0)$. Vektor-vektor pembentuk trapesium adalah $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\vec{BC} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Nilai dari $a^2 + 2b = \ldots$

A. 5
B. 7
C. 9
D. 10
E. 13

12. Sebuah kereta api melaju dengan kecepatan konstan pada lintasan lurus dari stasiun A sampai stasiun E. Koordinat stasiun A dan E (dalam km) berturut-turut adalah $(2, 3, 5)$ dan $(11, 6, 8)$. Gambar menunjukkan waktu tempuh (dalam menit) kereta tersebut antarstasiun.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pasangan stasiun manakah yang jaraknya kurang dari 3,5 km?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. AB
☐ B. BC
☐ C. CD
☐ D. DE
☐ E. CE

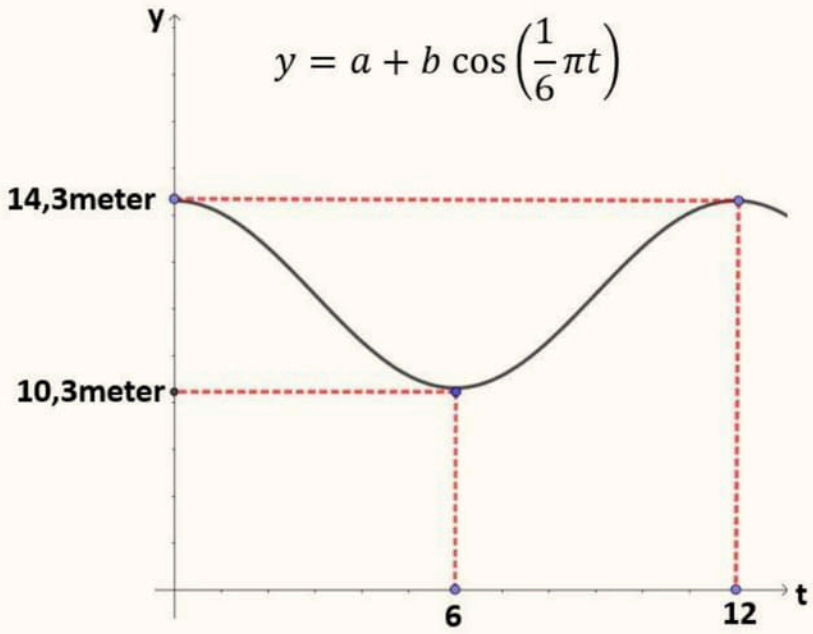
NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

13. Grafik berikut menyatakan perubahan kedalaman air laut di sebuah teluk, dengan model $y = a + b\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$.

Pada grafik tersebut, y menyatakan kedalaman air laut dalam meter, t dalam jam, serta a dan b adalah konstanta. Nilai $t = 6$ menyatakan 6 jam setelah pukul 00.00, demikian pula untuk nilai t lainnya.

Waktu saat kedalaman air laut mencapai 12,3 meter untuk ketiga kalinya setelah pukul 00.00 adalah ....



A. 3 jam
B. 9 jam
C. 10 jam
D. 12 jam
E. 15 jam

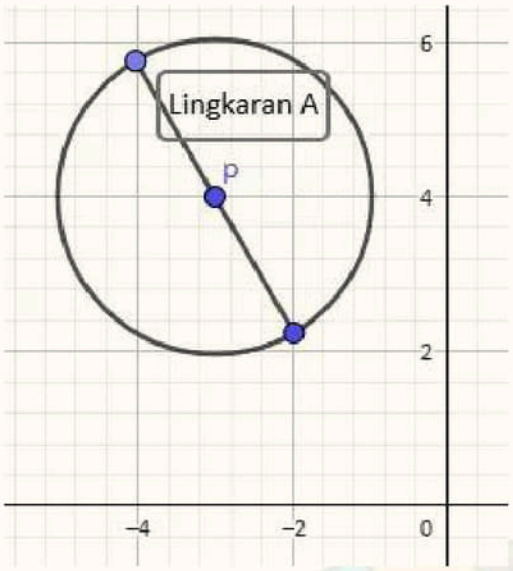
14. Diketahui vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2m \\ m+3 \\ m \end{pmatrix}$.

Jika $|\vec{AB}| = 9$ satuan panjang, maka nilai m yang memenuhi adalah ....

A. -4 atau -3
B. -4 atau 3
C. -3 atau 4
D. 3 atau 4
E. 4 atau -4

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

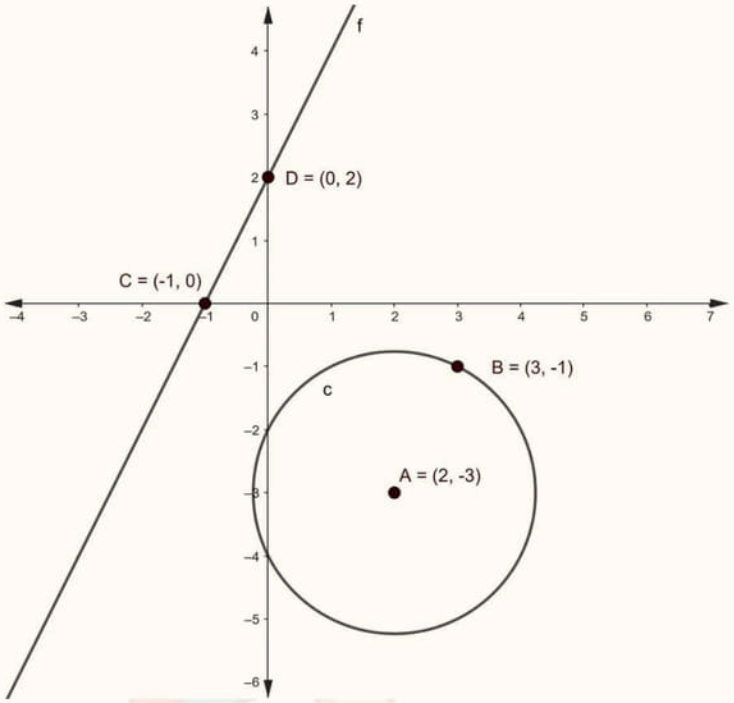
15. Perhatikan gambar lingkaran berikut.
Diameter lingkaran pada gambar adalah 4 satuan. Persamaan lingkaran yang **sepusat** dengan lingkaran pada gambar adalah ....



A. $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$
B. $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$
C. $x^2 + 6x + y^2 + 8y + 16 = 0$
D. $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 16 = 0$
E. $x^2 + 8x + y^2 - 6y + 21 = 0$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

16. Perhatikan gambar berikut. Lingkaran c berpusat di $A(2,-3)$ dan melalui $B(3,-1)$, sedangkan garis f melalui $C(-1,0)$ dan $D(0,2)$.
Tentukan semua koordinat titik singgung dari garis-garis singgung lingkaran yang **tegak lurus** terhadap garis f!
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(3,1)$
☐ B. $(1,-5)$
☐ C. $(-1,5)$
☐ D. $(3,-1)$
☐ E. $(-3,-1)$

17. Garis $ax+y-9=0$ dan $x+by+6=0$ dicerminkan terhadap garis $y=x$, kemudian dilanjutkan translasi $T=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Bayangannya berturut-turut adalah $x+2y-8=0$ dan $2x-y-9=0$.
Nilai dari $2a-b=\ldots$

A. -6
B. -2
C. 0
D. 2
E. 6

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

18. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{5 + 3x - 9x^2} = \ldots$

A. $-\dfrac{7}{67}$

B. $-\dfrac{6}{67}$

C. $\dfrac{6}{76}$

D. $\dfrac{7}{67}$

E. $\dfrac{7}{76}$

19. Roni, penjual nasi goreng, menjual dagangannya sebanyak p porsi dan memperoleh keuntungan (dalam jutaan rupiah) yang dinyatakan dengan fungsi

$$K(p) = \frac{9p^2 + 2p + 10}{3p^2 + 3p + 2}$$

Keuntungan yang akan diperoleh Roni apabila ia menjual nasi goreng dengan porsi sangat banyak adalah ....

A. Rp2.000.000,00

B. Rp3.000.000,00

C. Rp5.000.000,00

D. Rp9.000.000,00

E. Rp10.000.000,00

20. Garis l merupakan bayangan garis $3x + 2y = 6$ yang dirotasikan sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi $(2, 0)$.
Manakah koordinat titik yang terletak pada garis l?
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(-3, -2)$

☐ B. $(-2, -1)$

☐ C. $(1, 2)$

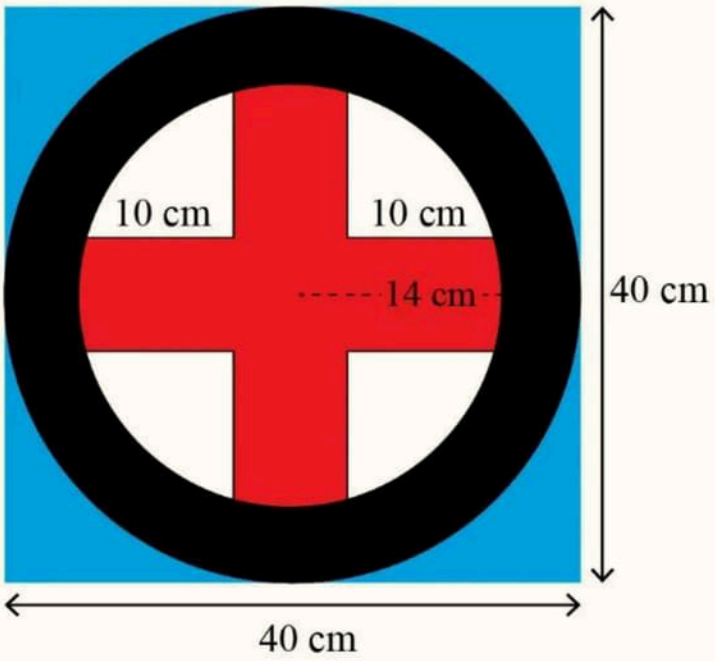
☐ D. $(2, 0)$

☐ E. $(5, 2)$

21. Sebuah rumah makan memasang gambar yang mirip rambu lalu lintas "balai pertolongan pertama", tetapi tidak sama persis. Rambu ini biasanya memberi informasi lokasi pelayanan kesehatan terdekat. Rumah makan memasangnya sebagai candaan: bila pelanggan kelaparan, segera merapat untuk mendapatkan "pertolongan pertama". Rambu berbentuk persegi biru berukuran 40 cm × 40 cm, lingkaran hitam menyinggung sisi persegi, lingkaran putih di dalamnya berjari-jari 14 cm, dan tanda tambah merah

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

memiliki lebar lengan 10 cm (lihat gambar).
Pemilik ingin membuat rambu tersebut dalam jumlah banyak untuk cabang baru, dengan cat yang dibeli dalam ukuran yang sama. Cat warna apakah yang **lebih banyak** digunakan dibanding cat warna hitam? (Gunakan $\pi = 3{,}14$.)
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Setengah hitam dan biru.
☐ B. Setengah hitam dan merah.
☐ C. Setengah hitam dan putih.
☐ D. Biru dan putih.
☐ E. Biru dan merah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

22. Lingkaran L_1 memiliki pusat di $(-5, 3)$ dan jari-jari 2. Lingkaran L_2 adalah bayangan dari L_1 setelah dilakukan translasi T. Lingkaran L_3 dengan persamaan $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$ adalah bayangan dari L_2 setelah dilakukan dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala tertentu.
Pernyataan yang benar mengenai translasi T dan faktor skala dilatasi tersebut adalah ....

A. $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 8

B. $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 4

C. $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 2

D. $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 2

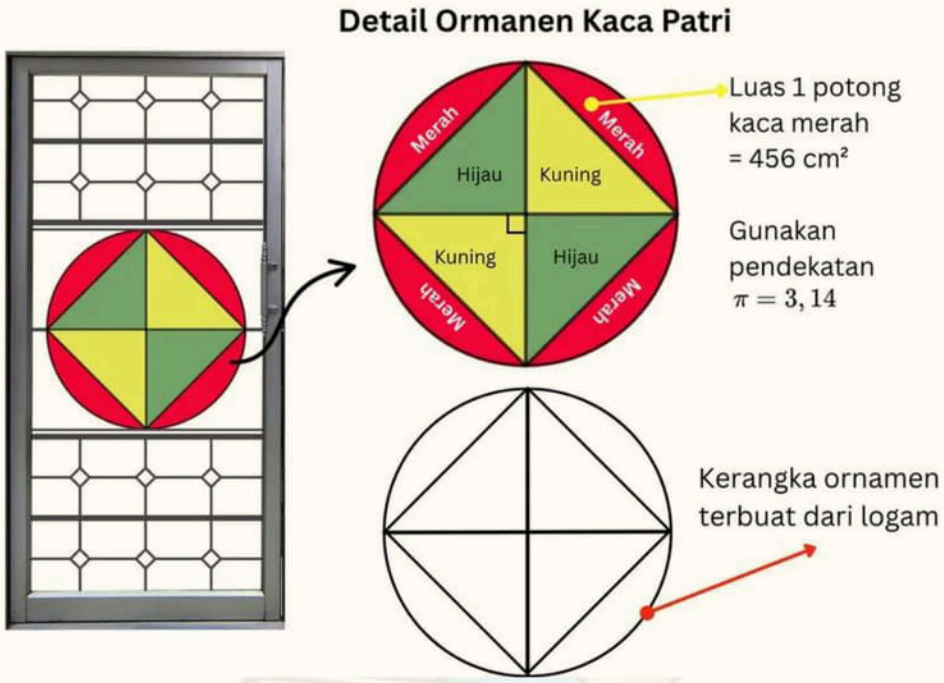
E. $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan faktor skala dilatasi 8

23. Pak Baskara akan membuat daun pintu dengan ornamen kaca patri berbentuk bulat di tengahnya. Detail daun pintu ditunjukkan pada gambar. Luas 1 potong kaca merah $= 456$ cm^2; gunakan $\pi = 3{,}14$ dan $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.
Kerangka ornamen (lingkaran, persegi di dalamnya, dan dua diagonal persegi) terbuat dari logam untuk menempelkan potongan-potongan kaca patri. Pak Baskara ingin memilih logam yang **pas**, yaitu cukup untuk membuat kerangka dan sisanya tidak lebih dari 1 m.
Pilihan logam yang tersedia:

Jenis Logam	Logam A	Logam B	Logam C
Panjang satuan	4 m	5 m	6,5 m

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tentukan **Benar** atau **Salah**: pilihan berikut **pas** untuk Pak Baskara.



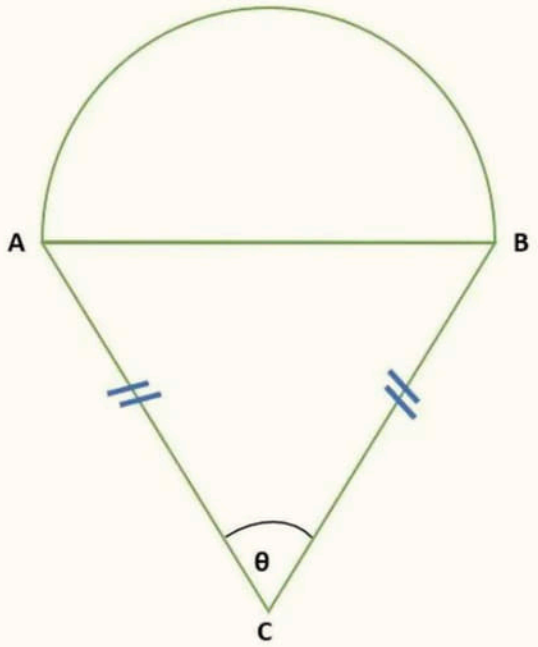
Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Membeli 2 buah logam A.	○	○
Membeli 1 buah logam B.	○	○
Membeli 1 buah logam C.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

24. Sebuah setengah lingkaran dengan diameter AB terletak pada segitiga sama kaki ABC ($AC = BC$) dan memiliki panjang 2π, sehingga membentuk daerah berbentuk "kerucut es krim" seperti pada gambar. Sudut puncak segitiga di titik C adalah θ.
Jika luas segitiga ABC dinyatakan dengan X dan luas setengah lingkaran dinyatakan dengan Y, manakah pernyataan yang benar tentang nilai $\lim_{\theta \to a} \frac{X}{Y}$?

(Pilih semua jawaban benar.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Besar jari-jari memengaruhi nilai limit.

☐ B. Besar sudut tidak memengaruhi nilai limit.

☐ C. Nilai $\frac{X}{Y}$ selalu sama untuk berapa pun θ.

☐ D. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \frac{X}{Y} = \frac{2}{\pi}$

☐ E. Jika $\theta \to \pi$, maka $\frac{X}{Y} \to 0$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

25. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1 - \cos(6x - 18)}{\left(x - \frac{9}{x}\right)\sin(6x - 18)} = \ldots$

A. $-\dfrac{3}{2}$

B. $-\dfrac{2}{3}$

C. 0

D. $\dfrac{2}{3}$

E. $\dfrac{3}{2}$

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Lembar jawaban

No	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3					
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6					
7					
8	○	○	○	○	○
9					

No	A	B	C	D	E
10					
11	○	○	○	○	○
12					
13	○	○	○	○	○
14	○	○	○	○	○
15	○	○	○	○	○
16					
17	○	○	○	○	○
18	○	○	○	○	○

No	A	B	C	D	E
19	○	○	○	○	○
20					
21					
22	○	○	○	○	○
23					
24					
25	○	○	○	○	○

Soal PG kompleks / Benar–Salah (nomor 3, 6, 7, 9, 10, 12, 16, 20, 21, 23, 24): jawab langsung pada soalnya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tabel skor dan anjuran

Sub bab / subtopik	Nomor soal	Benar	Jika kurang separuh benar
Sub bab 1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks	4, 6	___ / 2	Ulangi hlm. 8
Sub bab 1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3	1	___ / 1	Ulangi hlm. 25
Sub bab 1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks	5	___ / 1	Ulangi hlm. 39
Sub bab 1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa	2, 8	___ / 2	Ulangi hlm. 77
Sub bab 1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial	3, 9	___ / 2	Ulangi hlm. 94
Sub bab 1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks	7, 10	___ / 2	Ulangi hlm. 128
Sub bab 1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri	13	___ / 1	Ulangi hlm. 147
Sub bab 2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan	11, 12, 14	___ / 3	Ulangi hlm. 180
Sub bab 2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis	15	___ / 1	Ulangi hlm. 214
Sub bab 2.4 · Garis singgung lingkaran	16	___ / 1	Ulangi hlm. 229
Sub bab 2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran	21, 23	___ / 2	Ulangi hlm. 248
Sub bab 2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi	20, 22	___ / 2	Ulangi hlm. 268
Sub bab 2.7 · Matriks transformasi dan komposisi	17	___ / 1	Ulangi hlm. 288
Sub bab 3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik	18	___ / 1	Ulangi hlm. 318
Sub bab 3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks	19	___ / 1	Ulangi hlm. 333
Sub bab 3.3 · Limit fungsi trigonometri	24, 25	___ / 2	Ulangi hlm. 348

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Simulasi 2 — Prediksi TKA 2026

MATTL-FIN2

Petunjuk

Jumlah soal: 25. Waktu: 60 menit.

Kerjakan sekaligus tanpa membuka materi. Tandai jawaban pada lembar jawaban. Kunci dan pembahasan ada di Bagian D; hitung skor dan lihat tabel anjuran di akhir paket.

Kerjakan Simulasi 2 di LMS

Hasil dan analisis per sub bab tersimpan di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-FIN2

1. Sebuah konveksi menerima pesanan seragam dari tiga sekolah. Banyak seragam setiap ukuran dan kebutuhan bahan per seragam dicatat sebagai berikut.

Pesanan	Ukuran S	Ukuran L
Sekolah X	50	30
Sekolah Y	40	60
Sekolah Z	20	20

Per seragam	Kain (m)	Kancing (buah)
Ukuran S	1,2	6
Ukuran L	1,5	7

Kedua tabel ditulis sebagai matriks P (3 × 2) dan B (2 × 2), lalu dihitung $K = PB$. Jumlah semua unsur kolom pertama matriks K, yaitu total kain yang diperlukan, adalah ....

A. 138 m
B. 1.430 m
C. 264 m
D. 297 m
E. 330 m

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Penjualan harian tiga gerai minuman (dalam gelas) dicatat dalam tabel berikut.

Gerai	Kopi susu	Americano	Teh
A	40	25	30
B	35	40	20
C	50	30	10

Tabel itu ditulis sebagai matriks S. Harga jual per gelas $h = \begin{bmatrix} 20 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix}$ dan modal per gelas $m = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ (ribu rupiah), dengan urutan kopi susu, americano, teh.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Pendapatan harian gerai C lebih besar daripada gerai B.

☐ B. Laba harian gerai B paling besar di antara ketiga gerai.

☐ C. Laba harian ketiga gerai dapat dihitung sebagai $S(h - m)$.

☐ D. Laba harian gerai A adalah Rp1.610.000.

☐ E. Total laba harian ketiga gerai adalah Rp3.120.000.

3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ dan I matriks identitas berordo 2 × 2.

Matriks A^{2026} sama dengan ....

A. I

B. A

C. $-I$

D. $2026A$

E. O

4. Jumlah umur ayah, ibu, dan seorang anak sekarang 82 tahun. Ayah 4 tahun lebih tua daripada ibu. Lima tahun yang lalu, umur ibu 4 kali umur anak.

Umur ayah lima tahun yang akan datang adalah ....

A. 37 tahun

B. 42 tahun

C. 38 tahun

D. 33 tahun

E. 17 tahun

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Suku banyak $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ jika dibagi $x^2 - 3x + 2$ bersisa $2x + 5$. Sisa pembagian $P(x)$ oleh $(x + 1)$ adalah ....

A. 3
B. 11
C. -9
D. 9
E. -3

6. Sebuah lahan berbentuk persegi panjang berukuran $(2x + 3)$ m × $(x + 1)$ m. Di dalamnya dibuat kolam berbentuk persegi bersisi x m, dan sisa lahan ditanami rumput. Untuk $x = 4$, luas daerah berumput adalah .... m^2

A. 55
B. 16
C. 39
D. 71
E. 51

7. Diketahui suku banyak $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(2x - 1)$ adalah faktor $f(x)$.
☐ B. Grafik f memotong sumbu X di titik $(-3, 0)$.
☐ C. Jumlah ketiga akar $f(x) = 0$ adalah $\frac{3}{2}$.
☐ D. $f(x) < 0$ untuk $\frac{1}{2} < x < 3$.
☐ E. Hasil kali ketiga akar $f(x) = 0$ adalah 3.

8. Suku banyak $f(x)$ berderajat tiga dengan koefisien x^3 sama dengan 1 mempunyai akar-akar -1, 2, dan 4.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
$f(0) = 8$.	○	○
Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x - 2)$ adalah 0.	○	○
$f(3) > 0$.	○	○

9. Banyak bakteri dalam sebuah percobaan laboratorium t jam setelah pengamatan dimulai dimodelkan $N(t) = 500 \cdot 3^{t/2}$.

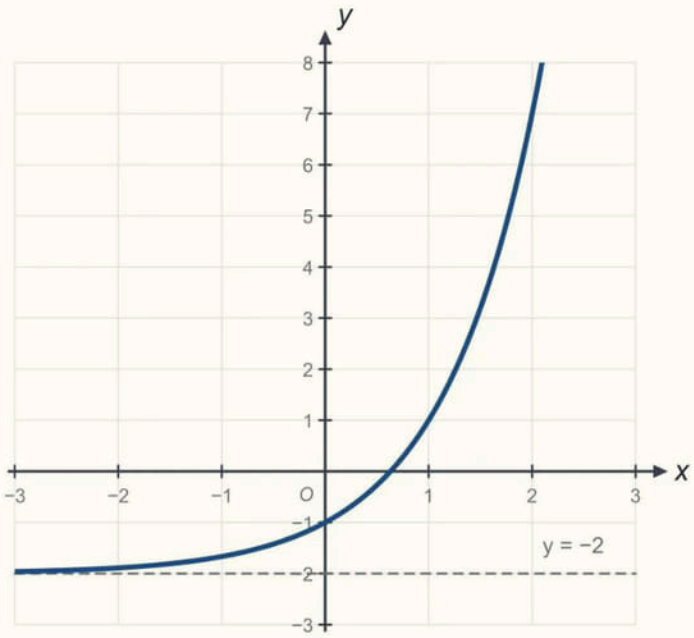
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Banyak bakteri menjadi 3 kali lipat setiap jam sejak pengamatan dimulai.
☐ B. Setelah 4 jam, banyak bakteri 4.500.
☐ C. Banyak bakteri mencapai 40.500 setelah 8 jam.
☐ D. Setelah 1 jam, banyak bakteri 750, yaitu bertambah setengah dari banyak awal.
☐ E. Waktu agar banyak bakteri menjadi N adalah $t = 2\log_3 \dfrac{N}{500}$ jam.

10. Gambar berikut adalah grafik $y = 3^x - 2$; garis putus-putus adalah asimtotnya. Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

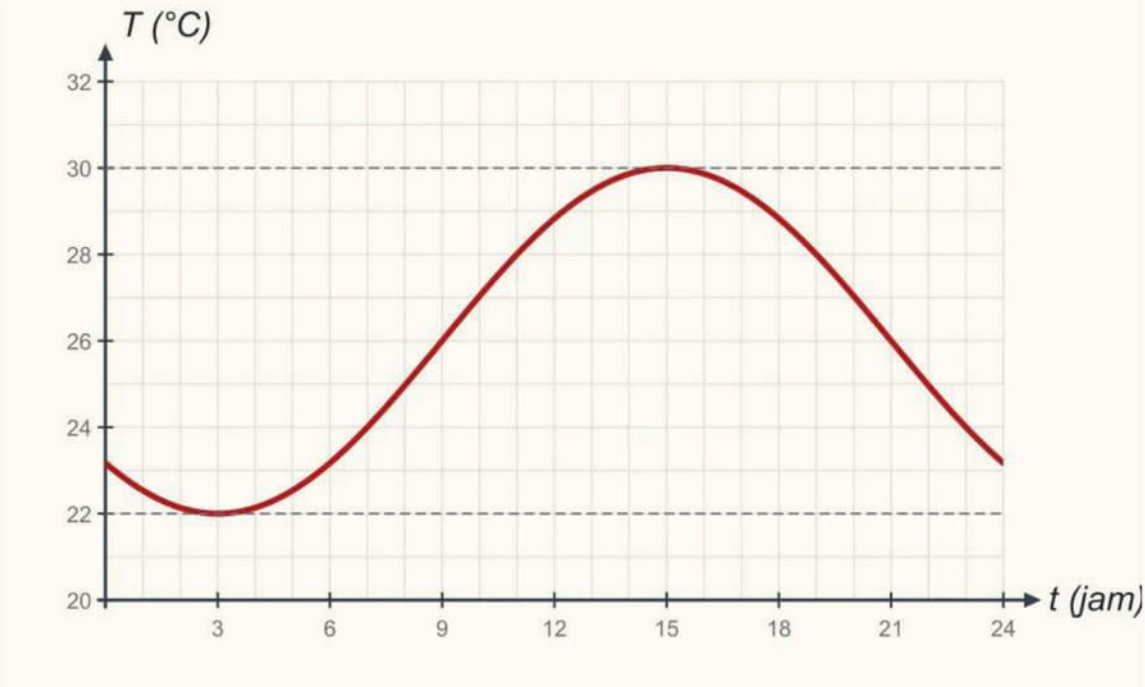


Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Grafik melalui titik $(0, -1)$.	○	○
Asimtot datar grafik adalah garis $y = -2$.	○	○
Grafik turun untuk $x > 0$.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

11. Suhu udara sebuah kota pada suatu hari dimodelkan $T(t) = 26 + 4\sin\left(\dfrac{\pi(t-9)}{12}\right)$ °C, dengan t jam sejak pukul 00.00 ($0 \le t \le 24$). Grafiknya ditunjukkan pada gambar.
Suhu udara tepat 28 °C terjadi pada pukul ....



A. 11.00 saja
B. 11.00 dan 19.00
C. 15.00 dan 03.00
D. 02.00 dan 10.00
E. 11.00 dan 23.00

12. Diketahui titik $A(1, -1, 2)$ dan $B(3, 1, 0)$. Titik P terletak pada perpanjangan AB (di luar ruas AB, di pihak B) sehingga $AP : PB = 3 : 1$.
Koordinat titik P adalah ....

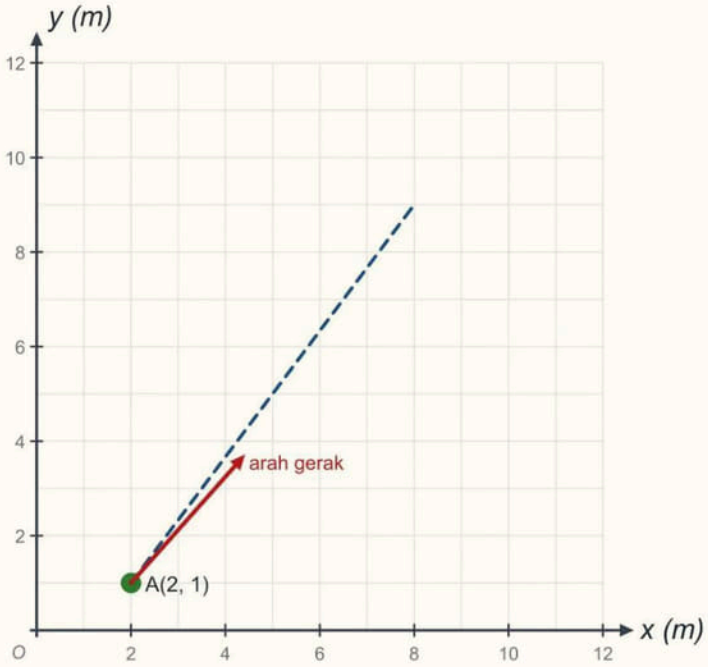
A. $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
B. $(0, -2, 3)$
C. $(5, 3, -2)$
D. $(4, 2, -1)$
E. $(7, 5, -4)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

13. Sebuah robot pengantar barang di gudang bergerak lurus dengan kecepatan tetap $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ m/s, mulai dari titik $A(2, 1)$ pada denah gudang berkoordinat (satuan meter).

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Laju robot adalah 1 m/s.

☐ B. Setelah 10 detik, robot berada di titik $(8, 9)$.

☐ C. Robot melewati titik $(5, 6)$.

☐ D. Setelah 5 detik, robot berjarak 5 m dari titik A.

☐ E. Arah gerak robot tegak lurus vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

14. Diketahui titik $A(1, 2, -1)$ dan $B(3, -1, 5)$.

Vektor satuan yang searah dengan $\vec{AB}$ adalah ....

A. $\frac{1}{7}(2, -3, 6)$

B. $\frac{1}{7}(-2, 3, -6)$

C. $\frac{1}{49}(2, -3, 6)$

D. $(2, -3, 6)$

E. $\frac{1}{11}(2, -3, 6)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

15. Ada dua lingkaran yang menyinggung sumbu X dan sumbu Y, berpusat di kuadran I, dan melalui titik $(2, 1)$.

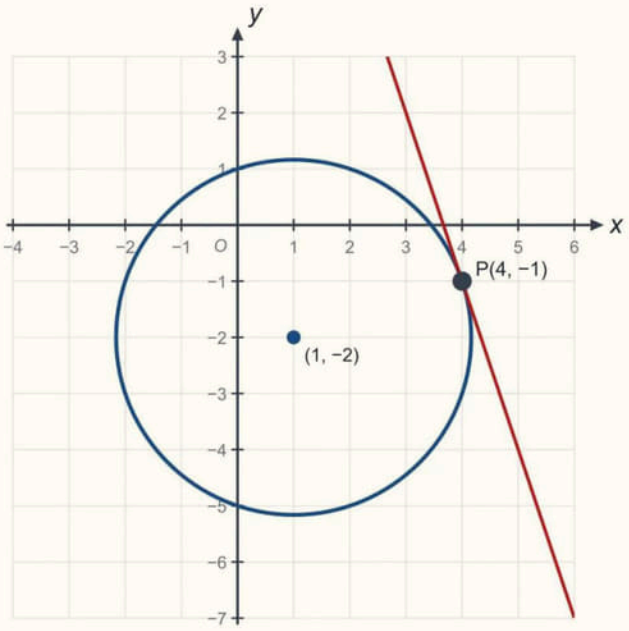
Persamaan lingkaran yang jari-jarinya lebih besar adalah ....

A. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
B. $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$
E. $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 25 = 0$

16. Titik $P(4, -1)$ terletak pada lingkaran $L : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. Garis g menyinggung L di titik P (lihat gambar).

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

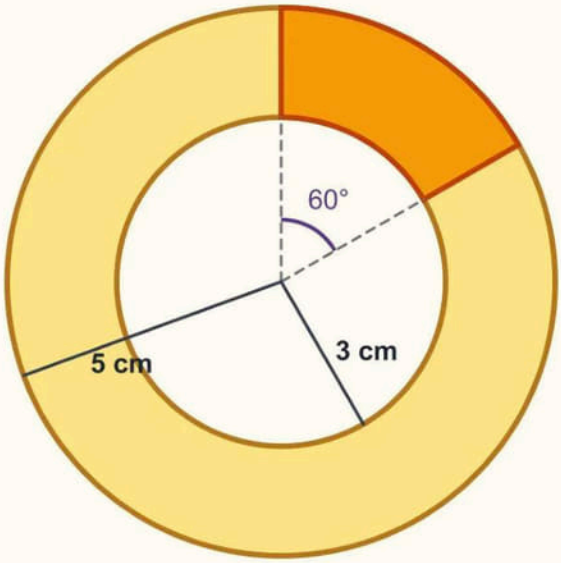


Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Persamaan garis g adalah $3x + y = 11$.
☐ B. Gradien garis g adalah $\frac{1}{3}$, sama dengan gradien jari-jari ke titik P.
☐ C. Garis g memotong sumbu Y di titik $(0, 11)$.
☐ D. Garis singgung L yang sejajar g menyinggung L di titik $(-2, -3)$.
☐ E. Jarak pusat L ke garis g adalah 10, sama dengan ruas kanan persamaan L.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

17. Sebuah medali berbentuk cincin dibatasi dua lingkaran sepusat berjari-jari 5 cm dan 3 cm. Bagian cincin dengan sudut pusat 60° diberi warna emas tua (lihat gambar).
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Luas cincin adalah 16π cm^2.
☐ B. Luas cincin sama dengan luas lingkaran berjari-jari 2 cm.
☐ C. Luas bagian berwarna emas tua adalah $\frac{8\pi}{3}$ cm^2.
☐ D. Keliling bagian berwarna emas tua adalah $\frac{8\pi}{3}$ cm.
☐ E. Keliling bagian berwarna emas tua adalah $\left(\frac{8\pi}{3} + 4\right)$ cm.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

18. Roda sebuah sepeda berjari-jari 35 cm (lihat gambar). Gunakan $\pi = \dfrac{22}{7}$.

Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



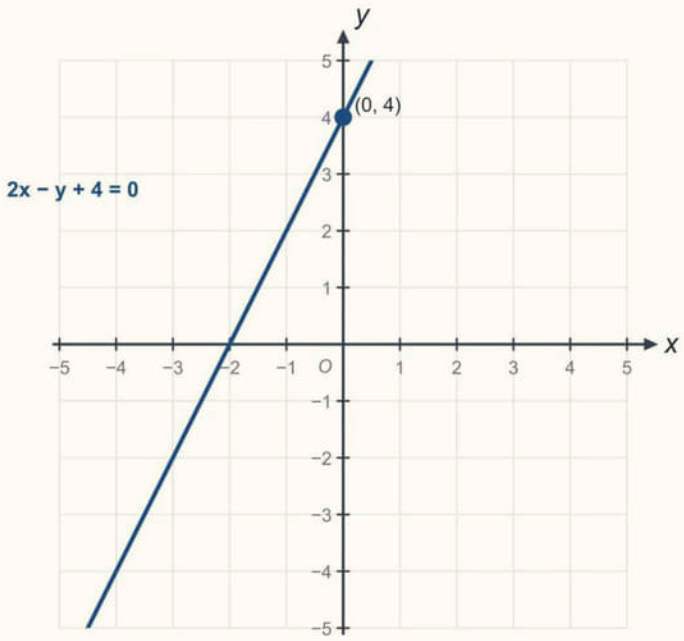
Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Keliling roda adalah 220 cm.	○	○
Setelah roda berputar 10 kali, sepeda menempuh 11 m.	○	○
Untuk menempuh 1,1 km, roda berputar 500 kali.	○	○

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

19. Garis $2x - y + 4 = 0$ pada gambar dirotasi sejauh 90° **searah** jarum jam dengan pusat O. Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Persamaan bayangannya adalah $x + 2y - 4 = 0$.
☐ B. Bayangannya sejajar garis asal.
☐ C. Titik $(0, 4)$ pada garis asal berbayangan $(4, 0)$.
☐ D. Bayangan oleh rotasi 90° berlawanan arah jarum jam sama dengan bayangan ini.
☐ E. Jarak titik O ke bayangan sama dengan jarak O ke garis asal.

20. Parabola $y = x^2 - 2x + 3$ didilatasi dengan pusat O dan faktor skala 2.
Persamaan bayangannya adalah ....

A. $y = 2x^2 - 4x + 6$
B. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$
C. $y = 4x^2 - 4x + 6$
D. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$
E. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

21. Garis $ax + 2y + b = 0$ dicerminkan terhadap sumbu X, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bayangan akhirnya adalah garis $3x - 2y + 10 = 0$.

Nilai $a + b$ adalah ....

A. 4

B. 10

C. 22

D. -4

E. 7

22. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + x - 1}$ adalah ....

A. $\dfrac{3}{5}$

B. $-\dfrac{3}{5}$

C. $\dfrac{5}{3}$

D. $\dfrac{3}{4}$

E. limit tidak ada

23. Waktu untuk mengunduh berkas berukuran n MB pada sebuah jaringan adalah $W(n) = 2 + \dfrac{n}{5}$ detik (2 detik untuk memulai sambungan). Kecepatan unduh rata-rata adalah $K(n) = \dfrac{n}{W(n)}$ MB per detik.

Untuk berkas yang sangat besar ($n \to \infty$), kecepatan unduh rata-rata mendekati ....

A. 2 MB per detik

B. 0,2 MB per detik

C. 5 MB per detik

D. 10 MB per detik

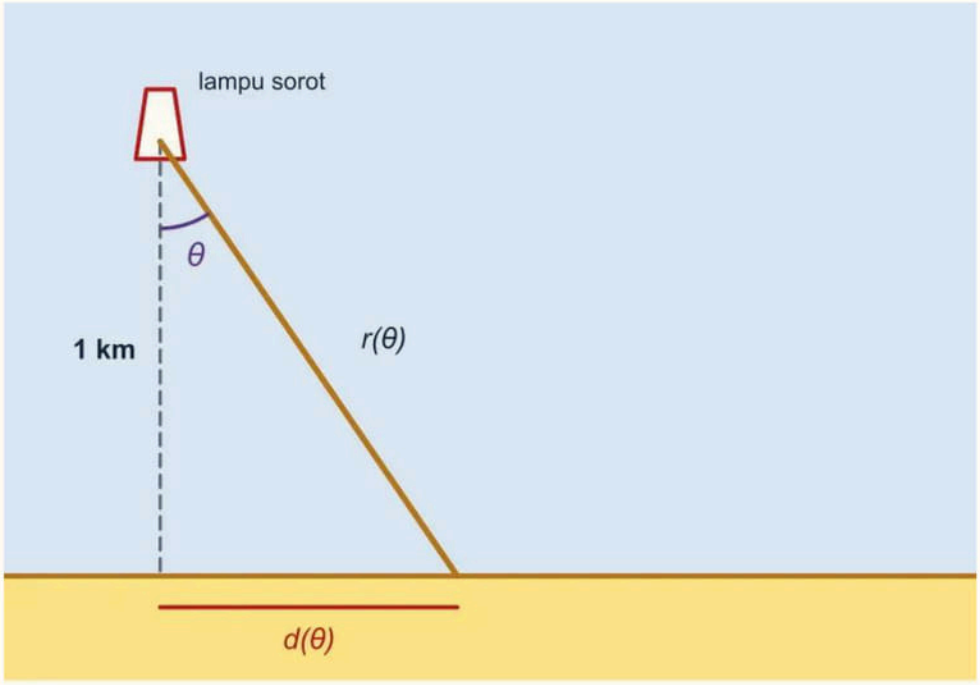
E. membesar tanpa batas

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

24. Lampu sorot sebuah mercusuar di pulau kecil berjarak 1 km dari garis pantai yang lurus. Lampu diputar sehingga sorotnya membentuk sudut θ radian terhadap arah tegak lurus pantai ($0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$). Jarak titik sorot di pantai ke titik pantai terdekat adalah $d(\theta) = \tan\theta$ km, dan jarak lampu ke titik sorot $r(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta}$ km (lihat gambar).

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{d(\theta)}{\theta} = 1$

☐ B. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} d(\theta) = 1$

☐ C. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{r(\theta) - 1}{\theta^2} = \dfrac{1}{2}$

☐ D. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{4}} d(\theta) = 1$

☐ E. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{r(\theta) - 1}{\theta} = \dfrac{1}{2}$

25. Nilai $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(\pi x)}{x - 1}$ adalah ....

A. 1

B. $-\pi$

C. 0

D. π

E. limit tidak ada

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Lembar jawaban

No	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2					
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7					
8					
9					

No	A	B	C	D	E
10					
11	○	○	○	○	○
12	○	○	○	○	○
13					
14	○	○	○	○	○
15	○	○	○	○	○
16					
17					
18					

No	A	B	C	D	E
19					
20	○	○	○	○	○
21	○	○	○	○	○
22	○	○	○	○	○
23	○	○	○	○	○
24					
25	○	○	○	○	○

Soal PG kompleks / Benar–Salah (nomor 2, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 24): jawab langsung pada soalnya.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tabel skor dan anjuran

Sub bab / subtopik	Nomor soal	Benar	Jika kurang separuh benar
Sub bab 1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks	1, 2	___ / 2	Ulangi hlm. 8
Sub bab 1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3	3	___ / 1	Ulangi hlm. 25
Sub bab 1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks	4	___ / 1	Ulangi hlm. 39
Sub bab 1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa	5, 6	___ / 2	Ulangi hlm. 77
Sub bab 1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial	7, 8	___ / 2	Ulangi hlm. 94
Sub bab 1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks	9, 10	___ / 2	Ulangi hlm. 128
Sub bab 1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri	11	___ / 1	Ulangi hlm. 147
Sub bab 2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan	12, 13, 14	___ / 3	Ulangi hlm. 180
Sub bab 2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis	15	___ / 1	Ulangi hlm. 214
Sub bab 2.4 · Garis singgung lingkaran	16	___ / 1	Ulangi hlm. 229
Sub bab 2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran	17, 18	___ / 2	Ulangi hlm. 248
Sub bab 2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi	19, 20	___ / 2	Ulangi hlm. 268
Sub bab 2.7 · Matriks transformasi dan komposisi	21	___ / 1	Ulangi hlm. 288
Sub bab 3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik	22	___ / 1	Ulangi hlm. 318
Sub bab 3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks	23	___ / 1	Ulangi hlm. 333
Sub bab 3.3 · Limit fungsi trigonometri	24, 25	___ / 2	Ulangi hlm. 348

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Simulasi 3 — Prediksi TKA 2026

MATTL-FIN3

Petunjuk

Jumlah soal: 25. Waktu: 60 menit.

Kerjakan sekaligus tanpa membuka materi. Tandai jawaban pada lembar jawaban. Kunci dan pembahasan ada di Bagian D; hitung skor dan lihat tabel anjuran di akhir paket.

Kerjakan Simulasi 3 di LMS

Hasil dan analisis per sub bab tersimpan di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-FIN3

1. Sebuah usaha kecil membuat sabun batang dan sabun cair. Kebutuhan bahan per lusin sabun ditulis dalam matriks B, produksi bulan ini dalam matriks baris p, dan harga bahan (ribu rupiah per kg) dalam matriks kolom h:

$$B = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}3 \\ 2 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 30 & 20 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Baris B: sabun batang, sabun cair; kolom B: minyak kelapa (kg), soda (kg). Matriks p berisi banyak lusin sabun batang dan sabun cair.

Total biaya bahan bulan ini, yaitu pBh, adalah ....

A. Rp2.380.000
B. Rp2.125.000
C. Rp98.000
D. Rp2.520.000
E. Rp255.000

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

2. Hasil pertandingan tiga tim futsal dalam suatu kompetisi dicatat dalam matriks H dan aturan poin dalam vektor p:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Baris H: tim A, B, C; kolom H: banyak menang, seri, kalah. Menang bernilai 3 poin, seri 1 poin, kalah 0 poin.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Poin tim B lebih banyak daripada poin tim A.

☐ B. Tim C memperoleh poin terbanyak, yaitu 15.

☐ C. Bila menang hanya bernilai 2 poin, tim C tetap satu-satunya peraih poin terbanyak.

☐ D. Unsur-unsur Hp menyatakan poin setiap tim.

☐ E. Bila menang hanya bernilai 2 poin, ketiga tim memperoleh poin yang sama.

3. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Matriks X memenuhi $XA = B$.

Matriks X adalah ....

A. $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -10 & -9 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 17 & 10 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

4. Sebuah bak air diisi oleh tiga keran A, B, dan C yang masing-masing mengalirkan air dengan debit tetap. Keran A dan B bersama-sama mengisi 70 liter dalam 5 menit, keran B dan C bersama-sama mengisi 64 liter dalam 4 menit, dan keran A dan C bersama-sama mengisi 108 liter dalam 6 menit.

Waktu untuk mengisi 240 liter bila ketiga keran dibuka bersama adalah ....

A. 5 menit

B. 24 menit

C. 40 menit

D. 15 menit

E. 10 menit

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

5. Suku banyak $f(x)$ berderajat tiga. Jika $f(x)$ dibagi $x^2 - x - 2$ bersisa $x + 4$, dan jika dibagi $x^2 + x$ bersisa $3x + 6$.
Sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^3 - x^2 - 2x$ adalah ....

A. $(x + 4)(3x + 6)$
B. $-x^2 + 2x + 6$
C. $x^2 - 2x + 6$
D. $3x + 6$
E. $-x^2 + x + 6$

6. Untuk produksi x ratus unit mainan kayu, biaya produksinya $B(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 10x + 50$ juta rupiah, sedangkan harga jual per ratus unit $H(x) = 30 - x$ juta rupiah. Laba dinyatakan $L(x) = x \cdot H(x) - B(x)$.
Untuk produksi 400 unit, hasil usaha itu adalah ....

A. rugi Rp14 juta
B. laba Rp104 juta
C. rugi Rp64 juta
D. laba Rp14 juta
E. laba Rp194 juta

7. Diketahui suku banyak $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $f(x) = 0$ mempunyai empat akar real yang berbeda.
☐ B. Jumlah keempat akar $f(x) = 0$ adalah 5.
☐ C. $(x^2 - 4)$ adalah faktor $f(x)$.
☐ D. $f(x) < 0$ untuk $1 < x < 2$.
☐ E. Grafik f memotong sumbu Y di titik $(0, -4)$.

8. Tinggi air (cm) dalam sebuah tangki percobaan t menit setelah keran dibuka dimodelkan $h(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ untuk $0 \le t \le 5$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
$h(2) = 20$.	○	○
Tangki kosong kembali pada saat $t = 4$.	○	○
Sisa pembagian $h(t)$ oleh $(t - 1)$ adalah 16.	○	○

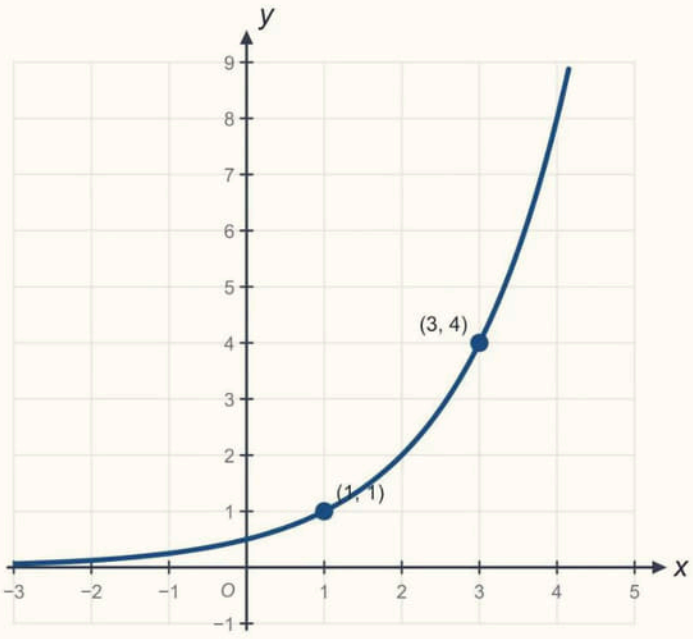
Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

9. Keasaman larutan dinyatakan dengan $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, dengan $[\mathrm{H}^+]$ konsentrasi ion hidrogen dalam mol/L.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Larutan dengan $[\mathrm{H}^+] = 10^{-4}$ mol/L mempunyai pH 4.
☐ B. Larutan dengan $[\mathrm{H}^+] = 2 \times 10^{-3}$ mol/L mempunyai pH $3 - \log 2$.
☐ C. Larutan pH 6 dua kali lebih asam daripada larutan pH 3, karena angka pH-nya dua kali lipat.
☐ D. $[\mathrm{H}^+]$ larutan pH 3 adalah 100 kali $[\mathrm{H}^+]$ larutan pH 5.
☐ E. Bila $[\mathrm{H}^+]$ dibuat 10 kali lebih kecil karena diencerkan, pH larutan turun sebesar 1.

10. Gambar berikut adalah grafik $y = 2^{x-1}$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

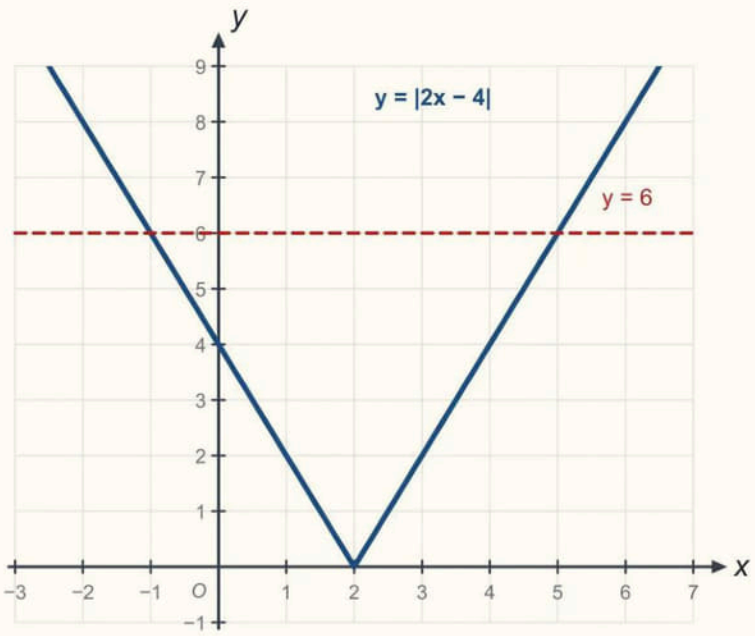


Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Grafik melalui titik $(1, 1)$.	○	○
Grafik memotong sumbu Y di titik $(0, 1)$.	○	○
Grafik melalui titik $(3, 4)$.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

11. Gambar berikut menunjukkan grafik $y = |2x - 4|$ dan garis $y = 6$.
Himpunan penyelesaian $|2x - 4| \leq 6$ adalah ....



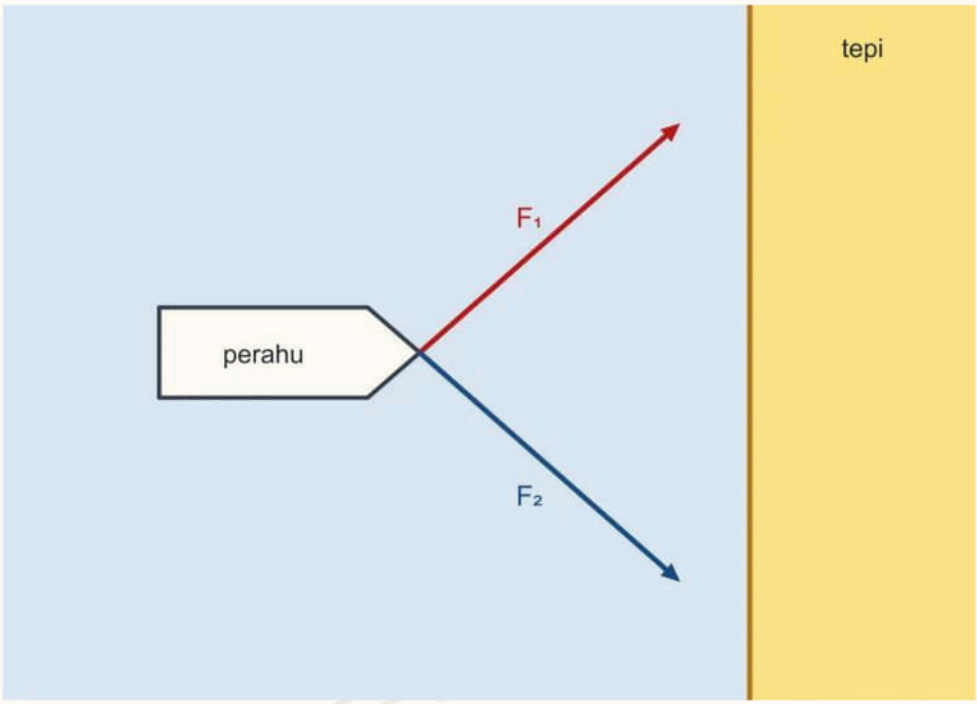
A. $\{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$
B. $\{x \mid x \leq 5\}$
C. $\{x \mid -5 \leq x \leq 1\}$
D. $\{x \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 5\}$
E. $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$

12. Diketahui titik $A(-1, 4, 2)$ dan $B(4, -1, 7)$. Titik P terletak pada ruas garis AB sehingga $AP : PB = 2 : 3$.
Koordinat titik P adalah ....

A. $(2, 1, 5)$
B. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$
C. $(1, 2, 4)$
D. $(-11, 14, -8)$
E. $(3, 3, 9)$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

13. Dua orang di tepi sungai menarik sebuah perahu dengan tali. Gaya kedua tali dinyatakan dalam vektor (newton) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$ dan $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ -80 \end{pmatrix}$, dengan sumbu X positif mengarah ke tepi (lihat gambar).
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Resultan kedua gaya adalah $\begin{pmatrix} 120 \\ 0 \end{pmatrix}$ N.

☐ B. Besar resultan kedua gaya adalah 200 N.

☐ C. Besar masing-masing gaya adalah 100 N.

☐ D. Resultan gaya mengarah tepat ke tepi sungai (searah sumbu X positif).

☐ E. Bila $\vec{F}_2$ diganti $\begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$, besar resultannya tetap 120 N.

14. Diketahui $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Panjang vektor $2\vec{u} - 3\vec{v}$ adalah ....

A. $\sqrt{74}$

B. $\sqrt{14}$

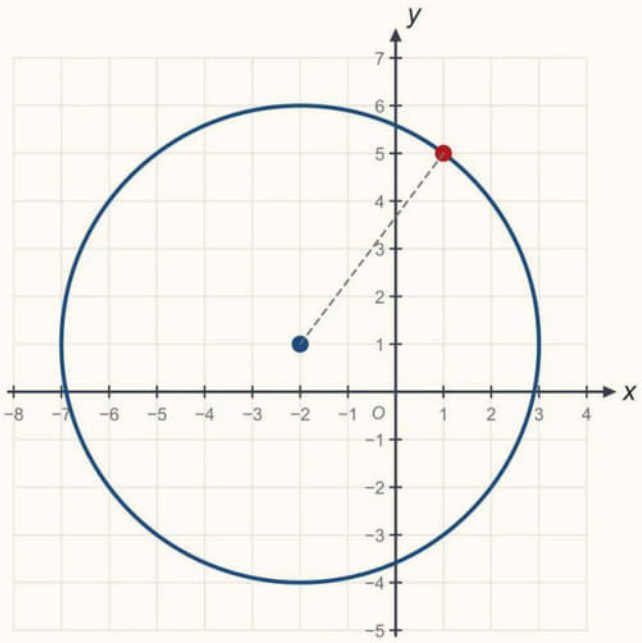
C. $2\sqrt{14} - 3\sqrt{6}$

D. $\sqrt{6}$

E. $\sqrt{146}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

15. Gambar berikut menunjukkan sebuah lingkaran pada bidang koordinat berpetak beserta pusatnya (titik biru) dan satu titik pada lingkaran (titik merah).
Persamaan lingkaran tersebut adalah ....

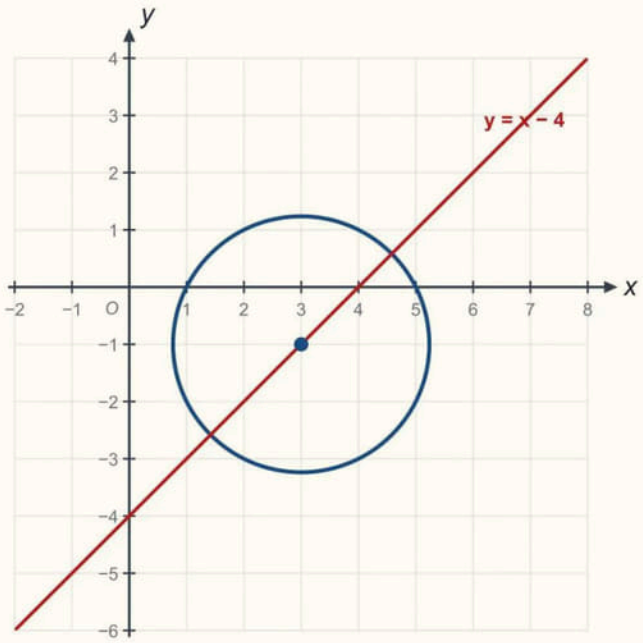


A. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
B. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
C. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 25 = 0$
D. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
E. $x^2 + y^2 + 2x - y - 20 = 0$

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

16. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ dan garis-garis berbentuk $y = x + k$ (gambar menunjukkan lingkaran itu dan garis $y = x - 4$).
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

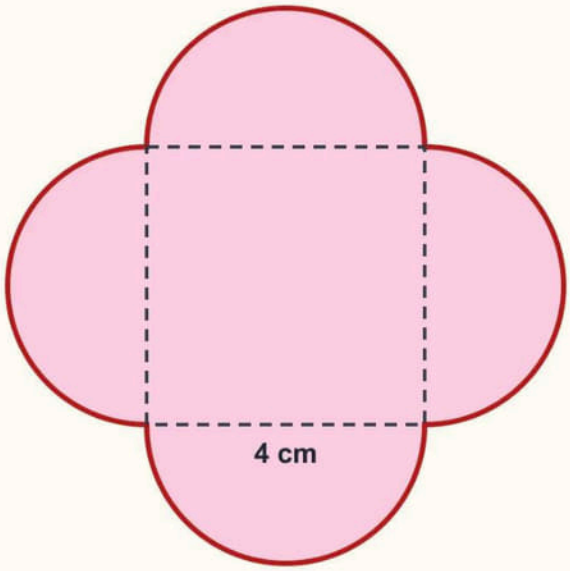


Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Lingkaran berpusat di $(3, -1)$ dan berjari-jari $\sqrt{5}$.
☐ B. Garis $y = x$ menyinggung lingkaran itu di satu titik di kuadran IV.
☐ C. Garis $y = x + k$ menyinggung lingkaran untuk dua nilai k yang jumlahnya -8.
☐ D. Garis $y = x - 4$ tidak memotong lingkaran karena letaknya di bawah pusat lingkaran.
☐ E. Garis singgung lingkaran di titik $(4, 1)$ adalah $x + 2y = 6$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

17. Sebuah logo dibuat dari persegi bersisi 4 cm yang setiap sisinya ditempeli setengah lingkaran ke arah luar (diameter = sisi persegi), seperti pada gambar.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



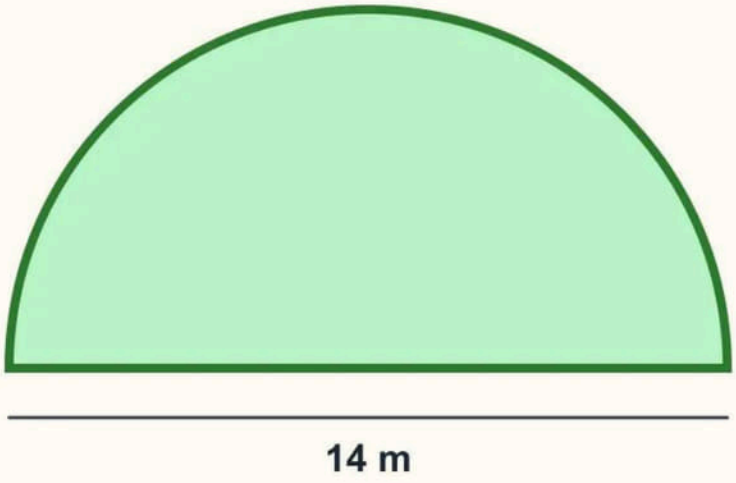
Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Keliling logo adalah $(16 + 8\pi)$ cm.
☐ B. Luas logo adalah $(16 + 8\pi)$ cm².
☐ C. Keliling logo adalah 8π cm.
☐ D. Luas logo sama dengan luas lingkaran berjari-jari 4 cm.
☐ E. Luas keempat setengah lingkaran lebih besar daripada luas persegi.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

18. Sebuah taman berbentuk setengah lingkaran berdiameter 14 m (lihat gambar) akan dipagari di sekeliling tepinya. Gunakan $\pi = \dfrac{22}{7}$.

Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

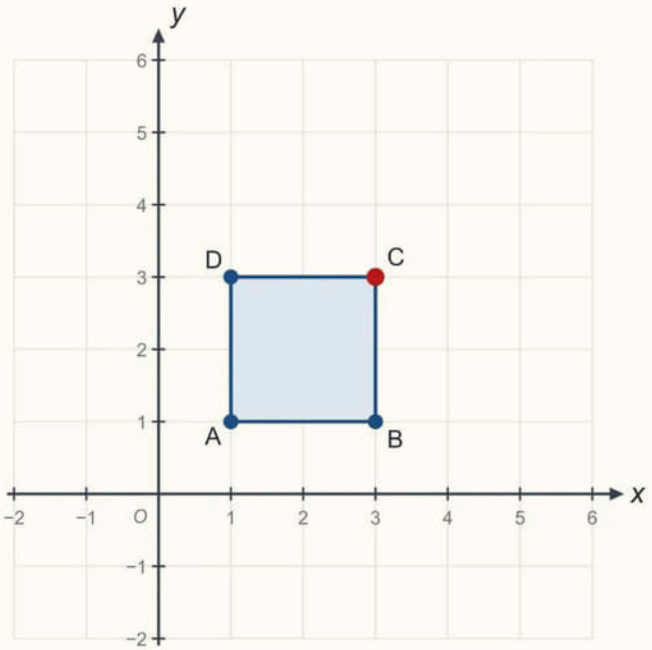


Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Panjang tepi lengkung taman adalah 44 m.	○	○
Luas taman adalah 77 m^2.	○	○
Panjang pagar yang diperlukan adalah 36 m.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

19. Persegi $ABCD$ pada gambar dirotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat titik C, menghasilkan persegi $A'B'C'D'$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Bayangan titik C adalah titik C itu sendiri.
☐ B. Bayangan titik A adalah $A'(5, 1)$.
☐ C. Bayangan titik B adalah $B'(-1, 3)$.
☐ D. Bayangan titik D adalah titik B.
☐ E. Persegi $ABCD$ dan $A'B'C'D'$ bertumpuk pada daerah seluas 4 satuan luas.

20. Lingkaran $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ didilatasi dengan pusat $P(-1, 1)$ dan faktor skala 2.
Persamaan bayangannya adalah ....

A. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 36$
B. $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 18$
C. $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$
D. $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 36$
E. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 36$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

21. Garis $3x + y = 6$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$, kemudian hasilnya dirotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O.
Persamaan bayangan akhirnya adalah ....

A. $3x - y = 6$
B. $-3x + y = 6$
C. $x + 3y = -6$
D. $-x + 3y = 6$
E. $3x + y = -6$

22. Fungsi f didefinisikan $f(x) = x^2 + 1$ untuk $x < 1$ dan $f(x) = ax - 1$ untuk $x \geq 1$.
Agar $\lim_{x \to 1} f(x)$ ada, nilai a adalah ....

A. 2
B. 1
C. 3
D. -3
E. tidak ada nilai a yang memenuhi

23. Kecepatan mengetik seorang siswa setelah t minggu berlatih dimodelkan $K(t) = \dfrac{60t}{t + 5}$ kata per menit.
Bila ia terus berlatih dalam waktu sangat lama, kecepatan mengetiknya mendekati ....

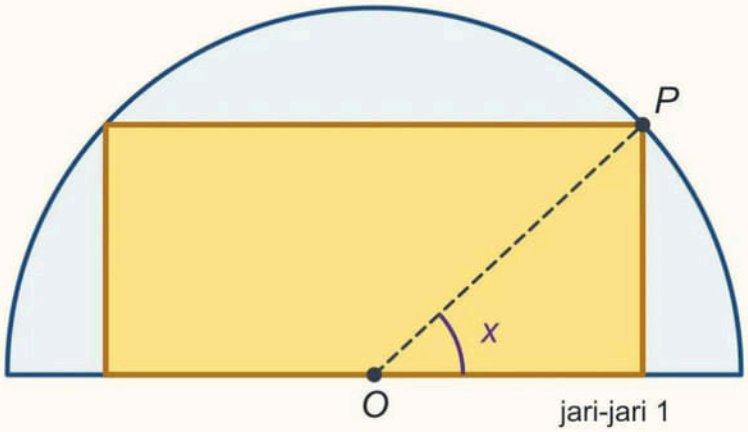
A. 12 kata per menit
B. 60 kata per menit
C. 30 kata per menit
D. 65 kata per menit
E. bertambah terus tanpa batas

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

24. Sebuah persegi panjang dibuat di dalam setengah lingkaran berjari-jari 1, dengan satu sisi pada diameter dan dua titik sudut pada busur. Titik sudut P membentuk sudut x radian terhadap diameter dari pusat O (lihat gambar), sehingga luasnya $L(x) = \sin 2x$ dan kelilingnya $K(x) = 4\cos x + 2\sin x$, untuk $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L(x)}{x} = 2$

☐ B. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} L(x) = 1$

☐ C. $\lim\limits_{x\to 0} K(x) = 4$

☐ D. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{L(x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 2$

☐ E. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L(x)}{K(x)} = \dfrac{1}{2}$

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

25. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \cos(2x - 4)}{(x^2 - 4)\sin(x - 2)}$ adalah ....

A. 2

B. $\dfrac{1}{4}$

C. 0

D. $\dfrac{1}{2}$

E. $-\dfrac{1}{2}$

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Lembar jawaban

No	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2					
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7					
8					
9					

No	A	B	C	D	E
10					
11	○	○	○	○	○
12	○	○	○	○	○
13					
14	○	○	○	○	○
15	○	○	○	○	○
16					
17					
18					

No	A	B	C	D	E
19					
20	○	○	○	○	○
21	○	○	○	○	○
22	○	○	○	○	○
23	○	○	○	○	○
24					
25	○	○	○	○	○

Soal PG kompleks / Benar–Salah (nomor 2, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 24): jawab langsung pada soalnya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tabel skor dan anjuran

Sub bab / subtopik	Nomor soal	Benar	Jika kurang separuh benar
Sub bab 1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks	1, 2	___ / 2	Ulangi hlm. 8
Sub bab 1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3	3	___ / 1	Ulangi hlm. 25
Sub bab 1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks	4	___ / 1	Ulangi hlm. 39
Sub bab 1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa	5, 6	___ / 2	Ulangi hlm. 77
Sub bab 1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial	7, 8	___ / 2	Ulangi hlm. 94
Sub bab 1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks	9, 10	___ / 2	Ulangi hlm. 128
Sub bab 1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri	11	___ / 1	Ulangi hlm. 147
Sub bab 2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan	12, 13, 14	___ / 3	Ulangi hlm. 180
Sub bab 2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis	15	___ / 1	Ulangi hlm. 214
Sub bab 2.4 · Garis singgung lingkaran	16	___ / 1	Ulangi hlm. 229
Sub bab 2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran	17, 18	___ / 2	Ulangi hlm. 248
Sub bab 2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi	19, 20	___ / 2	Ulangi hlm. 268
Sub bab 2.7 · Matriks transformasi dan komposisi	21	___ / 1	Ulangi hlm. 288
Sub bab 3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik	22	___ / 1	Ulangi hlm. 318
Sub bab 3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks	23	___ / 1	Ulangi hlm. 333
Sub bab 3.3 · Limit fungsi trigonometri	24, 25	___ / 2	Ulangi hlm. 348

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Simulasi 4 — Prediksi TKA 2026

MATTL-FIN4

Petunjuk

Jumlah soal: 25. Waktu: 60 menit.

Kerjakan sekaligus tanpa membuka materi. Tandai jawaban pada lembar jawaban. Kunci dan pembahasan ada di Bagian D; hitung skor dan lihat tabel anjuran di akhir paket.

Kerjakan Simulasi 4 di LMS

Hasil dan analisis per sub bab tersimpan di LMS.

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl&node=MATTL-FIN4

1. Dua keluarga berbelanja kebutuhan bulanan. Banyak barang yang dibeli ditulis dalam matriks A, dan harga barang (ribu rupiah) di dua minimarket X dan Y dalam matriks M:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 70 & 68 \\ 36 & 38 \\ 17 & 16 \end{bmatrix}.$$

Baris A: keluarga 1, keluarga 2; kolom A (dan baris M): beras 5 kg, minyak goreng 2 L, gula 1 kg. Kolom M: minimarket X, minimarket Y.

Pernyataan yang tepat tentang belanja keluarga 2 adalah ....

A. lebih hemat di minimarket X, dengan selisih Rp2.000
B. lebih hemat di minimarket Y, dengan selisih Rp1.000
C. sama saja di minimarket X dan Y
D. lebih hemat di minimarket X, dengan selisih Rp1.000
E. lebih hemat di minimarket Y, dengan selisih Rp2.000

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & x-y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 7 & z+1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, dengan $A^T = B$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $x = 5$.
☐ B. $A = B$, karena unsur diagonal utama keduanya sama.
☐ C. $x + y + z = 9$.
☐ D. $\det A = \det B = 15$.
☐ E. $A + B = 2B$, sehingga $A - B$ adalah matriks nol.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

3. Matriks A berordo 2×2 dengan $\det A = 3$.
Nilai $\det\left(2A^{-1}A^{T}\right)$ adalah ....

A. 2
B. 4
C. $\frac{4}{9}$
D. 36
E. 6

4. Seorang pembudidaya ikan mencampur tiga jenis pakan. Kandungan gizi setiap kg pakan dan kebutuhan harian kolamnya adalah sebagai berikut.

Kandungan per kg	Pakan A	Pakan B	Pakan C	Kebutuhan harian
Protein (unit)	2	1	3	11
Lemak (unit)	1	2	1	8
Serat (unit)	1	1	2	7

Kebutuhan harian harus dipenuhi tepat. Banyak pakan A yang dipakai setiap hari adalah ....

A. 2 kg
B. 1 kg
C. 6 kg
D. 3 kg
E. tidak dapat ditentukan

5. Suku banyak $f(x)$ jika dibagi $x^2 - 4$ menghasilkan hasil bagi $(x + 1)$ dan sisa $(2x - 3)$.
Sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^2 - 3x + 2$ adalah ....

A. $8x - 15$
B. $2x - 3$
C. $-8x + 15$
D. $6x - 13$
E. $x^3 + x^2 - 2x - 7$

6. Keuntungan (juta rupiah) dua cabang sebuah toko pada bulan ke-x dimodelkan $U_1(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ dan $U_2(x) = 2x^2 - x + 3$.
Total keuntungan kedua cabang pada bulan ke-3 adalah .... juta rupiah

A. 14
B. 32
C. 18
D. -4
E. 68

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

7. Titik potong grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ dengan sumbu X adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $(-3, 0)$
☐ B. $(-2, 0)$
☐ C. $(2, 0)$
☐ D. $(3, 0)$
☐ E. $(0, 18)$

8. Laba sebuah perusahaan rintisan pada bulan ke-x dimodelkan $L(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ juta rupiah.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.

Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Laba perusahaan nol pada bulan ke-1, ke-2, dan ke-3.	○	○
$L(4) = 6$.	○	○
Pada $x = 2{,}5$ (pertengahan bulan ketiga) perusahaan memperoleh laba positif.	○	○

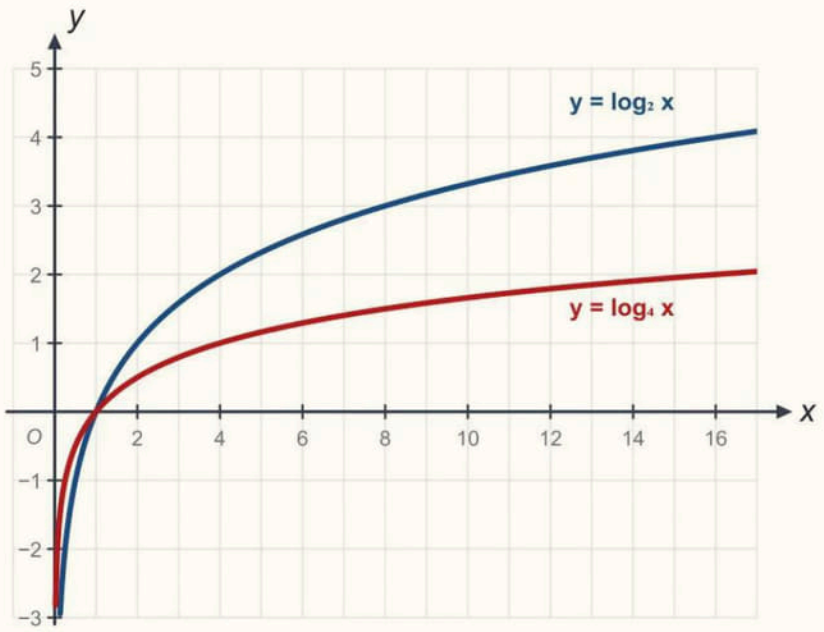
9. Setiap lapisan kaca penyaring meneruskan 90% intensitas cahaya yang mengenainya. Intensitas cahaya setelah melewati n lapisan adalah $I(n) = 100 \cdot (0{,}9)^n$ persen dari intensitas awal.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Setiap lapisan mengurangi intensitas sebanyak 10 satuan persen yang sama besarnya.
☐ B. Setelah melewati 2 lapisan, intensitas cahaya tinggal 81%.
☐ C. Setelah melewati 10 lapisan, cahaya sudah tidak tersisa (0%).
☐ D. Intensitas kurang dari 50% bila $n > \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9}$.
☐ E. Paling sedikit 7 lapisan diperlukan agar intensitas di bawah 50%.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

10. Gambar berikut menunjukkan grafik $y = \log_2 x$ dan $y = \log_4 x$.
Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



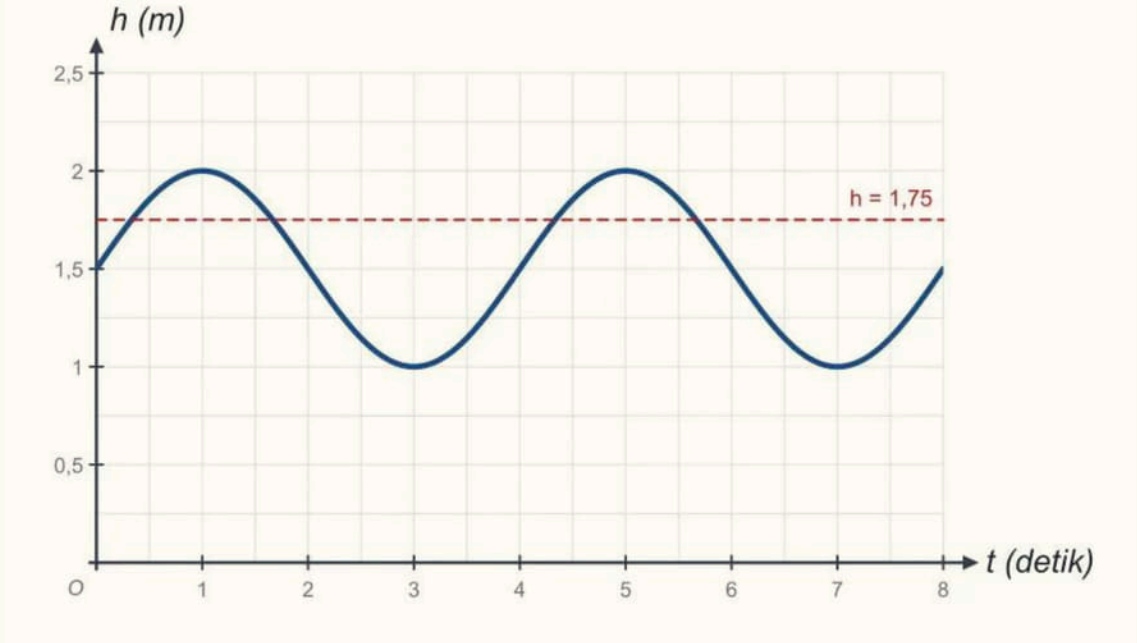
Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Kedua grafik melalui titik $(1, 0)$.	○	○
Untuk $x > 1$, grafik $y = \log_4 x$ berada di atas grafik $y = \log_2 x$.	○	○
Grafik $y = \log_2 x$ melalui titik $(16, 4)$.	○	○

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

11. Tinggi permukaan air di sebuah kolam ombak dimodelkan $h(t) = 1{,}5 + 0{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ meter, dengan t dalam detik (lihat gambar). Satu periode ombak berlangsung 4 detik. Dalam satu periode, lamanya tinggi air lebih dari 1,75 m adalah ....



A. 1 detik, yaitu seperempat periode
B. 2 detik, yaitu setengah periode
C. $\frac{4}{3}$ detik
D. $\frac{2}{3}$ detik
E. $\frac{8}{3}$ detik

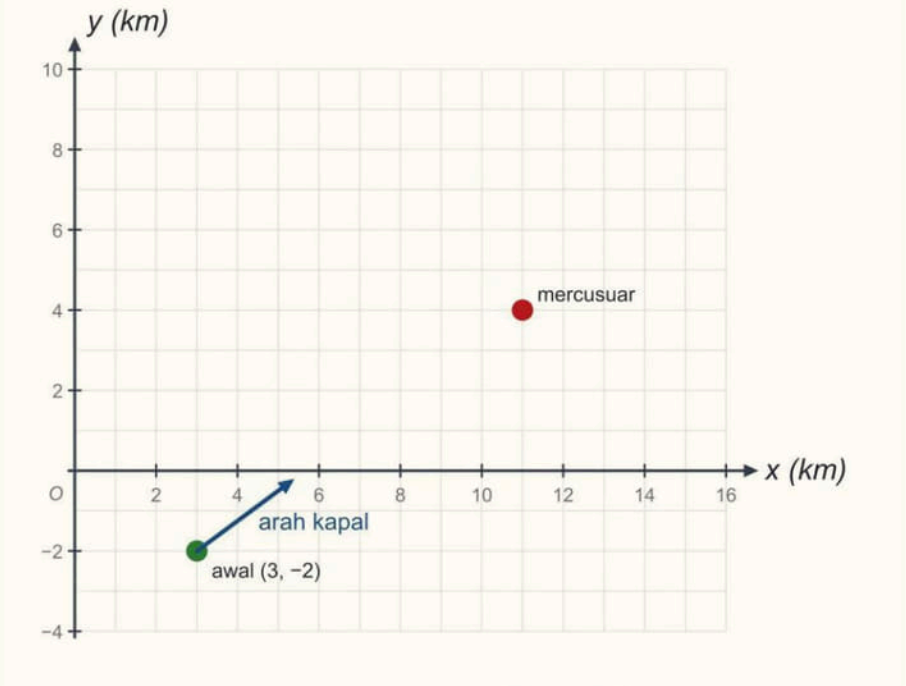
12. Trapesium $ABCD$ mempunyai sisi sejajar AB dan DC dengan $\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Diketahui $A(1, 2, 0)$, $B(5, 4, 2)$, dan $D(0, 1, 3)$.
Koordinat titik C adalah ....

A. $(2, 2, 4)$
B. $(4, 3, 5)$
C. $(-2, 0, 2)$
D. $(3, 3, 1)$
E. $(1, 1, 2)$

13. Posisi sebuah kapal (dalam km) t jam setelah berangkat adalah $\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Sebuah mercusuar berada di titik $(11, 4)$, dan pelabuhan di titik $O(0, 0)$ (lihat gambar).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Laju kapal adalah 5 km/jam.
☐ B. Kapal melewati titik mercusuar.
☐ C. Satu jam setelah berangkat, kapal berjarak 5 km dari pelabuhan O.
☐ D. Tiga jam setelah berangkat, kapal berjarak 15 km dari posisi awalnya.
☐ E. Kapal bergerak searah vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

14. Titik M adalah titik tengah ruas garis PQ dengan $P(2, -1, 4)$ dan $Q(4, 3, -2)$.
Panjang vektor $\vec{OM}$ adalah ....

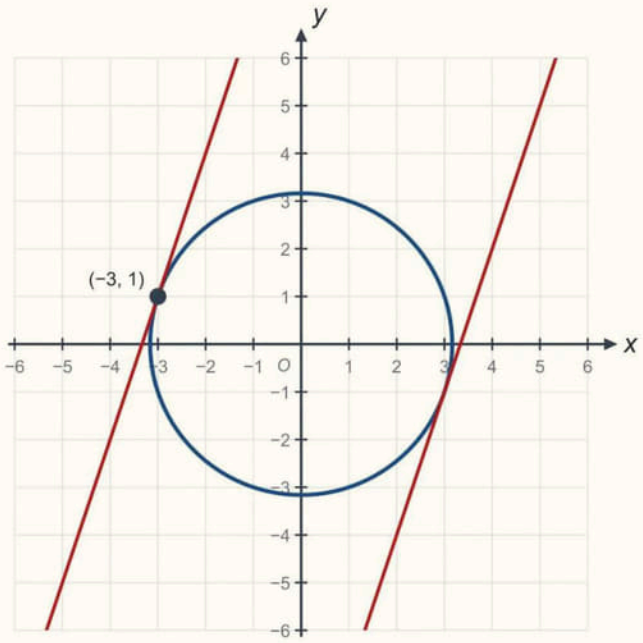
A. $2\sqrt{11}$
B. $\sqrt{14}$
C. $\sqrt{21}$
D. $\sqrt{11}$
E. 5

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

15. Lingkaran $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ berpusat di $(3, -2)$ dan menyinggung sumbu Y. Nilai $a + b + c$ adalah ....

A. 6
B. 7
C. -11
D. 11
E. 2

16. Gambar berikut menunjukkan lingkaran $x^2 + y^2 = 10$ dan dua garis singgungnya yang bergradien 3.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)

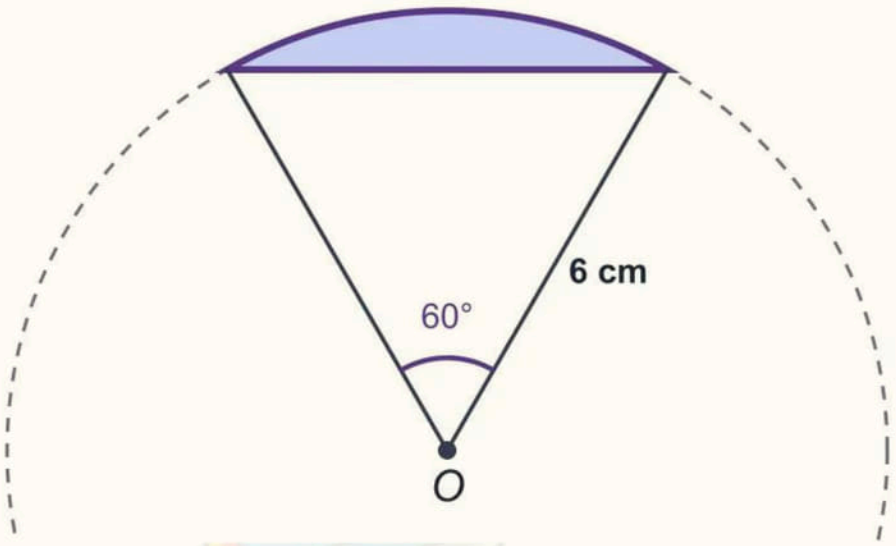


Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Garis $y = 3x + 10$ menyinggung lingkaran itu.
☐ B. Garis $y = 3x + \sqrt{10}$ menyinggung lingkaran itu.
☐ C. Titik singgung garis $y = 3x + 10$ adalah $(-3, 1)$.
☐ D. Jarak kedua garis singgung itu adalah $2\sqrt{10}$.
☐ E. Garis $y = 3x$ juga menyinggung lingkaran itu.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

17. Sebuah cermin hias berbentuk tembereng lingkaran berjari-jari 6 cm dengan sudut pusat 60° (daerah berwarna pada gambar).
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



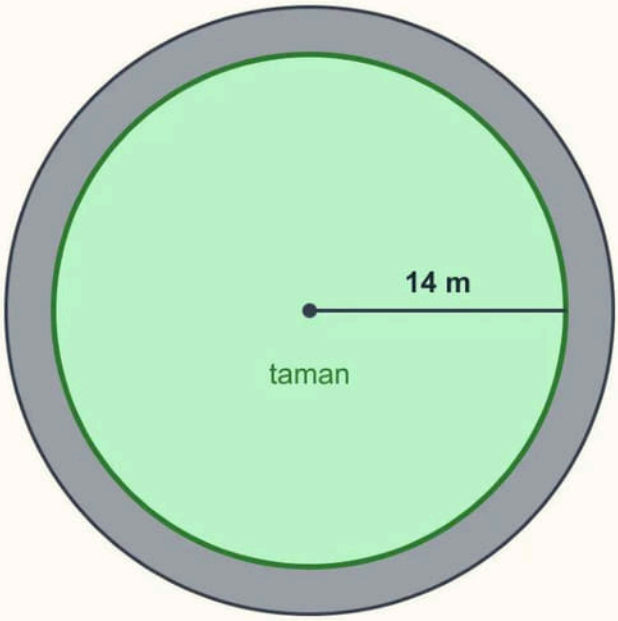
Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Luas cermin itu adalah 6π cm², sama dengan luas juring bersudut 60°.
☐ B. Panjang tali busur cermin adalah 6 cm.
☐ C. Luas cermin itu adalah $\left(6\pi - 9\sqrt{3}\right)$ cm².
☐ D. Keliling cermin itu adalah 2π cm, yaitu sepanjang busurnya.
☐ E. Keliling cermin itu adalah $(2\pi + 6)$ cm.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

18. Sebuah bundaran jalan berbentuk lingkaran berjari-jari 14 m; bagian dalamnya taman (lihat gambar). Gunakan $\pi = \dfrac{22}{7}$.

Tentukan **Benar** atau **Salah** pada setiap pernyataan berikut.



Tentukan setiap pernyataan Benar atau Salah.

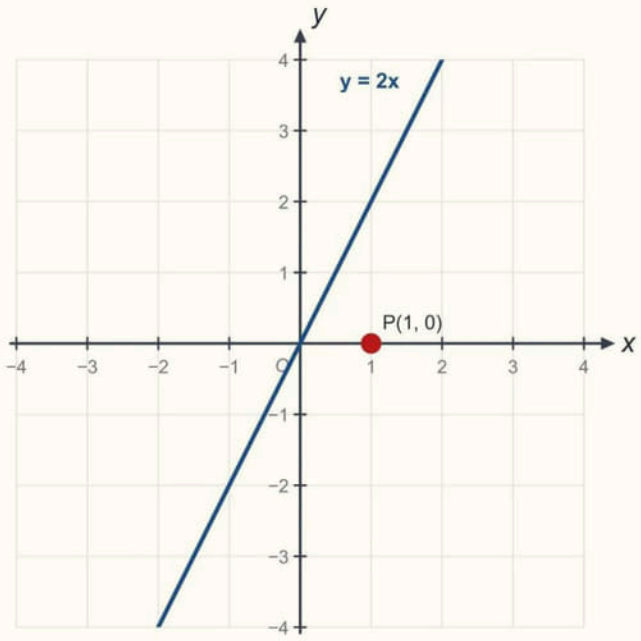
Pernyataan	Benar	Salah
Keliling tepi taman adalah 88 m.	○	○
Pejalan kaki yang menyusuri $\frac{3}{4}$ keliling tepi taman menempuh 66 m.	○	○
Luas taman adalah 308 m^2.	○	○

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

19. Garis $y = 2x$ pada gambar dirotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $P(1, 0)$.

Pernyataan yang benar adalah ....

(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. Persamaan bayangannya adalah $x + 2y = 0$.

☐ B. Persamaan bayangannya adalah $x + 2y + 1 = 0$.

☐ C. Bayangannya melalui titik O, seperti garis asalnya.

☐ D. Bayangannya tegak lurus garis asal.

☐ E. Titik O pada garis asal berbayangan $(1, -1)$.

20. Titik $A(4, -2)$ didilatasi dengan pusat $P(1, 1)$ dan faktor skala k, menghasilkan $A'(-5, 7)$.

Nilai k adalah ....

A. 2

B. $-\frac{1}{2}$

C. -2

D. $-\frac{5}{4}$

E. -3

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

21. Titik A ditransformasi oleh matriks $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, dilanjutkan pencerminan terhadap garis $y = x$, sehingga bayangannya $(5, 1)$.
Koordinat titik A adalah ....

A. $(3, 2)$
B. $(-1, 2)$
C. $(6, 9)$
D. $(2, 3)$
E. $(2, -3)$

22. Nilai $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ adalah ....

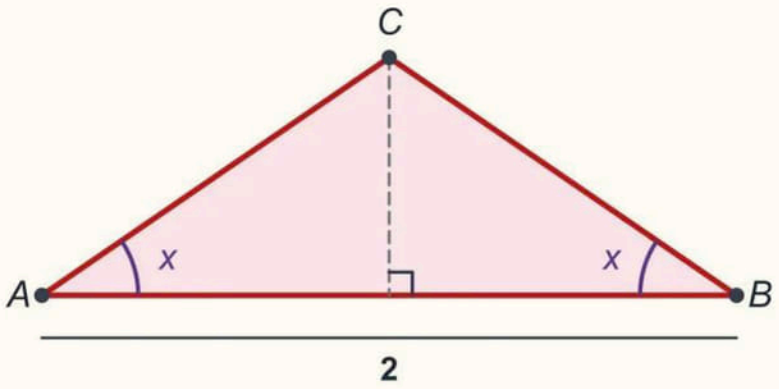
A. $\dfrac{1}{5}$
B. $-\dfrac{1}{5}$
C. 1
D. 0
E. nilai limit tidak ada

23. Tinggi sebuah pohon peneduh t tahun setelah ditanam dimodelkan $H(t) = \dfrac{20t + 5}{t + 4}$ meter.
Dalam jangka sangat panjang, tinggi pohon itu mendekati ....

A. 20 m
B. 5 m
C. 1,25 m
D. 24 m
E. terus bertambah tanpa batas

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

24. Segitiga sama kaki ABC mempunyai alas $AB = 2$ dan sudut alas x radian $(0 < x < \frac{\pi}{2})$, seperti pada gambar. Luasnya $L(x) = \tan x$ dan kelilingnya $K(x) = 2 + \dfrac{2}{\cos x}$.
Pernyataan yang benar adalah ....
(Pilih semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.)



Pilih semua jawaban yang benar.

☐ A. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{L(x)}{x} = 1$
☐ B. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} L(x) = 1$
☐ C. $\lim\limits_{x \to 0} K(x) = 4$
☐ D. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{K(x) - 4}{x^2} = 1$
☐ E. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{K(x) - 4}{x} = 1$

25. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 - 1)\tan(2x - 2)}{1 - \cos(x - 1)}$ adalah ....

A. 4
B. 2
C. 8
D. 16
E. 0

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Lembar jawaban

No	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2					
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7					
8					
9					

No	A	B	C	D	E
10					
11	○	○	○	○	○
12	○	○	○	○	○
13					
14	○	○	○	○	○
15	○	○	○	○	○
16					
17					
18					

No	A	B	C	D	E
19					
20	○	○	○	○	○
21	○	○	○	○	○
22	○	○	○	○	○
23	○	○	○	○	○
24					
25	○	○	○	○	○

Soal PG kompleks / Benar–Salah (nomor 2, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 24): jawab langsung pada soalnya.

NEXT LEVEL STUDY
Educational Institutions

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Tabel skor dan anjuran

Sub bab / subtopik	Nomor soal	Benar	Jika kurang separuh benar
Sub bab 1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks	1, 2	___ / 2	Ulangi hlm. 8
Sub bab 1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3	3	___ / 1	Ulangi hlm. 25
Sub bab 1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks	4	___ / 1	Ulangi hlm. 39
Sub bab 1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa	5, 6	___ / 2	Ulangi hlm. 77
Sub bab 1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial	7, 8	___ / 2	Ulangi hlm. 94
Sub bab 1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks	9, 10	___ / 2	Ulangi hlm. 128
Sub bab 1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri	11	___ / 1	Ulangi hlm. 147
Sub bab 2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan	12, 13, 14	___ / 3	Ulangi hlm. 180
Sub bab 2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis	15	___ / 1	Ulangi hlm. 214
Sub bab 2.4 · Garis singgung lingkaran	16	___ / 1	Ulangi hlm. 229
Sub bab 2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran	17, 18	___ / 2	Ulangi hlm. 248
Sub bab 2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi	19, 20	___ / 2	Ulangi hlm. 268
Sub bab 2.7 · Matriks transformasi dan komposisi	21	___ / 1	Ulangi hlm. 288
Sub bab 3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik	22	___ / 1	Ulangi hlm. 318
Sub bab 3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks	23	___ / 1	Ulangi hlm. 333
Sub bab 3.3 · Limit fungsi trigonometri	24, 25	___ / 2	Ulangi hlm. 348

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Bagian D · Kunci dan Pembahasan

Urutan sama dengan buku. Setiap pembahasan memuat konsep, langkah, dan alasan tiap pilihan. Baca pembahasan soal yang kamu jawab salah — dan juga yang kamu jawab benar tetapi menebak.

Latihan sub bab 1.1

No. 1 Kunci: A

Konsep: unsur k_{ij} hasil kali PH = baris ke-i dari P (hari) dikalikan kolom ke-j dari H (biaya atau harga jual). Baris = hari, kolom = jenis besaran.

Langkah 1. k_{21} = total biaya bahan hari Minggu $= 50 \cdot 18 + 30 \cdot 15 = 900 + 450 = 1.350$ (ribu rupiah).
Langkah 2. k_{22} = total pendapatan hari Minggu $= 50 \cdot 25 + 30 \cdot 20 = 1.250 + 600 = 1.850$ (ribu rupiah).
Langkah 3. $k_{22} - k_{21} = 500$ ribu rupiah = pendapatan dikurangi biaya hari Minggu, yaitu keuntungan hari Minggu.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• B: memakai baris pertama K (hari Sabtu), padahal indeks k_{2j} menunjuk baris kedua.
• C: menghitung $k_{11} - k_{21}$; selisih itu membandingkan dua hari, bukan pendapatan dan biaya satu hari.
• D: menghitung $k_{12} - k_{22}$.
• E: nilainya benar, tetapi artinya salah: k_{22} dan k_{21} adalah total satu hari, bukan per kotak.

No. 2 Kunci: C

Konsep: unsur baris ke-i kolom ke-j dari QH = pendapatan petani ke-i bila menjual seluruh panennya di pasar ke-j.

Langkah 1. Baris Budi pada QH: pasar X $= 90 \cdot 12 + 150 \cdot 18 = 1.080 + 2.700 = 3.780$; pasar Y $= 90 \cdot 14 + 150 \cdot 15 = 1.260 + 2.250 = 3.510$.
Langkah 2. $3.780 > 3.510$, jadi Budi menjual di pasar X dan memperoleh Rp3.780.000.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: memilih pasar dengan harga jeruk lebih tinggi; panen Budi lebih banyak mangga, dan mangga lebih mahal di pasar X.
• B: itu baris Ani pada QH (pendapatan Ani sama di kedua pasar).
• D: hanya menghitung mangga ($150 \cdot 18$).
• E: menjumlahkan pendapatan di kedua pasar, padahal panen hanya dijual di satu pasar.

No. 3 Kunci: B, D, E

Konsep: Nb mengalikan setiap baris N (satu siswa) dengan bobot tiap komponen lalu menjumlahkannya: itulah nilai akhir berbobot. Urutan perkalian menentukan arti.

Analisis tiap pilihan:
• A ✗ — Dina $16 + 21 + 45 = 82$, Fani $14 + 27 + 40 = 81$. *Jebakan:* Fani unggul di dua komponen, tetapi UAS berbobot paling besar.
• B ✓ — $80 \cdot 0{,}2 + 70 \cdot 0{,}3 + 90 \cdot 0{,}5 = 82$.
• C ✗ — $b^T N$ memasangkan bobot dengan **siswa** (baris N), bukan dengan komponen; hasilnya tidak

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

bermakna sebagai nilai akhir.

- D ✓ — $-27 + 24 + 24 = 75$.
- E ✓ — Eko $18 + 24 + 30 = 72$; rata-rata $\frac{82+72+81}{3} = \frac{235}{3} = 78\frac{1}{3}$.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 4 Kunci: B

Konsep: penjualan Agustus $= 1{,}25\,T$; pendapatan tiap rute adalah unsur $(1{,}25\,T)h = 1{,}25\,(Th)$.

Langkah 1. Baris rute B pada Th: $80 \cdot 150 + 70 \cdot 300 = 12.000 + 21.000 = 33.000$ (ribu rupiah).
Langkah 2. Agustus: $1{,}25 \cdot 33.000 = 41.250$ ribu rupiah = Rp41.250.000.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: itu pendapatan rute B bulan Juli; kenaikan 25% belum dihitung.
- C: itu pendapatan rute A bulan Agustus (baris pertama).
- D: hanya tiket ekonomi yang dinaikkan 25%.
- E: menjumlahkan pendapatan kedua rute.

No. 5 Kunci: A, C, E

Konsep: dua matriks sama bila semua unsur yang seletak sama; satu unsur saja belum cukup. Hitung $A^2 = A \cdot A$ unsur demi unsur.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+6 & 2a+2b \\ 3a+3b & 6+b^2 \end{bmatrix}$; unsur baris 1 kolom 2: $2a + 2b = 6$.
- B ✗ — $a = -1$ memberi $b = 4$, tetapi $6 + b^2 = 22 \neq 10$. Hanya $a = 1, b = 2$ yang memenuhi semua unsur. *Jebakan:* hanya memakai unsur $a^2 + 6 = 7$.
- C ✓ — $\det A = ab - 6 = -4$, jadi $\det(A^2) = 16$ (cek: $70 - 54 = 16$).
- D ✗ — $A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \neq I$.
- E ✓ — $\begin{bmatrix} 7-3 & 6-6 \\ 9-9 & 10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Jawaban: A, C, dan E.

Latihan sub bab 1.2

No. 1 Kunci: B

Konsep: matriks singular bila determinannya 0. Determinan 3×3 dihitung dengan ekspansi kofaktor baris pertama (tanda $+, -, +$).

Langkah 1. $\det A = k(k \cdot 1 - 0) - 2(2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 1(2 \cdot 0 - k \cdot 1) = k^2 - 4 - k$.
Langkah 2. $k^2 - k - 4 = 0$ mempunyai diskriminan $1 + 16 > 0$, jadi ada dua nilai k dengan jumlah $-\frac{b}{a} = 1$.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: tanda suku ketiga ekspansi salah, sehingga $\det A = k^2 + k - 4$.
- C: itu hasil kali kedua nilai k, bukan jumlahnya.
- D: hasil kali kedua nilai k dengan tanda salah.
- E: minor unsur baris 1 kolom 2 dihitung salah, sehingga $\det A = k^2 - 2k - 4$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 2 **Kunci: E**

Konsep: hitung AB dulu, lalu inversnya: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Ingat $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Langkah 1. $AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$, $\det(AB) = 57 - 56 = 1$.

Langkah 2. $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 19 & -7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$; unsur baris 2 kolom 1 adalah -8.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: tanda unsur diagonal samping tidak diganti.
- B: menghitung $A^{-1}B^{-1}$; yang benar $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- C: itu unsur baris 1 kolom 1.
- D: itu unsur baris 1 kolom 2.

Latihan sub bab 1.3

No. 1 **Kunci: E**

Konsep: misalkan harga per kg arabika a, robusta r, liberika l (ribu rupiah): $2a + r + l = 600$, $a + 3r + l = 620$, $a + r + 2l = 560$.

Langkah 1. I – III: $a - l = 40$. II – III: $2r - l = 60$.

Langkah 2. Substitusi $a = l + 40$ dan $r = \frac{l+60}{2}$ ke III:
$l + 40 + \frac{l+60}{2} + 2l = 560 \Rightarrow 7l = 980 \Rightarrow l = 140$.

Langkah 3. $a = 180, r = 100$; jadi $a + r + l = 420$ ribu rupiah.

Cek ulang: paket II: $180 + 300 + 140 = 620$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: merata-ratakan harga ketiga paket; isi ketiga paket berbeda.
- B: liberika terlupa (hanya arabika + robusta).
- C: robusta terlupa (hanya arabika + liberika).
- D: arabika terlupa (hanya robusta + liberika).

No. 2 **Kunci: A**

Konsep: misalkan motor m, mobil c, bus kecil b: $m + c + b = 100$, $2m + 4c + 6b = 300$, $3m + 5c + 8b = 420$ (ribu rupiah).

Langkah 1. Persamaan roda dibagi 2 lalu dikurangi persamaan jumlah: $c + 2b = 50$.

Langkah 2. Persamaan tarif dikurangi 3 × persamaan jumlah: $2c + 5b = 120$.

Langkah 3. Substitusi $c = 50 - 2b$: $100 - 4b + 5b = 120$, jadi $b = 20, c = 10, m = 70$.

Cek ulang: roda $140 + 40 + 120 = 300$ ✓; tarif $210 + 50 + 160 = 420$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: itu banyak bus kecil.
- C: itu banyak motor.
- D: mengabaikan bus kecil dan hanya memakai jumlah kendaraan dan roda.
- E: ketiga persamaan saling bebas, jadi penyelesaiannya tunggal.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Latihan sub bab 1.4

No. 1 **Kunci: B, C, E**

Konsep: model: $3x + y \leq 60, x + y \leq 30, x \geq 0, y \geq 0$; fungsi tujuan $f = 50.000x + 30.000y$. Nilai optimum dicapai di titik pojok daerah penyelesaian.

Analisis tiap pilihan:

• A ✗ — $(20, 0)$ memberi Rp1.000.000, lebih kecil daripada di $(15, 15)$. *Jebakan:* memilih barang dengan untung per buah terbesar.

• B ✓ — perpotongan $3x + y = 60$ dan $x + y = 30$: $2x = 30, x = 15, y = 15$.

• C ✓ — uji titik pojok: $(0, 0) \to 0$; $(20, 0) \to 1.000.000$;
$(15, 15) \to 750.000 + 450.000 = 1.200.000$; $(0, 30) \to 900.000$.

• D ✗ — di $(15, 15)$ waktu menjahit $3 \cdot 15 + 15 = 60$ jam, habis terpakai.

• E ✓ — fungsi $50.000(x + y)$ bernilai $1.500.000$ di $(15, 15)$ dan $(0, 30)$, lebih besar daripada di $(20, 0)$.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 2 **Kunci: B, C, E**

Konsep: model: $3x + y \geq 12, x + 2y \geq 9, x \geq 0, y \geq 0$; fungsi biaya $f = 8.000x + 6.000y$ diminimumkan. Pada daerah tak terbatas, nilai minimum tetap dicari di titik pojok.

Analisis tiap pilihan:

• A ✗ — kendala berbentuk "$\geq$", sehingga daerahnya terbuka ke kanan atas; biaya minimum tetap ada, tetapi biaya maksimum tidak ada.

• B ✓ — titik pojok: $(0, 12) \to 72.000$; $(3, 3) \to 24.000 + 18.000 = 42.000$; $(9, 0) \to 72.000$.

• C ✓ — garis $x + 2y = 9$ memotong sumbu X di $(9, 0)$, dan $3 \cdot 9 + 0 \geq 12$ ✓.

• D ✗ — protein $6 + 4 = 10 < 12$. *Jebakan:* hanya mengecek serat ($2 + 8 = 10 \geq 9$).

• E ✓ — $8.000x + 24.000y$: $(9, 0) \to 72.000$; $(3, 3) \to 96.000$; $(0, 12) \to 288.000$.

Jawaban: B, C, dan E.

Latihan sub bab 1.5

No. 1 **Kunci: B**

Konsep: teorema sisa: sisa pembagian $L(x)$ oleh $(x - a)$ sama dengan $L(a)$; di sini $L(3)$ adalah laba untuk $x = 3$ (300 botol).

Langkah 1. $L(x) = 12x + 6 - (2x^3 - 5x^2 + 4x + 10) = -2x^3 + 5x^2 + 8x - 4$.

Langkah 2. $L(3) = -54 + 45 + 24 - 4 = 11$.

Cek ulang: $P(3) = 42$, $B(3) = 54 - 45 + 12 + 10 = 31$, dan $42 - 31 = 11$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: menghitung $B(3) - P(3)$; laba = pendapatan dikurangi biaya.

• C: nilainya benar, tetapi x dalam ratus botol, jadi $x = 3$ berarti 300 botol.

• D: menjumlahkan $P(3) + B(3) = 42 + 31$.

• E: hanya $B(3)$; yang ditanya sisa pembagian $L(x)$.

No. 2 **Kunci: A**

Konsep: teorema sisa: sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x - c)$ adalah $f(c)$; "habis dibagi" berarti sisanya 0.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1. $f(1) = 2 + a + b - 6 = 0 \Rightarrow a + b = 4$.
Langkah 2. $f(-2) = -16 + 4a - 2b - 6 = 12 \Rightarrow 2a - b = 17$.
Langkah 3. Dijumlahkan: $3a = 21, a = 7, b = -3$.
Langkah 4. $f(2) = 16 + 28 - 6 - 6 = 32$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- B: sisa oleh $(x + 2)$ dibaca -12, sehingga $a = 3, b = 1$.
- C: nilai a dan b tertukar ($a = -3, b = 7$).
- D: tanda b terbalik ($b = 3$).
- E: itu hasil kali ab, bukan sisa pembagian.

No. 3 Kunci: D

Konsep: volume balok = luas alas × tinggi, jadi tinggi = $V(x)$ dibagi luas alas (pembagian suku banyak).

Langkah 1. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 : (2x^2 + 5x + 2)$: suku pertama x;
$x(2x^2 + 5x + 2) = 2x^3 + 5x^2 + 2x$, sisa sementara $2x^2 + 5x + 2$.
Langkah 2. Suku berikutnya 1: $1 \cdot (2x^2 + 5x + 2)$, sisa 0. Jadi tinggi $= x + 1$.

Cek ulang: $(2x^2 + 5x + 2)(x + 1) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: $x + 2$ adalah salah satu faktor luas alas $(2x + 1)(x + 2)$, bukan tinggi.
- B: $2x + 1$ juga faktor luas alas.
- C: tanda hasil bagi salah pada langkah kedua pembagian bersusun.
- E: salah mengurangkan pada pembagian bersusun sehingga muncul sisa; pembagian ini habis.

No. 4 Kunci: D

Konsep: $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, jadi sisa g berbentuk $px + q$ dengan $g(-1) = -p + q$ dan $g(3) = 3p + q$.

Langkah 1. $g(-1) = (1 - 2)f(-1) = -1 \cdot 2 = -2$; $g(3) = (9 - 2)f(3) = 7 \cdot 10 = 70$.
Langkah 2. $-p + q = -2$ dan $3p + q = 70$: dikurangkan, $4p = 72, p = 18, q = 16$.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: itu sisa pembagian $f(x)$, bukan $g(x)$.
- B: koefisien x dan konstanta tertukar.
- C: sisa pembagian oleh suku banyak berderajat 2 harus berderajat paling tinggi 1.
- E: tanda $g(-1) = (1 - 2) \cdot 2$ dihitung $+2$.

No. 5 Kunci: C

Konsep: untuk pembagi $(ax - b)$, pakai Horner dengan $x = \frac{b}{a}$, lalu **hasil bagi** dibagi a; sisanya tetap.

Langkah 1. Horner $x = \frac{1}{2}$ pada $4, -2, 6, 1$: 4; $-2 + 2 = 0$; $6 + 0 = 6$; $1 + 3 = 4$.
Langkah 2. $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 6) + 4 = (2x - 1)(2x^2 + 3) + 4$.

Cek ulang: $(2x - 1)(2x^2 + 3) + 4 = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 3 + 4$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: hasil Horner dengan $x = \frac{1}{2}$ belum dibagi 2 (koefisien x pada pembagi).
- B: sisa ikut dibagi 2; yang dibagi hanya hasil bagi.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- D: Horner memakai $x = -\frac{1}{2}$, padahal pembuat nol $2x - 1$ adalah $\frac{1}{2}$.
- E: hasil bagi tidak dibagi 2, sisa malah dikali 2.

Latihan sub bab 1.6

No. 1 Kunci: 1B 2B 3S

Konsep: akar suku banyak = absis titik potong grafik dengan sumbu X; $f(a) = 0$ berarti $(x - a)$ faktor; $f(0)$ = titik potong sumbu Y.

Pernyataan 1. grafik memotong sumbu X di $x = -2, x = 1$, dan $x = 3$ → **Benar**.
Pernyataan 2. $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$, jadi menurut teorema faktor $(x - 1)$ faktor $f(x)$ → **Benar**.
Pernyataan 3. $f(0) = 6$ (titik potong sumbu Y di atas O). *Jebakan:* tanda konstanta → **Salah**.

Jawaban: Benar, Benar, Salah.

No. 2 Kunci: 1S 2B 3S

Konsep: untuk $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$: jumlah akar $-\frac{b}{a}$, hasil kali akar $-\frac{d}{a}$. Akar bulat dicoba dari faktor konstanta.

Pernyataan 1. $1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$. Akar-akarnya $-1, 2$, dan 3 → **Salah**.
Pernyataan 2. $-1 + 2 + 3 = 4 = -\frac{b}{a}$ → **Benar**.
Pernyataan 3. $(-1)(2)(3) = -6 = -\frac{d}{a}$. *Jebakan:* lupa tanda pada rumus hasil kali akar → **Salah**.

Jawaban: Salah, Benar, Salah.

Latihan sub bab 1.7

No. 1 Kunci: E

Konsep: fungsi rasional $\dfrac{ax - 1}{x + b}$ mempunyai asimtot tegak di pembuat nol penyebut, $x = -b$, dan asimtot datar $y = a$ (perbandingan koefisien x).

Langkah 1. Asimtot tegak $x = -3$, jadi $-b = -3, b = 3$.
Langkah 2. Melalui $(2, 3)$: $\dfrac{2a - 1}{2 + 3} = 3 \Rightarrow 2a - 1 = 15 \Rightarrow a = 8$.
Langkah 3. Asimtot datar $y = 8$.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: memakai ordinat titik $(2, 3)$ yang dilalui grafik.
- B: menukar asimtot tegak dengan asimtot datar.
- C: dari $\frac{2a-1}{5} = 3$ ditulis $2a = 15$ (lupa memindahkan -1).
- D: tanda b terbalik: penyebut $x - 3$, sehingga $\frac{2a-1}{-1} = 3$ dan $a = -1$.

No. 2 Kunci: B

Konsep: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; daerah asalnya memuat x yang membuat isi akar tidak negatif, daerah hasilnya semua nilai akar yang mungkin.

Langkah 1. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$, terdefinisi untuk $x^2 \geq 1$.
Langkah 2. Isi akar $x^2 - 1$ dapat bernilai berapa pun mulai dari 0 (di $x = \pm 1$) ke atas, jadi daerah hasilnya $y \geq 0$.

Jawaban: B.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: mengira nilai terkecil dicapai di $x = 0$, padahal $x = 0$ tidak termasuk daerah asal $f \circ g$.
• C: itu daerah asal f, bukan daerah hasil $f \circ g$.
• D: nilai 0 tercapai di $x = \pm 1$.
• E: itu daerah asal $f \circ g$, bukan daerah hasil.

Latihan sub bab 1.8

No. 1 Kunci: 1S 2B 3B

Konsep: fungsi logaritma $y = \log_2 x$ adalah invers fungsi eksponen $y = 2^x$; grafik keduanya simetris terhadap garis $y = x$.

Pernyataan 1. $2^1 = 2 \neq 1$; kedua grafik tidak berpotongan. *Jebakan:* mengira grafik yang simetris terhadap $y = x$ pasti bertemu di garis itu → **Salah**.
Pernyataan 2. $\log_2 8 = 3$ karena $2^3 = 8$ → **Benar**.
Pernyataan 3. $y = \log_2 x$ adalah invers $y = 2^x$, jadi titik (a, b) pada satu grafik bersesuaian dengan (b, a) pada grafik lainnya → **Benar**.

Jawaban: Salah, Benar, Benar.

No. 2 Kunci: B, C, E

Konsep: model eksponen $M(t) = M_0 \cdot a^t$ dikalikan a setiap tahun (bukan ditambah tetap); waktu untuk mencapai nilai tertentu dicari dengan logaritma.

Analisis tiap pilihan:
• A ✗ — tahun pertama Rp300.000, tahun kedua $5.300.000 \cdot 0{,}06 =$ Rp318.000. Bunga majemuk dihitung dari saldo terbaru.
• B ✓ — $5.000.000 \cdot 1{,}1236 = 5.618.000$.
• C ✓ — $(1{,}06)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{1{,}06} 3$.
• D ✗ — $(1{,}06)^{10} \approx 1{,}79 < 2$; saldo $\pm$ Rp8.954.000.
• E ✓ — $M(t+1) = M(t) \cdot 1{,}06$.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 3 Kunci: 1B 2S 3S

Konsep: pada $y = a \cdot b^x$: a = nilai di $x = 0$, b dicari dari titik kedua; grafik eksponen selalu di atas sumbu X bila $a > 0$.

Pernyataan 1. di $x = 0$: $y = a \cdot b^0 = a = 8$ → **Benar**.
Pernyataan 2. $8b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4}$, dan $b > 0$, jadi $b = \frac{1}{2}$. *Jebakan:* lupa menarik akar → **Salah**.
Pernyataan 3. $8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ untuk setiap x; sumbu X adalah asimtot datar → **Salah**.

Jawaban: Benar, Salah, Salah.

No. 4 Kunci: A, C, E

Konsep: sifat logaritma $\log(ab) = \log a + \log b$: perkalian intensitas menjadi **penjumlahan** taraf intensitas.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $10\log(100k) = 10\log 100 + 10\log k = 20 + \beta$.
- B ✗ — bertambah $10\log 2 \approx 3$ dB, bukan menjadi 2 kali. *Jebakan:* menganggap logaritma linear.
- C ✓ — intensitas menjadi 10 kali, taraf bertambah $10\log 10 = 10$ dB.
- D ✗ — selisih 30 dB berarti $\log \frac{I_1}{I_2} = 3$, jadi 1.000 kali.
- E ✓ — $10\log 1 = 0$.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 5 Kunci: 1B 2B 3S

Konsep: $y = \log_3(x+1)$ adalah grafik $y = \log_3 x$ yang digeser 1 satuan ke kiri: asimtot tegak $x = -1$, melalui $(0, 0)$.

Pernyataan 1. $\log_3 1 = 0$ → **Benar**.
Pernyataan 2. $\log_3 9 = 2$ karena $3^2 = 9$ → **Benar**.
Pernyataan 3. $x + 1 > 0$, jadi grafik mendekati garis $x = -1$. *Jebakan:* tanda geseran → **Salah**.

Jawaban: Benar, Benar, Salah.

Latihan sub bab 1.9

No. 1 Kunci: A

Konsep: untuk $y = a\sin(bx) + c$: amplitudo $a = \frac{\text{maks}-\text{min}}{2}$, garis tengah $c = \frac{\text{maks}+\text{min}}{2}$, periode $\frac{2\pi}{b}$.

Langkah 1. Dari grafik: maksimum 5, minimum 1, jadi $a = 2$ dan $c = 3$.
Langkah 2. Satu gelombang penuh selesai di $x = \pi$, jadi periode $\pi = \frac{2\pi}{b}$, $b = 2$.
Langkah 3. $a + b + c = 2 + 2 + 3 = 7$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: menganggap amplitudo $a = 5 - 1 = 4$, padahal amplitudo setengah selisih nilai maksimum dan minimum.
- C: mengira $b = 1$; grafik membuat dua gelombang penuh pada $[0, 2\pi]$, jadi periodenya π dan $b = 2$.
- D: mengira $b = \frac{1}{2}$ dari periode π (membagi periode dengan 2π).
- E: mengira c = nilai minimum 1; c adalah garis tengah $\frac{5+1}{2} = 3$.

No. 2 Kunci: C

Konsep: $\sin u = \sin\alpha$ memberi $u = \alpha$ atau $u = \pi - \alpha$ (ditambah kelipatan 2π). Misalkan $u = x - \frac{\pi}{6}$, lalu kembalikan ke x.

Langkah 1. $\sin u = \frac{1}{2}$, dengan $-\frac{\pi}{6} \le u \le \frac{11\pi}{6}$: $u = \frac{\pi}{6}$ atau $u = \frac{5\pi}{6}$.
Langkah 2. $x = u + \frac{\pi}{6}$: $x = \frac{\pi}{3}$ atau $x = \pi$.

Cek ulang: $2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: hanya penyelesaian di kuadran I; sinus juga positif di kuadran II.
- B: lupa menambahkan $\frac{\pi}{6}$: itu nilai $x - \frac{\pi}{6}$, bukan x.
- D: geseran dikerjakan terbalik (dikurangi $\frac{\pi}{6}$).
- E: penyelesaian kedua ditulis $\pi + \alpha$; di kuadran III sinus negatif.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kuis Akhir Bab 1

No. 1 Kunci: A, D

Konsep: pada perkalian matriks, baris kiri dikali kolom kanan. P (kelas × ukuran) dikali H (ukuran × harga) menghasilkan biaya tiap kelas. Label "ukuran" habis karena kolom P dan baris H sama-sama ukuran.

Langkah 1. Dalam ribu rupiah: X-A $= 10(60) + 15(65) + 5(70) = 600 + 975 + 350 = 1.925$.
Langkah 2. X-B $= 8(60) + 12(65) + 12(70) = 480 + 780 + 840 = 2.100$; X-C $= 12(60) + 10(65) + 6(70) = 720 + 650 + 420 = 1.790$.
Langkah 3. Total $= 1.925 + 2.100 + 1.790 = 5.815$ ribu; selisih X-A dan X-C $= 135$ ribu.

Analisis tiap pilihan:
• A ✓ — PH adalah matriks kolom biaya tiap kelas; X-B (Rp2.100.000,00) terbesar.
• B ✗ — totalnya Rp5.815.000,00. *Jebakan:* salah menjumlah ratusan ribu.
• C ✗ — selisihnya Rp135.000,00. *Jebakan:* salah mengurangkan satu kolom.
• D ✓ — X-B memesan 12 kaus L, jadi biaya bertambah $12 \times 5.000 = 60.000$ rupiah. Cukup memakai satu unsur, tanpa menghitung ulang semuanya.
• E ✗ — H berordo 3×1 dan P berordo 3×3; angka dalam $1 \neq 3$, jadi HP tidak terdefinisi. *Jebakan:* mengira perkalian matriks bersifat komutatif.

Jawaban: A dan D.

No. 2 Kunci: A

Konsep: kalikan dulu ruas kiri (baris × kolom), lalu samakan unsur yang seletak.

Langkah 1. Ruas kiri: baris $1 = (2 \cdot 1 + a(-1),\ 2 \cdot 2 + a \cdot 0) = (2 - a,\ 4)$; baris $2 = (b - 3,\ 2b)$.
Langkah 2. Samakan: $2 - a = 4$ sehingga $a = -2$; $b - 3 = -1$ sehingga $b = 2$. Unsur $2b = 2b$ selalu benar.
Langkah 3. $a + b = -2 + 2 = 0$.

Cek ulang: dengan $a = -2, b = 2$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, dan $2b = 4$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• B (-1): urutan perkalian dibalik (matriks kanan dikali matriks kiri), sehingga $b = 1$ dan $a = -2$.
• C (4): tanda a salah, $2 + a = 4$ sehingga $a = 2$.
• D (-6): tanda -3 salah, $b + 3 = -1$ sehingga $b = -4$.
• E (2): hanya menuliskan nilai b.

No. 3 Kunci: C, D, E

Konsep: perkalian matriks umumnya tidak komutatif ($AB \neq BA$), sehingga rumus aljabar bilangan seperti $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ tidak otomatis berlaku.

Langkah 1. $AB = \begin{pmatrix} 1+6 & 0+2 \\ 0+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
Langkah 2. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(AB) = 7 - 6 = 1$ (sama dengan $\det A \cdot \det B = 1 \cdot 1$).
Langkah 3. $AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Analisis tiap pilihan:
• A ✗ — $AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, tetapi $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, jadi $AB \neq BA$. *Jebakan:* menghitung satu urutan

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

saja.

• B ✗ — $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; karena $AB \neq BA$, bentuk $2AB$ salah. *Jebakan:* memakai rumus kuadrat bilangan.

• C ✓, D ✓ — Langkah 2.

• E ✓ — $AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, unsur di luar diagonal utama nol (Langkah 3).

Jawaban: C, D, dan E.

No. 4 Kunci: C

Konsep: untuk matriks $n \times n$, $\det(kA) = k^n \det A$, karena setiap baris dikali k.

Langkah 1. $\det A = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 12 + 2 = 14$.

Langkah 2. A berordo 2×2, jadi $\det(2A) = 2^2 \cdot 14 = 56$.

Cek ulang: $2A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\det = 48 + 8 = 56$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A (28): memakai $\det(2A) = 2\det A$.

• B (14): hanya $\det A$.

• D (10): salah tanda, $12 - 2$.

• E (112): memakai 2^3 seperti matriks 3×3.

No. 5 Kunci: A

Konsep: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\text{adj}(A)$ dan adjoin adalah **transpos** matriks kofaktor, jadi unsur baris ke-i kolom ke-j dari A^{-1} adalah $\dfrac{C_{ji}}{\det A}$.

Langkah 1. Sarrus: $(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0) - (0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = 13$.

Langkah 2. Yang dicari $\dfrac{C_{32}}{13}$. Minor M_{32}: hapus baris 3 dan kolom 2, tersisa $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$. Tanda posisi $(3,2)$ negatif, jadi $C_{32} = -3$.

Langkah 3. Unsurnya $-\dfrac{3}{13}$.

Cek ulang: baris 2 dari A^{-1} dikali kolom 3 dari A harus 1: $C_{12} = -(0-6) = 6$, $C_{22} = 1 - 0 = 1$, $C_{32} = -3$; baris 2 $= \frac{1}{13}(6, 1, -3)$; dikali $(0,3,1)$: $\frac{1}{13}(0 + 3 - 3) = 0$. Dikali kolom 2 dari A, $(2,1,0)$: $\frac{1}{13}(12 + 1 + 0) = 1$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• B ($\frac{4}{13}$): memakai C_{23} (indeks tidak ditukar).

• C ($\frac{3}{13}$): lupa tanda kofaktor posisi $(3,2)$.

• D ($-\frac{4}{13}$): memakai minor M_{23} tanpa tanda dan tanpa menukar indeks.

• E ($-\frac{3}{11}$): salah menghitung determinan (salah satu diagonal Sarrus terlewat).

No. 6 Kunci: B, C

Konsep: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; persamaan $AX = B$ diselesaikan dengan $X = A^{-1}B$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1. $\det A = 6 - 5 = 1$, jadi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Langkah 2. $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cek: $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓.

Analisis tiap pilihan:

• A ✗ — matriks $3A$ benar, tetapi $\det(3A) = 54 - 45 = 9 = 3^2 \det A$. *Jebakan:* memakai $\det(kA) = k \det A$.

• B ✓ — Langkah 1.

• C ✓ — Langkah 2.

• D ✗ — $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$, sesuai $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = 1$. *Jebakan:* salah tanda pada $(-1)(-5)$.

• E ✗ — transpos A^{-1} adalah $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; tanda -5 terlupa.

Jawaban: B dan C.

No. 7 Kunci: C

Konsep: pada $AX = B$, setiap baris A = satu persamaan (satu paket) dan setiap kolom A = satu variabel dengan urutan sama seperti X; penyelesaiannya $X = A^{-1}B$.

Langkah 1. Paket Hemat: $2x + y = 38$. Paket Keluarga: $3x + 2y = 63$.

Langkah 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 63 \end{pmatrix}$, sehingga $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 38 \\ 63 \end{pmatrix}$.

Cek ulang: $\det = 1$, invers $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, hasil $\begin{pmatrix} 76 - 63 \\ -114 + 126 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$. Paket Hemat $26 + 12 = 38$ ✓, Paket Keluarga $39 + 24 = 63$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: matriks baris 1×2 dikali matriks 2×2 menghasilkan matriks baris, bukan kolom $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; lagi pula susunannya memerlukan transpos.

• B: matriks koefisien ditransposkan (data satu paket ditulis sebagai kolom), sehingga persamaannya menjadi $2x + 3y = 38$.

• D: lupa invers; mengalikan A dengan B tidak menghasilkan X.

• E: urutan kolom tertukar; hasilnya $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, bukan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

No. 8 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: $x = \dfrac{D_x}{D}, y = \dfrac{D_y}{D}$; D_y diperoleh dengan mengganti **kolom kedua** (kolom y) dengan konstanta.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Pernyataan 1. $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5 \rightarrow$ **Benar**.

Pernyataan 2. $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$, bukan $9 \rightarrow$ **Salah**.

Pernyataan 3. $D_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$, jadi $x = 2$ dan $y = \frac{5}{5} = 1$. Cek: $6 - 2 = 4$ ✓, $2 + 1 = 3$ ✓ $\rightarrow$ **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

Jebakan: nilai 9 diperoleh bila hasil kali diagonal samping $(4 \cdot 1)$ tidak dikurangkan.

No. 9 Kunci: B

Konsep: penyelesaian tidak tunggal bila $\det A = 0$; tak hingga banyak bila garisnya **berimpit** (konstanta ikut sebanding), tidak ada bila sejajar.

Langkah 1. $\det A = (k-1)(k+3) - 12 = k^2 + 2k - 15 = (k-3)(k+5) = 0$, jadi $k = 3$ atau $k = -5$.

Langkah 2. $k = 3$: $2x + 4y = 8$ dan $3x + 6y = 12$, keduanya setara $x + 2y = 4 \rightarrow$ berimpit, tak hingga banyak penyelesaian.

Langkah 3. $k = -5$: $-6x + 4y = 8$ dan $3x - 2y = 12$. Persamaan kedua dikali -2: $-6x + 4y = -24 \neq 8 \rightarrow$ sejajar, tidak ada penyelesaian.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A (-5): untuk nilai ini sistem justru tidak mempunyai penyelesaian.
- C: berhenti di $\det A = 0$ tanpa memeriksa konstanta.
- D dan E: salah tanda saat memfaktorkan $k^2 + 2k - 15$.

No. 10 Kunci: B

Konsep: nilai maksimum fungsi objektif pada daerah penyelesaian tercapai di titik pojok.

Langkah 1. Misalkan x = karung kompos, y = jeriken pupuk cair. Kendala: $3x + y \leq 60$ (limbah), $x + 2y \leq 40$ (waktu), $x \geq 0, y \geq 0$. Objektif $Z = 15x + 20y$ (ribu rupiah).

Langkah 2. Titik pojok: $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(0, 20)$, dan perpotongan kedua garis: dari $3x + y = 60$ dan $x + 2y = 40$ diperoleh $5x = 80$, $x = 16$, $y = 12$.

Langkah 3. $Z(20, 0) = 300$, $Z(0, 20) = 400$, $Z(16, 12) = 240 + 240 = 480$.

Cek ulang: $(16, 12)$: limbah $48 + 12 = 60$ ✓, waktu $16 + 24 = 40$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A (Rp400.000,00): titik pojok $(0, 20)$, hanya membuat pupuk cair.
- C (Rp500.000,00): titik potong ditukar menjadi $(12, 16)$; titik ini melanggar kendala waktu $(12 + 32 = 44 > 40)$.
- D (Rp300.000,00): titik pojok $(20, 0)$, hanya membuat kompos.
- E (Rp700.000,00): memakai $(20, 20)$ dari dua titik potong sumbu yang berbeda; titik itu di luar daerah penyelesaian.

No. 11 Kunci: B, C

Konsep: tulis persamaan garis batas dari titik potong sumbu, tentukan tanda dengan uji titik O, lalu uji fungsi objektif di semua titik pojok.

Langkah 1. Garis melalui $(6, 0)$ dan $(0, 6)$: $x + y = 6$; garis melalui $(4, 0)$ dan $(0, 8)$: $2x + y = 8$. Daerah memuat O, jadi $x + y \leq 6$ dan $2x + y \leq 8$, ditambah $x, y \geq 0$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 2. Titik pojok: $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,6)$, dan perpotongan $x+y=6$ dengan $2x+y=8$, yaitu $(2,4)$.
Langkah 3. $f=2x+3y$: $(4,0)\to 8$, $(2,4)\to 16$, $(0,6)\to 18$; maksimum 18. $g=3x+y$: $(4,0)\to 12$, $(2,4)\to 10$, $(0,6)\to 6$; maksimum di $(4,0)$.

Analisis tiap pilihan:
- A ✗ — tandanya $\leq$ (daerah memuat O). *Jebakan:* tanda terbalik.
- B ✓, C ✓ — Langkah 2 dan 3.
- D ✗ — maksimum g di $(4,0)$. *Jebakan:* mengira optimum selalu di titik potong dua garis.
- E ✗ — $2(3)+3=9>8$, melanggar kendala kedua.

Jawaban: B dan C.

No. 12 Kunci: D

Konsep: pembagi berderajat 2 memberi sisa $px+q$. Teorema sisa hanya boleh dipakai pada **akar pembagi**.

Langkah 1. $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$, akarnya 2 dan -3. Tulis $f(x)=(x-2)(x+3)H(x)+px+q$, sehingga $f(2)=2p+q$ dan $f(-3)=-3p+q$.
Langkah 2. Dari pembagian oleh $x^2-4=(x-2)(x+2)$: $f(2)=3(2)+1=7$. Dari pembagian oleh $x+3$: $f(-3)=2$.
Langkah 3. $2p+q=7$ dan $-3p+q=2$. Kurangkan: $5p=5$, jadi $p=1$ dan $q=5$. Sisanya $x+5$.
Cek ulang: $S(2)=7=f(2)$ ✓ dan $S(-3)=2=f(-3)$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A $(3x+1)$: menyalin sisa pembagian oleh x^2-4, padahal pembaginya berbeda.
- B $(5x+1)$: nilai p dan q tertukar.
- C $(-5x+17)$: akar $x+3$ diambil $+3$ (salah tanda), sehingga $3p+q=2$.
- E $(-7x-19)$: memakai $f(-2)=-5$ sebagai pengganti $f(2)$; $x=-2$ bukan akar x^2+x-6.

No. 13 Kunci: D

Konsep: untuk pembagi $(ax+b)$, lakukan Horner dengan $k=-\frac{b}{a}$, lalu **bagi hasil baginya dengan a**; sisanya tetap.

Langkah 1. $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$, jadi $k=-\frac{1}{2}$. Koefisien $2,-5,0,4$ (ingat 0 untuk x).
Langkah 2. Horner: turunkan 2; $2\cdot(-\frac{1}{2})=-1$, $-5-1=-6$; $-6\cdot(-\frac{1}{2})=3$, $0+3=3$; $3\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$, $4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.
Langkah 3. $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+3)+\frac{5}{2}=(2x+1)\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}$.
Cek ulang: $(2x+1)\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)=2x^3-5x^2+\frac{3}{2}$, ditambah $\frac{5}{2}$ menjadi $2x^3-5x^2+4$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: hasil Horner belum dibagi 2.
- B dan C: memakai $k=+\frac{1}{2}$ (tanda salah), dengan atau tanpa dibagi 2.
- E: sisa $\frac{5}{2}$ ikut ditulis sebagai suku tetap hasil bagi.

No. 14 Kunci: A, C, D

Konsep: pengurangan polinomial mengubah tanda **semua** suku pengurang; teorema sisa: sisa pembagian oleh $(x-k)$ adalah nilai polinomial di $x=k$.

Langkah 1. $L(x)=60x-(0{,}02x^3-x^2+30x+500)=-0{,}02x^3+x^2+30x-500$.
Langkah 2. $L(10)=-20+100+300-500=-120$: rugi Rp120.000,00, bukan untung.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 3. $L(20) = -160 + 400 + 600 - 500 = 340$; menurut teorema sisa, angka ini juga sisa pembagian $L(x)$ oleh $(x - 20)$.

Analisis tiap pilihan:
• A ✓ — Langkah 1.
• B ✗ — hasilnya negatif (rugi). *Jebakan:* mengabaikan tanda.
• C ✓, D ✓ — Langkah 3.
• E ✗ — $2B(x)$ adalah biaya dua kali memproduksi x unit (biaya tetap 500 ikut dua kali); biaya $2x$ unit adalah $B(2x)$. *Jebakan:* menyamakan perkalian skalar dengan mengganti variabel.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 15 Kunci: A

Konsep: teorema faktor: $(x - k)$ faktor $f(x) \Leftrightarrow f(k) = 0$. Setelah satu faktor diketahui, bagi dengan Horner untuk mendapat faktor lain.

Langkah 1. $f(-2) = -8 + 4p + 8 - 12 = 4p - 12 = 0$, jadi $p = 3$.
Langkah 2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. Horner $k = -2$ pada $1, 3, -4, -12$: baris jumlah $1, 1, -6, 0$. Hasil bagi $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.
Langkah 3. Akar lainnya 2 dan -3.

Cek ulang: $f(2) = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$ ✓, $f(-3) = -27 + 27 + 12 - 12 = 0$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• B: tanda akar dibaca sama dengan tanda di dalam faktor $(x + 3)(x - 2)$.
• C: salah tanda saat menghitung p ($p = -3$), sehingga faktornya $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$.
• D: menganggap -2 akar kembar.
• E: memfaktorkan $x^2 + x - 6$ secara keliru menjadi $(x - 3)(x + 4)$.

No. 16 Kunci: B, D, E

Konsep: polinomial dari akar-akarnya: $f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, dengan k dari satu titik lain.

Langkah 1. $f(x) = k(x + 2)(x - 1)(x - 3)$. Dari $(0, 6)$: $k \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = 6k = 6$, jadi $k = 1$.
Langkah 2. Jabarkan: $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$; dikali $(x - 3)$: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
Langkah 3. $(x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6$ adalah faktor f. Sisa oleh $(x - 2)$: $f(2) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -4$. Jumlah akar $-2 + 1 + 3 = 2$ (Vieta: $-\frac{-2}{1} = 2$). Pada grafik, di antara $x = 1$ dan $x = 3$ kurva di bawah sumbu X.

Analisis tiap pilihan:
• A ✗ — tanda koefisien x^2 dan suku tetap salah; yang benar $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. *Jebakan:* menulis faktor $(x - 2)(x + 1)(x + 3)$ dari tanda akar yang terbalik.
• B ✓ — $(x - 3)(x + 2)$ faktor f.
• C ✗ — sisanya -4. *Jebakan:* lupa tanda $(2 - 3) = -1$.
• D ✓, E ✓ — Langkah 3.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 17 Kunci: C

Konsep: susun model volume sebagai polinomial, cari akar yang memenuhi syarat konteks (domain).

Langkah 1. Alas $(20 - 2x) \times (12 - 2x)$, tinggi x, dengan $0 < x < 6$. Volume $x(20 - 2x)(12 - 2x) = 192$.
Langkah 2. Coba bilangan bulat di domain: $x = 1 \to 180$, $x = 2 \to 256$, $x = 3 \to 252$, $x = 4 \to 4 \cdot 12 \cdot 4 = 192$ ✓, $x = 5 \to 100$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 3. Untuk $x = 4$, alasnya $12\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. (Akar lain dari $x^3 - 16x^2 + 60x - 48 = 0$ adalah $6 \pm 2\sqrt{6}$, tidak bulat.)

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A ($x = 2$): volumenya 256 cm³.
- B ($x = 1$): volumenya 180 cm³, mendekati tetapi tidak sama.
- D ($x = 3$): 252 cm³.
- E ($x = 5$): 100 cm³.

No. 18 Kunci: 1S 2B 3B

Konsep: fungsi rasional $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ berasimtot tegak di pembuat nol penyebut dan berasimtot datar $y = \dfrac{a}{c}$; nilai asimtot datar itu tidak pernah dicapai.

Langkah 1. Tulis $f(x) = \dfrac{2(x+1)-4}{x+1} = 2 - \dfrac{4}{x+1}$. Asimtot tegak $x = -1$, asimtot datar $y = 2$ (sesuai garis putus-putus).

Pernyataan 1. Karena $\dfrac{4}{x+1}$ tidak pernah 0, $f(x)$ tidak pernah 2. Range: semua bilangan real kecuali **2**, bukan 1 → **Salah**.

Pernyataan 2. $f(0) = \dfrac{-2}{1} = -2$ → **Benar**.

Pernyataan 3. Untuk $x > -1$, $x + 1 > 0$ sehingga $\dfrac{4}{x+1} > 0$ dan $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x+1} < 2$. Pada gambar, cabang kanan selalu di bawah garis $y = 2$ → **Benar**.

Jawaban: Salah, Benar, Benar.

Jebakan: pernyataan 1 menggoda karena grafik memotong sumbu X di $x = 1$; angka 1 itu titik potong, bukan nilai yang dikecualikan dari range.

No. 19 Kunci: E

Konsep: x di domain $g \circ f$ bila (1) x di domain f dan (2) $f(x)$ di domain g. Yang dilarang g adalah nilai $f(x)$, bukan nilai x.

Langkah 1. Domain f: $x - 1 \geq 0$, jadi $x \geq 1$.

Langkah 2. g tidak terdefinisi bila masukannya 3, jadi $f(x) \neq 3$: $\sqrt{x-1} \neq 3 \Leftrightarrow x - 1 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq 10$.

Langkah 3. Domain $g \circ f = \{x \mid x \geq 1,\ x \neq 10\}$.

Cek ulang: $x = 10$: $f(10) = 3$ dan $g(3)$ tidak ada ✓; $x = 1$: $f(1) = 0, g(0) = -\frac{1}{3}$ ada ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: larangan g diterapkan pada x ($x \neq 3$).
- B: lupa mengkuadratkan ($x - 1 \neq 3$).
- C: ujung $x = 1$ dibuang padahal $\sqrt{0} = 0$ sah.
- D: hanya memakai syarat g dan melupakan syarat akar.

No. 20 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: pada model eksponen, setiap selang waktu yang sama nilainya **dikali** bilangan yang sama, bukan ditambah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1. Dari grafik: $N(0) = 200$, $N(3) = 400$, $N(6) = 800$. Setiap 3 pekan dikali 2, jadi $N(t) = 200 \cdot 2^{t/3}$.

Pernyataan 1. Dikali 2 setiap 3 pekan → **Benar**.

Pernyataan 2. $N(1{,}5) = 200 \cdot 2^{1/2} = 200\sqrt{2} \approx 283$, bukan 300 → **Salah**. (300 adalah titik tengah 200 dan 400, cara berpikir linear.)

Pernyataan 3. $N(9) = 200 \cdot 2^3 = 1.600$ → **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 21 Kunci: B

Konsep: penurunan $r\%$ per tahun: $P(t) = P_0(1-r)^t$; waktu dicari dengan logaritma, lalu dibulatkan ke atas karena t bilangan bulat.

Langkah 1. $20 \cdot 0{,}9^t < 10$ (juta) $\Leftrightarrow 0{,}9^t < 0{,}5$.

Langkah 2. Ambil log: $t \log 0{,}9 < \log 0{,}5 = -0{,}301$. Karena $\log 0{,}9$ negatif, tanda berbalik: $t > \dfrac{0{,}301}{0{,}0458} \approx 6{,}57$.

Langkah 3. Bilangan bulat terkecil: $t = 7$.

Cek ulang: $0{,}9^6 \approx 0{,}531$ (harga ±10,6 juta, belum kurang dari 10 juta); $0{,}9^7 \approx 0{,}478$ (±9,6 juta) ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A (6): membulatkan 6,57 ke bawah.
- C (5): menganggap turun tetap Rp2.000.000,00 per tahun (linear).
- D (8): menambah satu tahun lagi setelah hasil dibulatkan.
- E (10): menganggap 10% per tahun habis dalam 10 tahun.

No. 22 Kunci: B, D, E

Konsep: ${}^a\log u$ terdefinisi bila $u > 0$; grafiknya berasimtot tegak di $u = 0$. ${}^a\log u = c \Leftrightarrow u = a^c$.

Langkah 1. Syarat $x + 4 > 0$, jadi domain $x > -4$ dan asimtot tegak $x = -4$.

Langkah 2. $f(12) = {}^2\log 16 - 1 = 4 - 1 = 3$.

Langkah 3. Titik potong sumbu X: ${}^2\log(x+4) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = -2$. Sumbu Y: $f(0) = {}^2\log 4 - 1 = 1$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — asimtotnya $x = -4$. *Jebakan:* tanda di dalam kurung.
- B ✓ — Langkah 1.
- C ✗ — $f(12) = 3$. *Jebakan:* lupa dikurangi 1.
- D ✓, E ✓ — Langkah 3.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 23 Kunci: E

Konsep: dari grafik, a = sumbu tengah dan b = amplitudo; pertidaksamaan kosinus diselesaikan dalam satu periode, lalu dikalikan banyak periode.

Langkah 1. Grafik terendah 8 m (di $t = 0$) dan tertinggi 16 m, jadi $a = \dfrac{16+8}{2} = 12$ dan $b = \dfrac{16-8}{2} = 4$. Periode $\dfrac{2\pi}{\pi/3} = 6$ detik.

Langkah 2. $12 - 4\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right) > 14 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right) < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} < \dfrac{\pi t}{3} < \dfrac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 2 < t < 4$ dalam periode pertama.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 3. Setiap periode (6 detik) lamanya 2 detik. Selang $0 \le t \le 12$ memuat dua periode penuh, jadi $2 \times 2 = 4$ detik ($2 < t < 4$ dan $8 < t < 10$).

Cek ulang: $y(3) = 12 + 4 = 16 > 14$ ✓; $y(2) = 12 - 4\cos\dfrac{2\pi}{3} = 14$ (tepat di batas) ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A (2): hanya menghitung satu periode.

• B (3): menganggap grafik naik lurus dari 8 m ke 16 m, sehingga 14 m tercapai di $t = 2{,}25$ dan dilewati sampai $t = 3{,}75$ (1,5 detik per periode).

• C (6): menjawab panjang periode.

• D (8): lama ujung bilah berada di **bawah** 14 m.

No. 24 Kunci: D

Konsep: banyak penyelesaian $|f(x)| = k$ = banyak titik potong grafik $y = |f(x)|$ dengan garis mendatar $y = k$.

Langkah 1. Grafik $x^2 - 4x$ bernilai negatif di antara 0 dan 4 (puncak bawah $(2, -4)$); bagian itu dicerminkan sehingga muncul puncak atas $(2, 4)$.

Langkah 2. Garis $y = 3$ berada di antara 0 dan 4, jadi memotong keempat kaki grafik W: empat titik.

Langkah 3 (cek aljabar). $x^2 - 4x = 3$ memberi $x = 2 \pm \sqrt{7}$ (dua akar); $x^2 - 4x = -3$ memberi $x = 1$ atau $x = 3$. Totalnya 4.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A (2): hanya menyelesaikan $x^2 - 4x = 3$.

• B (3): mengira garis menyinggung puncak (itu terjadi untuk $k = 4$).

• C (0): mengira nilai mutlak tidak mungkin bernilai 3 di antara akar.

• E (1): hanya menghitung satu sisi grafik.

No. 25 Kunci: A, C, E

Konsep: $y = D + A\sin(Bt)$: maksimum $D + A$, minimum $D - A$, periode $\dfrac{2\pi}{B}$.

Langkah 1. Maksimum $22 + 3 = 25$, minimum 19, periode $\dfrac{2\pi}{\pi/6} = 12$ jam.

Langkah 2. $T = 23{,}5 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ atau $\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t = 1$ atau $t = 5$. Pertama kali $t = 1$, pukul 07.00.

Langkah 3. Minimum saat $\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{3\pi}{2}$, yaitu $t = 9$ (pukul 15.00). Suhu di atas 23,5 °C untuk $1 < t < 5$: 4 jam.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓, C ✓, E ✓ — Langkah 1–3.

• B ✗ — periodenya 12 jam. *Jebakan:* membaca $\frac{\pi}{6}$ sebagai periode 6.

• D ✗ — 19 °C tercapai pukul 15.00. *Jebakan:* mengira minimum tepat di tengah periode setelah awal.

Jawaban: A, C, dan E.

Latihan sub bab 2.1

No. 1 Kunci: D

Konsep: dua vektor sama bila setiap komponennya sama; $2\vec{a} - \vec{b}$ dihitung per komponen.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1. $2\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2p-3 \\ 4+1 \\ -2-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Langkah 2. $2p - 3 = 1 \Rightarrow p = 2$; komponen kedua $5 = 5$ ✓; $-2 - q = 5 \Rightarrow q = -7$.

Langkah 3. $p + q = 2 - 7 = -5$.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: menulis komponen pertama $2p + 3 = 1$ (tanda $-\vec{b}$ terlupa), sehingga $p = -1$.
- B: menulis komponen ketiga $-2 + q = 5$, sehingga $q = 7$.
- C: lupa faktor 2 pada $\vec{a}$: $p - 3 = 1$ dan $-1 - q = 5$.
- E: hanya nilai q.

No. 2 Kunci: A, C, E

Konsep: vektor perpindahan $\vec{PQ} = Q - P$; jarak = panjang vektor $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; titik tengah = rata-rata koordinat.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $Q - P = (7-1, 10-2, 5-5)$.
- B ✗ — $|\vec{PQ}| = \sqrt{36 + 64} = 10$ satuan = 100 meter. *Jebakan:* menjumlahkan $6 + 8$.
- C ✓ — $\vec{PR} = (6, 8, -5)$, $|\vec{PR}| = \sqrt{36 + 64 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.
- D ✗ — titik tengah $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+10}{2}, 5\right) = (4, 6, 5)$; $(3, 4)$ adalah setengah $\vec{PQ}$, bukan titik tengah.
- E ✓ — $10 + 5 = 15$ satuan = 150 meter.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 3 Kunci: E

Konsep: A, B, C segaris bila $\vec{AC} = t\,\vec{AB}$ untuk suatu bilangan t.

Langkah 1. $\vec{AB} = (2, 2, -4)$ dan $\vec{AC} = (k-1, 6, m-3)$.

Langkah 2. Komponen kedua: $6 = 2t$, jadi $t = 3$.

Langkah 3. $k - 1 = 6 \Rightarrow k = 7$; $m - 3 = -12 \Rightarrow m = -9$. Jadi $k + m = -2$.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: tanda komponen ketiga salah: $m - 3 = 12$, sehingga $m = 15$.
- B: kelipatan diambil $t = \frac{4}{2} = 2$ dari ordinat C dan B, padahal yang dibandingkan komponen vektor $\vec{AC}$ dan $\vec{AB}$.
- C: hanya nilai k.
- D: hanya nilai m.

No. 4 Kunci: A, B, E

Konsep: baca koordinat $P(-3, -1)$, $M(1, 2)$, $J(5, 5)$ dari gambar; vektor $\vec{XY} = Y - X$, panjang $\sqrt{a^2 + b^2}$, vektor satuan = vektor dibagi panjangnya.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $\vec{PM} = (4, 3)$, panjangnya $\sqrt{16 + 9} = 5$ satuan.
- B ✓ — titik tengah PJ adalah $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (1, 2) = M$.
- C ✗ — $\vec{MJ} = J - M = (4, 3)$; $(-4, -3)$ adalah $\vec{JM}$. *Jebakan:* mengurangkan dengan urutan terbalik.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- D ✗ — $\frac{1}{4}(8,6) = (2;\ 1{,}5)$, jadi $Q = (-1;\ 0{,}5)$.
- E ✓ — $\vec{PJ} = (8,6)$, panjang 10, dibagi panjangnya menjadi $(0{,}8;\ 0{,}6)$.

Jawaban: A, B, dan E.

No. 5 Kunci: B

Konsep: titik berat segitiga: $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; panjang $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Langkah 1. $\vec{g} = \frac{1}{3}(6,3,6) = (2,1,2)$.

Langkah 2. $|\vec{OG}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: jumlah ketiga vektor posisi $(6,3,6)$ tidak dibagi 3.
- C: komponen ketiga G terlupa.
- D: memakai titik tengah AB, $(3,-1,2)$, bukan titik berat.
- E: menjumlahkan komponen $2 + 1 + 2$ tanpa rumus panjang.

Latihan sub bab 2.2

No. 1 Kunci: A, C, D

Konsep: $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, sehingga $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$; proyeksi skalar $\vec{a}$ pada $\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Analisis tiap pilihan:
- A ✓ — $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$: $37 = 16 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9$.
- B ✗ — $\cos\theta = \frac{6}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}$, jadi $\theta = 60^\circ$.
- C ✓ — $16 - 12 + 9 = 13$.
- D ✓ — $\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 6 + 9$.
- E ✗ — $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{6}{3} = 2$; nilai $\frac{3}{2}$ adalah proyeksi $\vec{b}$ pada $\vec{a}$. *Jebakan:* membagi dengan panjang vektor yang salah.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 2 Kunci: A, C, E

Konsep: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$; tegak lurus bila hasilnya 0; proyeksi skalar $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$, proyeksi vektor $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$.

Analisis tiap pilihan:
- A ✓ — $8 - 1 - 2 = 5$.
- B ✗ — hasil kali skalar positif berarti sudutnya lancip.
- C ✓ — $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 - p - 6 = 0 \Rightarrow p = -4$.
- D ✗ — proyeksi vektor $= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{5}{9}\vec{a}$. *Jebakan:* membagi dengan $|\vec{a}|$, bukan $|\vec{a}|^2$.
- E ✓ — $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{5}{3}$ dengan $|\vec{a}| = 3$.

Jawaban: A, C, dan E.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Latihan sub bab 2.3

No. 1 Kunci: B

Konsep: pusat lingkaran berjarak sama ke dua titik yang dilalui, jadi terletak pada sumbu ruas garis kedua titik itu.

Langkah 1. Sumbu ruas garis $(0,1)$-$(4,1)$ adalah $x=2$; dengan $y=x+1$, pusatnya $(2,3)$.
Langkah 2. $r^2=(0-2)^2+(1-3)^2=8$.
Langkah 3. $(x-2)^2+(y-3)^2=8 \Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+4+9-8=0$, yaitu $x^2+y^2-4x-6y+5=0$.

Cek ulang: titik $(4,1)$: $16+1-16-6+5=0$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: lupa mengurangkan r^2: konstanta $a^2+b^2-r^2$ ditulis $4+9$; persamaan ini bahkan hanya memuat satu titik.
• C: tanda pusat terbalik; bentuk $x^2+y^2+4x+6y+\ldots$ berpusat di $(-2,-3)$.
• D: menghitung konstanta $r^2-a^2-b^2$ (tanda terbalik).
• E: lupa faktor 2: $(x-a)^2$ menghasilkan $-2ax$, jadi untuk $a=2$ koefisien x adalah -4.

No. 2 Kunci: C

Konsep: pusat = titik potong kedua garis; jari-jari = jarak pusat ke O. Lingkaran yang melalui O tidak mempunyai suku konstanta.

Langkah 1. Jumlahkan kedua garis: $2x=6, x=3, y=2$. Pusat $(3,2)$, $r^2=9+4=13$.
Langkah 2. $(x-3)^2+(y-2)^2=13 \Rightarrow x^2+y^2-6x-4y=0$.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: tanda koordinat pusat terbalik.
• B: konstanta ditulis $-r^2$, padahal $c=a^2+b^2-r^2=0$.
• D: koordinat pusat tertukar menjadi $(2,3)$.
• E: lupa mengurangkan r^2: persamaan ini hanya memuat satu titik, $(3,2)$.

Latihan sub bab 2.4

No. 1 Kunci: A, C, D

Konsep: garis singgung $x^2+y^2=r^2$ di titik (x_1,y_1) adalah $x_1x+y_1y=r^2$; panjang ruas singgung dari titik luar P adalah $\sqrt{OP^2-r^2}$.

Analisis tiap pilihan:
• A ✓ — garis kutub P: $7x+y=25$. Disubstitusikan ke L:
$x^2+(25-7x)^2=25 \Rightarrow x^2-7x+12=0, x=3$ atau 4, jadi titik singgung $(3,4)$ dan $(4,-3)$.
• B ✗ — kedua garis melalui P, jadi berpotongan, tidak sejajar.
• C ✓ — $\sqrt{OP^2-r^2}=\sqrt{49+1-25}=5$.
• D ✓ — garis singgung di $(4,-3)$: $4x-3y=25$, dan P memenuhinya: $28-3=25$ ✓.
• E ✗ — gradien garis singgung $-\frac{3}{4}$ (di $(3,4)$) dan $\frac{4}{3}$ (di $(4,-3)$); hasil kalinya -1, jadi sudutnya 90°.

Jawaban: A, C, dan D.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 2 **Kunci: A, C, E**

Konsep: garis singgung lingkaran berpusat (a, b) di titik (x_1, y_1) pada lingkaran: $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$. Garis menyinggung lingkaran bila jarak pusat ke garis sama dengan r.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — pusat $(2, -3)$, $r = \sqrt{4 + 9 + 12} = 5$; rumus $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$: $3(x - 2) + 4(y + 3) = 25$, yaitu $3x + 4y = 19$.
- B ✗ — yang melalui pusat adalah jari-jari ke titik singgung; garis singgung tegak lurus jari-jari itu.
- C ✓ — jarak pusat ke garis $\frac{|6 - 12 + 31|}{5} = 5 = r$.
- D ✗ — $\frac{|6 - 12 - 19|}{5} = 5$; jarak pusat ke garis singgung selalu sama dengan jari-jari.
- E ✓ — $20 - 3 = 17$ ✓; gradien $\frac{4}{3}$ dan $-\frac{3}{4}$, hasil kalinya -1.

Jawaban: A, C, dan E.

Latihan sub bab 2.5

No. 1 **Kunci: 1B 2S 3S**

Konsep: juring bersudut α: luas $\frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2$, panjang busur $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, keliling = busur + $2r$.

Pernyataan 1. $\frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 = 12\pi$ → **Benar**.

Pernyataan 2. $\frac{120}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 = 4\pi$ m. *Jebakan:* memakai $\frac{1}{2}$ lingkaran → **Salah**.

Pernyataan 3. keliling juring = busur + dua jari-jari $= 4\pi + 12$ m. *Jebakan:* hanya satu jari-jari → **Salah**.

Jawaban: Benar, Salah, Salah.

No. 2 **Kunci: 1B 2B 3S**

Konsep: juring $\frac{1}{n}$ lingkaran: sudut $\frac{360^\circ}{n}$, luas $\frac{1}{n}\pi r^2$, busur $\frac{1}{n} \cdot 2\pi r$, keliling = busur + $2r$, dengan $r = \frac{d}{2}$.

Pernyataan 1. $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ → **Benar**.

Pernyataan 2. $\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 15^2 = \frac{225\pi}{8}$ → **Benar**.

Pernyataan 3. busur $\frac{1}{8} \cdot 30\pi = \frac{15\pi}{4}$, ditambah **dua** jari-jari: $\frac{15\pi}{4} + 30$. *Jebakan:* hanya satu jari-jari → **Salah**.

Jawaban: Benar, Benar, Salah.

Latihan sub bab 2.6

No. 1 **Kunci: C**

Konsep: pencerminan terhadap garis $x = h$: $(x, y) \to (2h - x,\ y)$. Untuk bayangan kurva, nyatakan x dan y asal dalam x' dan y', lalu substitusikan.

Langkah 1. $x' = 2 - x$ dan $y' = y$, jadi $x = 2 - x', y = y'$.

Langkah 2. Substitusi: $2(2 - x') - 3y' + 6 = 0 \Rightarrow -2x' - 3y' + 10 = 0$, yaitu $2x + 3y - 10 = 0$.

Cek ulang: titik $(0, 2)$ pada garis asal berbayangan $(2, 2)$, dan $4 + 6 - 10 = 0$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: tanda konstanta salah saat menyederhanakan $2(2 - x) - 3y + 6$.
- B: menggeser garis 2 satuan ke kanan ($x = x' - 2$), bukan mencerminkan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- D: memakai pencerminan terhadap sumbu Y ($x \to -x$), bukan terhadap $x = 1$.
- E: memakai pencerminan terhadap sumbu X ($y \to -y$).

No. 2 Kunci: A, C, D

Konsep: dilatasi pusat P faktor k: $\vec{PX'} = k\,\vec{PX}$. Faktor negatif membalik ke sisi lain P; luas bayangan $= k^2 \times$ luas asal.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $K - P = (2, 2)$, dikali $-\frac{1}{2}$ menjadi $(-1, -1)$, lalu $P + (-1, -1) = (0, 1)$.
- B ✗ — luas $KLM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$; luas bayangan $= k^2 \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$. *Jebakan:* mengalikan dengan $|k|$, bukan k^2.
- C ✓ — dilatasi memetakan garis ke garis yang sejajar.
- D ✓ — $\vec{PL'} = -\frac{1}{2}\vec{PL}$: searah garis yang sama tetapi berlawanan arah karena $k < 0$.
- E ✗ — $(2, 5)$ diperoleh bila tanda faktor skala diabaikan; dengan $k = -\frac{1}{2}$: $M - P = (2, 6) \to (-1, -3)$, jadi $M' = (0, -1)$.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 3 Kunci: D

Konsep: pencerminan tidak mengubah jari-jari; cukup cerminkan pusatnya. Terhadap garis $y = x$: $(a, b) \to (b, a)$.

Langkah 1. Pusat $(3, -1)$ dan $r^2 = 9 + 1 - 1 = 9$.

Langkah 2. Bayangan pusat $(-1, 3)$; $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: memakai pencerminan terhadap garis $y = -x$: $(3, -1) \to (1, -3)$.
- B: memakai pencerminan terhadap titik O: $(3, -1) \to (-3, 1)$.
- C: memakai pencerminan terhadap sumbu X.
- E: pusat benar, tetapi tanda konstanta diubah sehingga jari-jarinya tidak lagi 3.

No. 4 Kunci: B, C, E

Konsep: pada pencerminan, cermin adalah sumbu ruas garis yang menghubungkan titik dan bayangannya: ruas itu tegak lurus cermin dan titik tengahnya pada cermin. Terhadap $y = x + k$: $(x, y) \to (y - k,\ x + k)$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — $A(3, 0)$ dan $A'(-1, 4)$: arah $(-4, 4)$ bergradien -1, jadi AA' **tegak lurus** cermin.
- B ✓ — terhadap $y = x + k$: $(x, y) \to (y - k,\ x + k)$, jadi $(3, 0) \to (0 - 1, 3 + 1)$.
- C ✓ — titik tengah $(1, 2)$ dan $2 = 1 + 1$ ✓.
- D ✗ — $(2, 5)$ adalah bayangan terhadap $y = x$. Terhadap $y = x + 1$: $B'(1, 6)$. *Jebakan:* mengabaikan geseran $+1$.
- E ✓ — $(2, 2) \to (2 - 1, 2 + 1)$.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 5 Kunci: E

Konsep: translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $x' = x + a, y' = y + b$, jadi $x = x' - a$ dan $y = y' - b$ disubstitusikan ke persamaan asal.

Langkah 1. $x = x' - 2, y = y' + 1$.

Langkah 2. $3(x' - 2) - (y' + 1) + 2 = 0 \Rightarrow 3x' - y' - 5 = 0$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cek ulang: titik $(0, 2)$ pada garis asal berbayangan $(2, 1)$, dan $6 - 1 - 5 = 0$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: arah translasi terbalik ($x = x' + 2, y = y' - 1$).
- B: hanya menggeser ke kanan; geseran ke bawah terlupa.
- C: hanya menggeser ke bawah; geseran ke kanan terlupa.
- D: tanda y berubah saat substitusi.

Latihan sub bab 2.7

No. 1 Kunci: B

Konsep: pencerminan terhadap $x = a$ lalu terhadap $x = b$ setara dengan translasi $\begin{pmatrix} 2(b-a) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 1. $x = 1$ lalu $x = 4$: translasi $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, yaitu $(x, y) \to (x + 6, y)$.

Langkah 2. Ganti x dengan $x - 6$:
$y = (x-6)^2 - 2(x-6) = x^2 - 12x + 36 - 2x + 12 = x^2 - 14x + 48$.

Cek ulang: puncak $(1, -1)$: cermin $x = 1$ tetap $(1, -1)$, cermin $x = 4$ menjadi $(7, -1)$; puncak $y = x^2 - 14x + 48$ di $x = 7, y = 49 - 98 + 48 = -1$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: urutan pencerminan dibalik (setara geseran 6 satuan ke kiri).
- C: menggeser sejauh jarak kedua garis (3), padahal dua pencerminan menggeser dua kali jarak itu.
- D: menggeser 6 satuan ke atas; geserannya mendatar karena kedua cermin tegak.
- E: mengira dua pencerminan saling meniadakan; itu hanya berlaku bila kedua garis cermin sama.

No. 2 Kunci: A

Konsep: susun titik asal sebagai kolom: $M \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, lalu kalikan **kanan** dengan invers matriks titik asal.

Langkah 1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Langkah 2. $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Langkah 3. $M \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Cek ulang: $M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- B: urutan perkalian terbalik saat mencari M (memperoleh M^T).
- C: tanda $\frac{1}{\det}$ dengan $\det = -3$ terlupa.
- D: menjumlahkan kedua bayangan karena $1 + 2 = 3$; padahal $(3, -1) \neq (1, 2) + (2, 1)$.
- E: tanda komponen kedua salah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Kuis Akhir Bab 2

No. 1 **Kunci: B**

Konsep: titik pada ruas AB dengan $AC : CB = m : n$ adalah $\vec{c} = \vec{a} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Langkah 1. $\overrightarrow{AB} = (7-1,\ 4+2,\ 1-4) = (6, 6, -3)$.

Langkah 2. $AC : CB = 2 : 1$, jadi $t = \dfrac{2}{3}$.

Langkah 3. $\vec{c} = (1, -2, 4) + \dfrac{2}{3}(6, 6, -3) = (1+4,\ -2+4,\ 4-2) = (5, 2, 2)$.

Cek ulang: $\overrightarrow{AC} = (4, 4, -2)$ dan $\overrightarrow{CB} = (2, 2, -1)$; $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{CB}$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: memakai $t = \frac{1}{3}$ (perbandingan terbalik, $AC : CB = 1 : 2$).
- C: titik tengah AB.
- D: pembagian di luar ($t = 2$).
- E: salah tanda pada komponen ketiga ($4 + 2 \cdot \frac{1}{2}$).

No. 2 **Kunci: B, C, E**

Konsep: pada gerak lurus berkecepatan tetap, posisi setelah w detik adalah $\vec{p} + \dfrac{w}{T}\overrightarrow{PQ}$ dan jarak tempuh sebanding waktu.

Langkah 1. $\overrightarrow{PQ} = (12, 4, -6)$, panjangnya $\sqrt{144 + 16 + 36} = 14$ m. Dalam 14 detik, kecepatannya 1 m/s.

Langkah 2. Setelah 7 detik ($t = \frac{1}{2}$): $(2, 3, 12) + (6, 2, -3) = (8, 5, 9)$.

Langkah 3. Setelah 10 detik burung menempuh 10 m, jadi sisa jarak $14 - 10 = 4$ m.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — komponen ketiga $6 - 12 = -6$, bukan 6. *Jebakan:* mengurangkan pangkal dari ujung secara terbalik pada satu komponen.
- B ✓, C ✓, E ✓ — Langkah 1–3.
- D ✗ — ketinggian turun 6 m selama 14 detik, yaitu $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ m per detik. *Jebakan:* membaca komponen vektor sebagai laju per detik.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 3 **Kunci: A**

Konsep: $|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$; syarat panjang menghasilkan persamaan kuadrat, dan jumlah akarnya $-\frac{b}{a}$.

Langkah 1. $p^2 + (p+1)^2 + 4p^2 = 21 \Rightarrow 6p^2 + 2p + 1 = 21 \Rightarrow 3p^2 + p - 10 = 0$.

Langkah 2. $(3p - 5)(p + 2) = 0$, jadi $p = \frac{5}{3}$ atau $p = -2$.

Langkah 3. Jumlahnya $\frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3}$ (sama dengan $-\frac{1}{3}$ dari Vieta).

Cek ulang: $p = -2$: $\vec{v} = (-2, -1, -4)$, $4 + 1 + 16 = 21$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: tanda jumlah akar salah ($+\frac{b}{a}$).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- C ($-\frac{11}{3}$): salah tanda saat memfaktorkan, sehingga akarnya $-\frac{5}{3}$ dan -2.
- D: hanya salah satu akar.
- E ($-\frac{1}{2}$): menulis $(2p)^2$ sebagai $2p^2$, sehingga $2p^2 + p - 10 = 0$.

No. 4 Kunci: A, C, D

Konsep: segi enam beraturan tersusun atas enam segitiga sama sisi yang bertemu di pusat O. Sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang.

Langkah 1. Pusat O: $\overrightarrow{AO} = \vec{u} + \vec{v}$ (jajargenjang $ABOF$ adalah belah ketupat), dan $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AO} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$.

Langkah 2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} = \vec{u} + \vec{v}$ (sejajar dan sama panjang), sehingga $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Langkah 3. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = \vec{v}$ (sisi berhadapan FA dan CD sejajar searah dari C ke D seperti dari A ke F), dan $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} + 2\vec{v}$, karena $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO}$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓, C ✓, D ✓ — Langkah 1–3.
- B ✗ — $\vec{u} + \vec{v}$ adalah $\overrightarrow{AO}$, bukan $\overrightarrow{AC}$. *Jebakan:* lupa bahwa C lebih jauh daripada pusat.
- E ✗ — $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. *Jebakan:* mengira CD "berlawanan" dengan AB.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 5 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: operasi vektor dikerjakan per komponen; panjang dihitung dengan akar jumlah kuadrat komponen.

Pernyataan 1. $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \rightarrow$ **Benar**.

Pernyataan 2. $\vec{a} + \vec{b} = (3, 1, 0)$, panjangnya $\sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \neq 4 \rightarrow$ **Salah**. *Jebakan:* menjumlahkan panjang atau menghitung $3 + 1$.

Pernyataan 3. $2\vec{a} = (4, -2, 4)$, dikurangi $\vec{b}$: $(3, -4, 6) \rightarrow$ **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 6 Kunci: C

Konsep: $\cos\theta = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}|\,|\vec{q}|}$.

Langkah 1. $\vec{p} \cdot \vec{q} = 1 + 0 + 0 = 1$.

Langkah 2. $|\vec{p}| = |\vec{q}| = \sqrt{2}$, jadi $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ dan $\theta = 60^\circ$.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: $\sin\theta = \frac{1}{2}$ tertukar dengan $\cos\theta$.
- B: memakai $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (lupa salah satu $\sqrt{2}$ di penyebut).
- D: mengira hasil kali komponen kedua dan ketiga yang nol berarti tegak lurus.
- E: tanda kosinus salah ($-\frac{1}{2}$).

No. 7 Kunci: B, D, E

Konsep: pasang koordinat titik sudut, nyatakan setiap vektor sebagai ujung dikurangi pangkal, lalu pakai hasil kali skalar.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1. $B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0), E(0,0,2), F(2,0,2), G(2,2,2)$.

Langkah 2. $\overrightarrow{AC} = (2,2,0), \overrightarrow{AF} = (2,0,2)$: hasil kali 4; panjang masing-masing $\sqrt{8}$, jadi $\cos\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \theta = 60^\circ$.

Langkah 3. $\overrightarrow{AG} = (2,2,2), \overrightarrow{BD} = (-2,2,0)$: hasil kali $-4+4+0=0$, tegak lurus.

Analisis tiap pilihan:

• A ✗ — proyeksi skalar $= \dfrac{(2,2,2)\cdot(2,0,0)}{2} = 2$. *Jebakan:* $2\sqrt{3}$ adalah panjang $\overrightarrow{AG}$ sendiri.

• B ✓, D ✓, E ✓ — Langkah 2–3.

• C ✗ — $\overrightarrow{AE} = (0,0,2), \overrightarrow{BG} = (0,2,2)$, hasil kalinya $4 \neq 0$. *Jebakan:* mengira rusuk tegak tegak lurus semua diagonal bidang sisi.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 8 Kunci: A

Konsep: komponen gaya searah perpindahan = proyeksi skalar $\vec{F}$ pada $\vec{s}$, yaitu $\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|}$.

Langkah 1. $\vec{F}\cdot\vec{s} = 30\cdot 8 + 40\cdot 0 = 240$.

Langkah 2. $|\vec{s}| = 8$, jadi proyeksi skalarnya $\dfrac{240}{8} = 30$ N.

Cek ulang: perpindahan mendatar, jadi yang searah hanya komponen mendatar gaya, yaitu 30 N ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• B (40): komponen tegak gaya, yang tegak lurus perpindahan.

• C (50): besar gaya total $\sqrt{30^2+40^2}$.

• D (24): membagi dengan $|\vec{F}|\cdot\frac{|\vec{s}|}{|\vec{s}|}$ secara keliru, $\frac{240}{10}$.

• E (240): usaha (joule), bukan gaya.

No. 9 Kunci: D

Konsep: untuk $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, pusatnya $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ dan $r^2 = \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$.

Langkah 1. $A=-6, B=8, C=-11$. Pusat $(3,-4)$.

Langkah 2. $r^2 = 9+16-(-11) = 36$, jadi $r=6$.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: tanda pusat tidak dibalik.

• B: menulis r^2 sebagai jari-jari.

• C: koefisien tidak dibagi 2.

• E: $C=-11$ dikurangkan sebagai $+11$, sehingga $r^2 = 9+16-11 = 14$.

No. 10 Kunci: A, C, D

Konsep: baca pusat dan jari-jari dari gambar, lalu pakai bentuk baku dan kuasa titik.

Langkah 1. Dari gambar, pusat $(-1,2)$ dan jari-jari 3 (misalnya lingkaran melalui $(2,2)$ dan $(-1,5)$).

Langkah 2. $(x+1)^2+(y-2)^2 = 9 \Rightarrow x^2+y^2+2x-4y+1+4-9=0 \Rightarrow$ $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

Langkah 3. Titik $(1,4)$: $(2)^2+(2)^2 = 8 < 9$, jadi di dalam. Garis $y=5$ berjarak $5-2=3=r$ dari pusat, jadi menyinggung. Jarak pusat ke sumbu X adalah $2<3$, jadi memotong di dua titik.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis tiap pilihan:
• A ✓, C ✓, D ✓ — Langkah 2–3.
• B ✗ — kuasa $8 - 9 = -1 < 0$: di dalam. *Jebakan:* titik tampak dekat tepi.
• E ✗ — 9 adalah r^2.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 11 Kunci: E

Konsep: panjang tali busur = $2\sqrt{r^2 - d^2}$, dengan d jarak pusat ke garis.

Langkah 1. Garis $x - y + 1 = 0$. Jarak dari $(0, 0)$: $d = \dfrac{|1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, jadi $d^2 = \frac{1}{2}$.

Langkah 2. Panjang $= 2\sqrt{25 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{49}{2}} = 2 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$ m.

Cek ulang (substitusi): $x^2 + (x+1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ atau $x = -4$; titiknya $(3, 4)$ dan $(-4, -3)$, jaraknya $\sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A (10): menganggap garis melalui pusat (diameter).
• B ($5\sqrt{2}$): salah menghitung jarak pusat ke garis sehingga $d^2 = 12{,}5$.
• C (7): lupa faktor $\sqrt{2}$ pada selisih koordinat (hanya $|3 - (-4)|$).
• D (14): menjumlah selisih x dan selisih y.

No. 12 Kunci: B

Konsep: garis singgung di titik (x_1, y_1) pada lingkaran memakai aturan bagi adil; titiknya harus terletak pada lingkaran.

Langkah 1. Cek titik: $25 + 9 - 20 + 6 - 20 = 0$ ✓.
Langkah 2. Bagi adil: $5x + 3y - 2(x+5) + (y+3) - 20 = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 27 = 0$.

Cek ulang: pusat $(2, -1)$, $r = 5$; jarak pusat ke garis $\dfrac{|6 - 4 - 27|}{5} = 5$ ✓. Normal $(3, 4)$ sejajar jari-jari $(5 - 2, 3 + 1)$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: hanya mengganti x^2 dan y^2 (memakai rumus $x_1 x + y_1 y = r^2$ milik lingkaran berpusat O).
• C: konstanta salah (lupa suku -20 atau $\frac{A}{2}x_1$).
• D: garis yang tegak lurus garis singgung (searah jari-jari).
• E: salah tanda pada suku y.

No. 13 Kunci: C

Konsep: garis singgung sejajar g berarti jari-jari ke titik singgung tegak lurus g, yaitu searah **vektor normal** g. Titik singgung $= M \pm r\,\hat{n}$.

Langkah 1. $r = |(3, 5) - (-1, 2)| = |(4, 3)| = 5$.
Langkah 2. Arah g adalah $(4, 3)$, normalnya $(3, -4)$ dengan panjang 5, jadi $r\hat{n} = (3, -4)$.
Langkah 3. Titik singgung $(-1, 2) \pm (3, -4)$, yaitu $(2, -2)$ dan $(-4, 6)$.

Cek ulang: di $(2, -2)$ jari-jari $(3, -4)$; garis singgungnya $3x - 4y = 14$ bergradien $\frac{3}{4}$, sama dengan gradien g ✓.

Jawaban: C.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan): semua pilihan terletak pada lingkaran, jadi "cek titik pada lingkaran" saja tidak cukup.
• A $(3,5)$ dan B $(-5,-1)$: $M \pm (4,3)$, titik singgung garis yang **tegak lurus** g (sejajar dan tegak lurus tertukar).
• D $(2,6)$ dan E $(-4,-2)$: $M \pm (3,4)$, komponen arah tertukar; garis singgungnya tidak sejajar g.

No. 14 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: panjang ruas singgung persekutuan luar $\sqrt{d^2-(R-r)^2}$, dalam $\sqrt{d^2-(R+r)^2}$; sabuk luar melilit puli besar sepanjang busur $180^\circ + 2\alpha$ dengan $\sin\alpha = \frac{R-r}{d}$.

Pernyataan 1. $\sqrt{900-36} = \sqrt{864} \approx 29{,}39 < 30 \rightarrow$ **Benar**.
Pernyataan 2. $\sqrt{900-196} = \sqrt{704} \approx 26{,}53$, bukan tepat 26 → **Salah**.
Pernyataan 3. $R > r$, jadi $\alpha > 0$ dan busur lilitan puli besar $180^\circ + 2\alpha > 180^\circ \rightarrow$ **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

Jebakan: pernyataan 2 memakai pembulatan; pernyataan 3 menguji bahwa sabuk tidak selalu melilit setengah lingkaran.

No. 15 Kunci: D

Konsep: empat seperempat lingkaran berjari-jari sama bersama-sama sama luas dengan satu lingkaran penuh.

Langkah 1. Luas persegi $14^2 = 196$ m².
Langkah 2. Empat seperempat lingkaran $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \cdot 49 = 154$ m².
Langkah 3. Rumput $= 196 - 154 = 42$ m².

Cek ulang: petak bunga bersebelahan saling bersentuhan di tengah sisi (jari-jari 7 = setengah sisi), jadi tidak ada daerah yang bertumpuk ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A (154): luas petak bunga, bukan rumput.
• B (157,5): hanya mengurangkan satu seperempat lingkaran $(196 - 38{,}5)$.
• C (98): menganggap petak bunga menutupi tepat setengah taman.
• E (38,5): luas satu petak bunga saja.

No. 16 Kunci: A, C, D

Konsep: dua seperempat lingkaran yang bertumpuk: luas gabungan = jumlah keduanya − irisannya.

Langkah 1. Satu seperempat lingkaran: $\frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 400 = 314$ cm².

Langkah 2. Kedua seperempat lingkaran menutupi seluruh persegi (setiap titik persegi berjarak paling jauh 20 cm dari salah satu pojok P atau Q). Jadi $314 + 314 - \text{hijau} = 400$, sehingga hijau $= 228$ cm².
Langkah 3. Hanya biru $= 314 - 228 = 86$ cm², hanya kuning juga 86 cm². Keliling hijau = dua busur seperempat lingkaran $= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 62{,}8$ cm.

Analisis tiap pilihan:
• A ✓ — Langkah 2.
• B ✗ — hanya biru 86 cm². *Jebakan:* $314 - 200$ (mengurangkan setengah persegi).
• C ✓ — $228 > 200$.
• D ✓ — Langkah 3.
• E ✗ — $86 + 86 = 172 \neq 228$.

Jawaban: A, C, dan D.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 17 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: dalam 60 menit jarum menit berputar 360°, jadi 20 menit = $\frac{1}{3}$ putaran. Daerah sapuan adalah juring, lintasan ujungnya adalah busur.

Pernyataan 1. $\frac{20}{60} \times 360^\circ = 120^\circ \rightarrow$ **Benar**.

Pernyataan 2. Luas juring $= \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 144 = 150{,}72$ cm², tidak kurang dari 150 → **Salah**.

Pernyataan 3. Busur $= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 = 25{,}12$ cm → **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

Jebakan: pernyataan 2 sangat dekat dengan batasnya; membulatkan terlalu dini membuat siswa salah menilai.

No. 18 Kunci: A

Konsep: tembereng = juring − segitiga yang dibentuk dua jari-jari dan tali busur.

Langkah 1. Juring 90°: $\frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 36 = 28{,}26$ cm².

Langkah 2. Segitiga siku-siku: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ cm².

Langkah 3. $T = 28{,}26 - 18 = 10{,}26$ cm².

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: luas juring.
- C: luas segitiga.
- D: juring ditambah segitiga.
- E: setengah dari jawaban benar (menganggap segitiga bersisi siku-siku 6 dan tinggi 3).

No. 19 Kunci: E

Konsep: pencerminan terhadap $x = h$: $(x, y) \rightarrow (2h - x,\ y)$, karena titik tengah titik dan bayangannya terletak pada cermin.

Langkah. $x' = 2 \cdot 3 - (-2) = 8$, $y' = 5$. Bayangannya $(8, 5)$.

Cek ulang: titik tengah $(-2, 5)$ dan $(8, 5)$ adalah $(3, 5)$, terletak pada $x = 3$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: mencerminkan terhadap $y = 3$.
- B: mengabaikan tanda negatif, $x' = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.
- C: salah urutan pengurangan, $x' = x - 2h = -8$.
- D: mencerminkan terhadap titik O.

No. 20 Kunci: A, B, D

Konsep: lingkaran cukup ditransformasikan lewat pusat dan jari-jarinya. Translasi tidak mengubah jari-jari; dilatasi mengalikannya dengan $|k|$ dan luas dengan k^2.

Langkah 1. Pusat $(2, -1)$, $r = 3$. Dilatasi $[O, 2]$: pusat $(4, -2)$, $r = 6$.

Langkah 2. Translasi $(-3, 4)$: pusat $(1, 2)$, r tetap 6.

Langkah 3. Bayangan $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓, B ✓, D ✓ ($k^2 = 4$).
- C ✗ — ruas kanan $r^2 = 36$. *Jebakan:* mengalikan r^2 dengan 2, bukan dengan 4.
- E ✗ — $(4, -2)$ adalah pusat setelah dilatasi saja; translasi belum dikerjakan.

Jawaban: A, B, dan D.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 21 Kunci: A, B, D

Konsep: rotasi 180° terhadap $P(a,b)$: $(x,y) \to (2a-x,\ 2b-y)$. Untuk bayangan garis, pakai substitusi balik.

Langkah 1. $x' = 2-x, y' = 4-y \Rightarrow x = 2-x', y = 4-y'$.

Langkah 2. Substitusi: $2(2-x') - (4-y') + 3 = 0 \Rightarrow -2x' + y' + 3 = 0 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$.

Langkah 3. Gradien keduanya 2 (sejajar). Titik $(2,1)$: $4 - 1 - 3 = 0$ ✓. Titik P: $2 - 2 - 3 \neq 0$. Jarak dua garis sejajar $= \dfrac{|3-(-3)|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓, B ✓, D ✓.

• C ✗ — P tidak terletak pada garis semula ($2 - 2 + 3 \neq 0$), jadi tidak pada bayangan. *Jebakan:* mengira pusat rotasi selalu terletak pada bayangan.

• E ✗ — jaraknya $\frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2{,}68$. *Jebakan:* lupa membagi dengan $\sqrt{2^2+1^2}$.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 22 Kunci: C

Konsep: rotasi terhadap pusat bukan O: geser–putar–geser balik. Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam: $(u,v) \to (-v,u)$.

Langkah 1. Dari gambar, $P(1,3)$ dan $B(5,1)$. Vektor $\overrightarrow{PB} = (4,-2)$.

Langkah 2. Diputar: $(4,-2) \to (2,4)$.

Langkah 3. Tambahkan kembali P: $(1+2,\ 3+4) = (3,7)$.

Cek ulang: $|\overrightarrow{PB'}| = |(2,4)| = \sqrt{20} = |\overrightarrow{PB}|$ dan $(4,-2)\cdot(2,4) = 0$ (tegak lurus) ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: memutar searah jarum jam, $(4,-2) \to (-2,-4)$.

• B: lupa menambahkan kembali P.

• D: memutar terhadap O, $(5,1) \to (-1,5)$.

• E: memakai rumus keliru $(u,v) \to (-v,-u)$, sehingga $(4,-2) \to (2,-4)$ lalu ditambah P.

No. 23 Kunci: B

Konsep: komposisi "T_1 lalu T_2" bermatriks $M_2 M_1$.

Langkah 1. $M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Langkah 2. $D_3 M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Cek ulang: $(1,0) \to (0,1) \to (0,3)$ = kolom pertama ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: hanya dilatasi.

• C: hanya pencerminan.

• D: memakai cermin $y = -x$.

• E: menjumlahkan kedua matriks, bukan mengalikan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 24 Kunci: A, C, D

Konsep: luas bayangan $= |\det(\text{matriks komposisi})| \times$ luas asal, dan $\det(M_2 M_1) = \det M_2 \cdot \det M_1$.

Langkah 1. $\det M = 6 - 1 = 5$; $\det R_{90^\circ} = 1$.
Langkah 2. Luas akhir $= 5 \cdot 1 \cdot 6 = 30$ m^2, apa pun urutannya.
Langkah 3. Kolom pertama M adalah $(2, 1)$, yaitu bayangan $(1, 0)$.

Analisis tiap pilihan:
- A ✓, C ✓, D ✓.
- B ✗ — luasnya 30 m^2. *Jebakan:* mengalikan juga dengan 2 karena "dua transformasi".
- E ✗ — invers yang benar $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; faktor $\frac{1}{\det}$ terlupa.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 25 Kunci: D

Konsep: komposisi dikerjakan berurutan; lalu substitusi balik ke persamaan garis asal.

Langkah 1. Cermin sumbu Y: $(x, y) \to (-x, y)$. Rotasi 90°: $(u, v) \to (-v, u)$. Gabungan: $(x, y) \to (-y, -x)$, yaitu pencerminan terhadap $y = -x$.
Langkah 2. $x' = -y, y' = -x \Rightarrow x = -y', y = -x'$.
Langkah 3. Substitusi: $2(-y') + (-x') - 4 = 0 \Rightarrow x' + 2y' + 4 = 0$.

Cek ulang: titik $(2, 0)$ pada garis asal → $(-2, 0) \to (0, -2)$; $0 + 2(-2) + 4 = 0$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: urutan ditukar (rotasi dulu lalu cermin), yang setara pencerminan terhadap $y = x$.
- B dan C: salah tanda saat substitusi balik.
- E: hanya mencerminkan terhadap titik O.

Latihan sub bab 3.1

No. 1 Kunci: A

Konsep: substitusi $x = 1$ memberi $\frac{0}{0}$, jadi pembilang dan penyebut memuat faktor $(x - 1)$; pembilang difaktorkan dengan Horner.

Langkah 1. Horner dengan $x = 1$ pada koefisien $1, 2, 0, -3$: hasil bagi $x^2 + 3x + 3$, sisa 0. Jadi $x^3 + 2x^2 - 3 = (x - 1)(x^2 + 3x + 3)$.
Langkah 2. $\dfrac{(x-1)(x^2+3x+3)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1} \to \dfrac{7}{2}$.

Cek ulang: di $x = 1{,}0001$ nilainya $\approx 3{,}5000$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- B: tanda penyebut salah: $x + 1$ di $x = 1$ dihitung -2.
- C: faktor $(x + 1)$ pada penyebut terlupa.
- D: hasil bagi Horner salah menjadi $x^2 + 2x + 2$.
- E: berhenti di bentuk $\frac{0}{0}$; bentuk itu justru tanda faktor $(x - 1)$ harus dicoret.

No. 2 Kunci: C

Konsep: bentuk $\frac{0}{0}$ dengan akar diselesaikan dengan mengalikan sekawan $\sqrt{2x+3} + 3$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1. $\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}\cdot\dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}=\dfrac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}=\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+3}.$

Langkah 2. Untuk $x\to 3$: $\dfrac{2}{3+3}=\dfrac{1}{3}$.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: koefisien 2 dari $2x-6=2(x-3)$ terlupa.
- B: tanda salah saat mengalikan sekawan.
- D: penyebut $\sqrt{2x+3}+3$ dihitung 3 saja.
- E: bentuk $\frac{0}{0}$ belum berarti limit tidak ada; rasionalkan dulu.

Latihan sub bab 3.2

No. 1 Kunci: A

Konsep: limit fungsi rasional di tak hingga: bila derajat pembilang lebih kecil daripada derajat penyebut, limitnya 0.

Langkah 1. Bagi pembilang dan penyebut dengan t^2: $\dfrac{6/t}{1+4/t^2}\to\dfrac{0}{1}=0.$

Langkah 2. Artinya, lama-kelamaan obat hilang dari darah.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: derajat penyebut (2) lebih besar daripada derajat pembilang (1), jadi limitnya 0, bukan perbandingan koefisien.
- C: $C(2)=1{,}5$ adalah kadar tertinggi, bukan kecenderungan jangka panjang.
- D: membagi koefisien 6 dengan 2 tanpa dasar.
- E: tertukar dengan kasus derajat pembilang lebih besar.

No. 2 Kunci: B

Konsep: bentuk $\infty-\infty$ dengan akar diselesaikan dengan sekawan: $\sqrt{x^2+900}-x=\dfrac{900}{\sqrt{x^2+900}+x}$.

Langkah 1. Penyebut membesar tanpa batas, pembilang tetap 900, jadi limitnya 0.

Langkah 2. Artinya, bila layang-layang sangat jauh, panjang benang hampir sama dengan jarak mendatarnya.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: mengira selisihnya sama dengan ketinggian.
- C: akar terlupa.
- D: membagi 30 dengan 2 tanpa dasar.
- E: menganggap "$\infty-\infty=\infty$".

Latihan sub bab 3.3

No. 1 Kunci: A, B, D

Konsep: limit dasar $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$ dan $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$; ubah $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Bila fungsi kontinu, cukup substitusi.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis tiap pilihan:

• A ✓ — $\dfrac{4\sin\theta}{\theta} \to 4 \cdot 1$.

• B ✓ — $4(1-\cos\theta) = 8\sin^2\frac{\theta}{2}$, sehingga $\dfrac{8\sin^2(\theta/2)}{\theta^2} \to 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$.

• C ✗ — $\dfrac{8\sin^2(\theta/2)}{\theta} \to 0$: bentuk $1-\cos\theta$ setara dua faktor θ. *Jebakan:* memasangkan $1-\cos$ dengan satu faktor saja.

• D ✓ — $\dfrac{\tan\theta}{\theta} \to 1$.

• E ✗ — fungsi kontinu di $\frac{\pi}{2}$: $\dfrac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = 0$; tangga tegak, kakinya menempel dinding.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 2 Kunci: B

Konsep: faktorkan $\tan 2x - \sin 2x = \tan 2x\,(1-\cos 2x)$ lalu pakai $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ dan limit dasar.

Langkah 1. $\dfrac{\tan 2x \cdot 2\sin^2 x}{x^3} = 2 \cdot \dfrac{\tan 2x}{x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$.

Langkah 2. Limitnya $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$.

Cek ulang: di $x = 0{,}001$ nilainya $\approx 4{,}00$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: menganggap $\tan 2x - \sin 2x \to 0$ sehingga hasilnya 0, padahal penyebut juga menuju 0.

• C: faktor $\frac{1}{2}$ dari $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ terlupa, misalnya memakai $1-\cos 2x \approx 4x^2$.

• D: memakai $1-\cos 2x \approx x^2$ (seharusnya $2x^2$).

• E: memakai hasil untuk $\tan x - \sin x$, lupa koefisien sudut 2.

No. 3 Kunci: D

Konsep: ubah selisih kosinus menjadi perkalian: $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

Langkah 1. $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$.

Langkah 2. $\dfrac{-2\sin 2x \sin x}{x \sin 2x} = -2 \cdot \dfrac{\sin x}{x} \to -2$.

Cek ulang: di $x = 0{,}001$ nilainya $\approx -2{,}000$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: tanda rumus selisih kosinus terbalik.

• B: menganggap $\sin 2x \approx x$, padahal $\sin 2x \approx 2x$.

• C: faktor 2 pada $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ terlupa.

• E: hasil dibagi 4 karena salah membagi dua sudut.

No. 4 Kunci: A, B, D

Konsep: limit dasar $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ dapat dipakai untuk $n \to \infty$ dengan memisalkan $t = \frac{\pi}{n}$, yang menuju 0.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓ — $12\sin 30^\circ = 6$: segi enam beraturan bersisi sama dengan jari-jari.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- B ✓ — misalkan $t = \frac{\pi}{n} \to 0$: $K = 2\pi \cdot \dfrac{\sin t}{t} \to 2\pi$.
- C ✗ — sisinya makin pendek; kelilingnya mendekati keliling lingkaran 2π.
- D ✓ — $s = \frac{2\pi}{n} \to 0$: $L = \pi \cdot \dfrac{\sin s}{s} \to \pi$, luas lingkaran satuan.
- E ✗ — segi-n di dalam lingkaran: setiap sisi (tali busur) lebih pendek daripada busurnya, jadi $K(n) < 2\pi$.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 5 Kunci: C

Konsep: misalkan $u = x - \pi \to 0$; $\cos(\pi + u) = -\cos u$, sehingga $1 + \cos x = 1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$.

Langkah 1. $\dfrac{2\sin^2(u/2)}{u^2} = 2\left(\dfrac{\sin(u/2)}{u}\right)^2 \to 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

Cek ulang: di $x = \pi + 0{,}001$ nilainya $\approx 0{,}5000$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: salah menghitung $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ menjadi $\frac{1}{4}$.
- B: memakai $1 - \cos u \approx u^2$, padahal $\approx \frac{u^2}{2}$.
- D: menulis $1 + \cos x = -(1 - \cos u)$ (tanda salah).
- E: memakai $\cos(\pi + u) = \cos u$, sehingga pembilang dikira menuju 2.

Kuis Akhir Bab 3

No. 1 Kunci: C

Konsep: panjang = luas : lebar; untuk x mendekati 3, hitung $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Substitusi langsung memberi $\frac{0}{0}$, jadi faktorkan.

Langkah 1. $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$ untuk $x \neq 3$.

Langkah 2. Untuk $x \to 3$, nilainya mendekati $3 + 3 = 6$.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: menganggap $\frac{0}{0} = 0$.
- B: hanya memakai faktor $(x - 3)$ yang tersisa, lalu salah substitusi.
- D: mengira panjang $= x^2$ di $x = 3$.
- E: menganggap bentuk $\frac{0}{0}$ berarti limit tidak ada.

No. 2 Kunci: A

Konsep: bentuk $\frac{0}{0}$ diselesaikan dengan memfaktorkan; $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ dan $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Langkah 1. $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ untuk $x \neq 2$.

Langkah 2. Substitusi $x = 2$: $\dfrac{4 + 4 + 4}{4} = 3$.

Jawaban: A.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- B (12): pembilang $x^2 + 2x + 4$ dihitung, tetapi penyebut $x + 2$ terlupa.
- C (2): memakai $x^3 - 8 = (x - 2)^3$.
- D ($\frac{1}{3}$): hasil dibalik.
- E (0): menganggap $\frac{0}{0} = 0$.

No. 3 Kunci: A, C, E

Konsep: limit di $x = a$ ada bila limit kiri dan kanan sama; nilai $f(a)$ tidak memengaruhi limit.

Langkah 1. Di $x = 1$: dari kiri dan kanan grafik menuju 3 (bulatan kosong di $(1, 3)$), sedangkan $f(1) = 1$ (bulatan penuh).
Langkah 2. Di $x = 3$: dari kiri menuju -1, dari kanan menuju 1. Limitnya tidak ada.
Langkah 3. Di $x = 0$: grafik kontinu, nilainya $0 + 2 = 2$.

Analisis tiap pilihan:
- A ✓, C ✓, E ✓.
- B ✗ — $f(1) = 1$, sedangkan limit kanannya 3. *Jebakan:* menyamakan nilai fungsi dengan limit.
- D ✗ — limit kiri $-1 \neq$ limit kanan 1.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 4 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: limit kiri dan limit kanan dibaca dari arah masing-masing; limit ada hanya bila keduanya sama.

Pernyataan 1. Dari kiri, grafik naik menuju bulatan kosong $(2, 1)$ → **Benar**.
Pernyataan 2. Dari kanan menuju 3, dari kiri menuju 1; berbeda, jadi limitnya tidak ada → **Salah**.
Jebakan: membaca titik penuh $(2, 3)$ sebagai limit.
Pernyataan 3. Di $x = 0$ grafik tidak terputus, jadi limit $= g(0) = 0$ → **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 5 Kunci: D

Konsep: bentuk $\frac{0}{0}$ yang memuat akar di pembilang dan penyebut diselesaikan dengan mengalikan **dua** sekawan.

Langkah 1. Substitusi: $\frac{2-2}{3-3} = \frac{0}{0}$.
Langkah 2. $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$ dan $\sqrt{x + 5} - 3 = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x + 5} + 3}$.
Langkah 3. Hasil baginya $\dfrac{\sqrt{x + 5} + 3}{\sqrt{x} + 2} \to \dfrac{3 + 3}{2 + 2} = \dfrac{3}{2}$.

Cek ulang: di $x = 4{,}0001$ nilainya $\approx 1{,}5000$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: sekawan pembilang dan penyebut tertukar (hasil terbalik).
- B dan E: hanya satu sekawan yang dipakai, misalnya $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$ atau $\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$.
- C: menganggap bentuk $\frac{0}{0}$ berarti limit tidak ada.

No. 6 Kunci: A, C, D

Konsep: penyebut menuju 0 dan limitnya ada, jadi pembilang juga harus 0 di $x = 2$; pembilang memuat faktor $(x - 2)$.

Langkah 1. $4 + 2a + b = 0$. Tulis $x^2 + ax + b = (x - 2)(x + c)$.
Langkah 2. Limitnya $\lim_{x \to 2}(x + c) = 2 + c = 5$, jadi $c = 3$:

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

$x^2 + ax + b = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$.

Langkah 3. $a = 1, b = -6$. Lalu $\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \to \dfrac{5}{4}$.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓, C ✓ ($1 - 6 = -5$), D ✓.

• B ✗ — $b = -6$. *Jebakan:* tanda konstanta $(x-2)(x+3)$.

• E ✗ — penyebut $x + 2 \to 4$ dan pembilang $\to 0$, jadi limitnya 0. *Jebakan:* mencoret faktor yang tidak ada di penyebut.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 7 Kunci: B

Konsep: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ dan $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Langkah 1. Substitusi $x = -1$: $\frac{0}{0}$.

Langkah 2. Setelah dicoret: $\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} \to \dfrac{1 + 1 + 1}{-2} = -\dfrac{3}{2}$.

Cek ulang: di $x = -1{,}0001$ nilainya $\approx -1{,}5000$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: tanda penyebut $(-1 - 1)$ salah.

• C: memakai $x^2 + x + 1$ (rumus selisih pangkat tiga), sehingga $\frac{1}{-2}$.

• D dan E: berhenti di bentuk $\frac{0}{0}$.

No. 8 Kunci: A, B, D

Konsep: selalu substitusi dulu; olah hanya bila hasilnya $\frac{0}{0}$.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓ — substitusi langsung $\frac{4}{2} = 2$.

• B ✓ — sekawan: $\dfrac{1}{\sqrt{4+x}+2} \to \dfrac{1}{4}$.

• C ✗ — $\dfrac{1}{x+3} \to \dfrac{1}{6}$. *Jebakan:* membagi dengan 3, bukan $3 + 3$.

• D ✓ — $x - 2 \to -4$.

• E ✗ — penyebut menuju 0 dari atas, nilai fungsi membesar tanpa batas; limitnya tidak ada. *Jebakan:* mengira "penyebut nol" memberi 0.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 9 Kunci: E

Konsep: limit fungsi rasional di tak hingga dengan derajat pembilang dan penyebut sama = perbandingan koefisien utama.

Langkah. Derajat keduanya 2, jadi $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 - x}{3x^2 + 5} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: mengira hasil selalu 0 di tak hingga.

• B: hanya koefisien utama pembilang.

• C: memakai suku terakhir $\frac{-1}{5}$.

• D: mengira pembilang yang "lebih cepat" membesar.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 10 Kunci: A

Konsep: "jangka panjang" berarti $n \to \infty$; derajat sama sehingga limitnya perbandingan koefisien utama.

Langkah 1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n+40}{5n+100} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$

Langkah 2. Dalam persen: 60%.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B (40%): nilai awal $U(0) = \frac{40}{100}$, bukan kecenderungan.
- C (30%): membagi 3 dengan $5+5$.
- D (50%): nilai pada hari ke-20 ($\frac{100}{200}$), nilai sesaat.
- E (100%): mengira akhirnya semua pembeli menulis ulasan.

No. 11 Kunci: C

Konsep: tulis $-2x+1 = -(2x-1) = -\sqrt{(2x-1)^2}$ untuk x besar, lalu pakai $\lim(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+qx+r}) = \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}}$.

Langkah 1. $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

Langkah 2. $\lim\left(\sqrt{4x^2+3x} - \sqrt{4x^2-4x+1}\right) = \dfrac{3-(-4)}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{4}.$

Cek ulang: di $x = 10^6$ nilainya $\approx 1{,}75$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: suku $+1$ terlupa, sehingga hanya $\sqrt{4x^2+3x} - 2x \to \frac{3}{4}$.
- B: menulis $-2x+1 = -(2x+1)$ (salah tanda), sehingga $\frac{3}{4} - 1$.
- D: $\frac{3}{2} + 1$, yaitu $\sqrt{a}$ pada penyebut $2\sqrt{a}$ terlupa untuk bagian $\frac{3}{4}$.
- E: $\frac{3-(-4)}{2}$, yaitu $\sqrt{a} = 2$ pada penyebut terlupa.

No. 12 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: limit di tak hingga adalah kecenderungan; nilai limit belum tentu pernah dicapai.

Pernyataan 1. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{5.000t}{t+10} = 5.000 \to$ **Benar**.

Pernyataan 2. $P(t) = 5.000 - \dfrac{50.000}{t+10} < 5.000$ untuk setiap $t \geq 0 \to$ **Salah**.

Pernyataan 3. $P(10) = \dfrac{50.000}{20} = 2.500 \to$ **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 13 Kunci: A, C, E

Konsep: bagi dengan pangkat tertinggi penyebut; untuk selisih akar pakai sekawan atau rumus $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — derajat sama, $\frac{2}{1} = 2$.
- B ✗ — derajat pembilang lebih kecil, limitnya 0. *Jebakan:* membandingkan koefisien tanpa melihat derajat.
- C ✓ — $\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2} \to \frac{6-0}{2} = 3$.
- D ✗ — koefisien utama pembilang -3, jadi limitnya -3. *Jebakan:* mengambil suku yang ditulis paling

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

depan.

• E ✓ — $\dfrac{\sqrt{9+1/x^2}}{3-2/x} \to \dfrac{3}{3} = 1$.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 14 Kunci: A, C

Konsep: $f(x) = 3 + \dfrac{7}{x-2}$; asimtot datar $y = 3$, asimtot tegak $x = 2$.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓ — $\dfrac{7}{x-2} \to 0$, jadi $f \to 3$.

• B ✗ — substitusi memberi $\frac{7}{0}$; limitnya tidak ada. *Jebakan:* menghitung pembilang saja.

• C ✓ — $f(0) = \frac{1}{-2}$, fungsi kontinu di 0.

• D ✗ — $\frac{7}{x-2}$ tidak pernah 0, jadi $f(x) \neq 3$.

• E ✗ — untuk $x \to -\infty$ limitnya juga 3.

Jawaban: A dan C.

No. 15 Kunci: B

Konsep: susun model kadar = massa garam : volume air sebagai fungsi waktu, lalu ambil limit $t \to \infty$.

Langkah 1. Setelah t menit, massa garam $5 + 10 \cdot 0{,}2\,t = 5 + 2t$ kg dan volume $100 + 10t$ liter.

Langkah 2. Kadar $K(t) = \dfrac{5+2t}{100+10t}$.

Langkah 3. $\lim_{t\to\infty} K(t) = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$ kg/L — kadar kolam mendekati kadar air yang dimasukkan.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A (0,05): kadar awal $\frac{5}{100}$.

• C (2): hanya koefisien t pada massa garam.

• D (0,5): $\frac{5}{10}$, mencampur konstanta dan koefisien.

• E (0,02): $\frac{2}{100}$, salah memilih suku penyebut.

No. 16 Kunci: D

Konsep: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\tan bx} = \dfrac{a}{b}$.

Langkah. $\dfrac{4}{2} = 2$. Cek di $x = 0{,}0001$: $\approx 2{,}0000$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: perbandingan terbalik.

• B: hanya koefisien sinus.

• C: mengalikan koefisien.

• E: mengira $\frac{\sin}{\tan}$ selalu menuju 1.

No. 17 Kunci: E

Konsep: $1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$.

Langkah 1. $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$.

Langkah 2. $\dfrac{2\sin 2x \sin 2x}{x \sin 2x} = \dfrac{2\sin 2x}{x} \to 2 \cdot 2 = 4$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cek ulang: di $x = 0{,}0001$ nilainya $\approx 4{,}0000$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A (2): faktor 2 di depan terlupa, yaitu $1 - \cos 4x = \sin^2 2x$.
- B (8): memakai $1 - \cos 4x \approx 8x^2$ lalu membagi dengan x^2, padahal $x \sin 2x \approx 2x^2$.
- C (1): menganggap $\frac{1-\cos}{\sin} \to 1$.
- D (16): memakai $1 - \cos 4x = 2\sin^2 4x$ (sudut tidak dibagi dua).

No. 18 Kunci: A

Konsep: untuk limit menuju $a \neq 0$, misalkan $u = x - a$ agar sudut menuju 0.

Langkah 1. Substitusi: $\frac{0}{0}$. Misalkan $u = x - \frac{\pi}{2}$, maka $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\sin u$.

Langkah 2. $\lim_{u \to 0} \dfrac{-\sin u}{u} = -1$.

Cek ulang: di $x = \frac{\pi}{2} + 0{,}0001$: $\dfrac{\cos x}{0{,}0001} \approx -1$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: tanda $\cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\sin u$ terlupa.
- C: menganggap $\frac{0}{0} = 0$.
- D: memakai $\frac{\pi}{2}$ dari batas.
- E: menganggap bentuk $\frac{0}{0}$ berarti limit tidak ada.

No. 19 Kunci: B, D, E

Konsep: $1 - \cos bx = 2\sin^2 \frac{bx}{2}$, sehingga $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos bx} = \dfrac{2}{b^2}$.

Langkah 1. $\dfrac{ax \tan x}{2\sin^2 \frac{bx}{2}} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{x}{\sin \frac{bx}{2}} \cdot \dfrac{\tan x}{\sin \frac{bx}{2}} \to \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2}{b} \cdot \dfrac{2}{b} = \dfrac{2a}{b^2}$.

Langkah 2. Syarat $\dfrac{2a}{b^2} = 4$, yaitu $a = 2b^2$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — untuk $b = 2$ diperlukan $a = 2 \cdot 4 = 8$, bukan 4. *Jebakan:* memakai $\frac{a}{b^2}$ tanpa faktor 2.
- B ✓ — $2 \cdot 1 = 2 = a$.
- C ✗ — $2b^2 = 8 \neq 1$. *Jebakan:* menukar a dan b.
- D ✓ — $2 \cdot 4 = 8 = a$.
- E ✓ — $b^2 = 1$; tanda b tidak berpengaruh karena $\cos(-x) = \cos x$.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 20 Kunci: C

Konsep: faktorkan penyebut dan pakai $u = x - 1$.

Langkah 1. $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Langkah 2. $\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x+3} \to 1 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: memakai faktor $(x + 3)$ di $x = 0$.
- B: lupa faktor $\frac{1}{x+3}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- D: salah memfaktorkan menjadi $(x-1)(x+1)$.
- E: memfaktorkan penyebut menjadi $(1-x)(x+3)$, sehingga tandanya terbalik.

No. 21 Kunci: B, C, E

Konsep: $S = \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$ dan $J = \frac{1}{2}r^2\theta$, jadi $\dfrac{S}{J} = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — $\dfrac{\sin\pi}{\pi} = 0$. *Jebakan:* mengira juring setengah lingkaran "hampir segitiga".
- B ✓ — faktor $\frac{1}{2}r^2$ habis.
- C ✓ — limit dasar $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$.
- D ✗ — segitiga selalu termuat dalam juring, jadi $S < J$ dan perbandingannya kurang dari 1.
- E ✓ — fungsi kontinu di $\frac{\pi}{2}$: $\dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 22 Kunci: B

Konsep: $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\theta/2)}{\theta} = \dfrac{1}{2}$.

Langkah. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{12\sin(\theta/2)}{\theta} = 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$.

Cek kewajaran: untuk sudut kecil, jarak lurus hampir sama dengan busur 6θ, jadi perbandingannya mendekati panjang lengan, 6 ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: lupa faktor $\frac{1}{2}$ pada sudut.
- C: membagi dua sekali lagi.
- D: mengira $\frac{\sin}{\text{sudut}} \to 1$ tanpa koefisien.
- E: menganggap $\frac{0}{0} = 0$.

No. 23 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: limit dasar $\frac{\sin ax}{x} \to a$; bentuk $1-\cos x$ setara dengan **dua** faktor x.

Pernyataan 1. $\frac{\sin 3x}{x} \to 3 \rightarrow$ **Benar**.

Pernyataan 2. $\dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{2\sin^2(x/2)}{x} \to 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$, bukan $1 \rightarrow$ **Salah**.

Pernyataan 3. $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 \to 1 \rightarrow$ **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 24 Kunci: A, C, E

Konsep: sisi siku-siku $AC = 10\cos\theta$, $BC = 10\sin\theta$, jadi $L = \frac{1}{2} \cdot 100\sin\theta\cos\theta = 25\sin 2\theta$. Fungsi kontinu cukup disubstitusi; bentuk $\frac{0}{0}$ memakai limit dasar.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $\dfrac{25\sin 2\theta}{\theta} \to 25 \cdot 2 = 50$.
- B ✗ — $\dfrac{25\sin 2\theta}{\theta^2} = \dfrac{25\sin 2\theta}{\theta} \cdot \dfrac{1}{\theta}$ membesar tanpa batas. *Jebakan:* menganggap pangkat penyebut tidak berpengaruh.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- C ✓ — $25 \sin \frac{\pi}{2} = 25$ (segitiga siku-siku sama kaki).
- D ✗ — $25 \sin \pi = 0$: papan menjadi pipih.
- E ✓ — $10 + 10 + 0 = 20$: sisi BC menyusut ke 0 dan AC mendekati AB.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 25 Kunci: D

Konsep: nyatakan luas dalam x lalu pakai $\sin x \sim x$ dan $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

Langkah 1. $PQ = \sin x$ dan $QA = 1 - \cos x$, jadi $T(x) = \frac{1}{2} \sin x \, (1 - \cos x)$.

Langkah 2. $\dfrac{T(x)}{x^3} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \to \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Cek ulang: di $x = 0{,}001$: $T \approx 2{,}5 \times 10^{-10}$, dibagi 10^{-9} memberi $0{,}25$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: memakai $\frac{1-\cos x}{x^2} \to 1$.
- B: memakai $QA \approx x$ (tertukar dengan PQ).
- C: mengira penyebut x^3 menuju 0 lebih cepat, padahal $T(x)$ juga setara x^3.
- E: faktor $\frac{1}{2}$ dipakai dua kali pada $1 - \cos x$.

Simulasi 1 — Soal Asli TKA 2025

No. 1 Kunci: E

Rumus invers matriks 2×2: jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $\det A = ad - bc \neq 0$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Langkah 1 – Determinan. $\det F = 2 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot 0 = 1$.

Langkah 2 – Tukar letak a dan d, ubah tanda b dan c. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Langkah 3 – Kalikan dengan $\dfrac{1}{\det F} = 1$. $F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Cek ulang: $F \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ✓. (Untuk matriks diagonal, inversnya cukup membalik setiap unsur diagonal.)

Analisis pilihan:

- A ✗: $F \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I$.
- B ✗ dan D ✗: tanda negatif muncul karena salah menerapkan "ubah tanda" pada unsur diagonal utama; yang diubah tandanya hanya b dan c.
- C ✗: hanya menukar letak tanpa membalik nilai.
- E ✓.

Jawaban: E.

No. 2 Kunci: C

Konsep: pembagian bersusun oleh pembagi berderajat 2 menghasilkan sisa berderajat paling tinggi 1. Kita lakukan pembagian bersusun lalu samakan sisanya.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1 – Pembagian bersusun $x^4 + ax^3 + bx^2 + x - 6$ oleh $x^2 + x + 1$.
• $x^4 \div x^2 = x^2 \rightarrow$ kurangi $x^4 + x^3 + x^2 \rightarrow$ sisa $(a-1)x^3 + (b-1)x^2 + x - 6$.
• $(a-1)x^3 \div x^2 = (a-1)x \rightarrow$ kurangi $(a-1)x^3 + (a-1)x^2 + (a-1)x \rightarrow$ sisa $(b-a)x^2 + (2-a)x - 6$.
• $(b-a)x^2 \div x^2 = (b-a) \rightarrow$ kurangi $(b-a)x^2 + (b-a)x + (b-a) \rightarrow$ sisa $(2-a-b+a)x + (-6-b+a) = (2-b)x + (a-b-6)$

Langkah 2 – Samakan dengan $5x - 1$.
• $2 - b = 5 \Rightarrow b = -3$
• $a - b - 6 = -1 \Rightarrow a + 3 - 6 = -1 \Rightarrow a = 2$

Langkah 3. $a + b = 2 + (-3) = -1$.

Cek ulang (cara lain): karena $x^2 \equiv -x - 1$, maka $x^3 \equiv 1$ dan $x^4 \equiv x$. Jadi $f(x) \equiv x + a + b(-x-1) + x - 6 = (2-b)x + (a-b-6)$. Dengan $a = 2, b = -3$: $5x - 1$ ✓.

Analisis pilihan: 11 dan 5 muncul bila tanda b salah ($b = 3$ memberi $a = 8$ atau $a = 2$); -5 dan -7 muncul dari salah hitung tanda pada pembagian bersusun.

Jawaban: C.

No. 3 Kunci: A, C

Konsep: titik potong dengan sumbu X adalah akar-akar $f(x) = 0$. Menurut teorema faktor, akar bulat suku banyak bermonik pasti pembagi suku tetapnya (-24).

Langkah 1 – Uji calon akar.
• $f(-2) = -8 + 12 + 20 - 24 = 0$ ✓
• $f(3) = 27 + 27 - 30 - 24 = 0$ ✓

Langkah 2 – Horner dengan $x = 3$. Koefisien $1,\ 3,\ -10,\ -24 \rightarrow$ hasil bagi $x^2 + 6x + 8$, sisa 0.
$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$
Jadi $f(x) = (x-3)(x+2)(x+4)$, akar-akarnya $-4, -2$, dan 3.

Cek dengan Vieta: jumlah akar $-4 - 2 + 3 = -3 = -\frac{3}{1}$ ✓; hasil kali $(-4)(-2)(3) = 24 = -\frac{-24}{1}$ ✓.

Analisis pilihan:
• $(-2, 0)$ ✓ dan $(3, 0)$ ✓.
• $(-1, 0)$ ✗: $f(-1) = -1 + 3 + 10 - 24 = -12$.
• $(4, 0)$ ✗: $f(4) = 64 + 48 - 40 - 24 = 48$. **Jebakan:** akar sebenarnya -4, bukan 4 (salah tanda saat membaca faktor $x + 4$).
• $(5, 0)$ ✗: $f(5) = 125 + 75 - 50 - 24 = 126$.

Jawaban: $(-2, 0)$ dan $(3, 0)$.

No. 4 Kunci: C

Konsep: total bahan $= P \cdot B$ (matriks 1×3 dikali 3×3 menghasilkan 1×3). Unsur ke-j hasil kali = baris P dikali kolom ke-j matriks B.

Langkah 1 – Kolom air (kolom ke-3).
$100 \cdot 50 + 120 \cdot 40 + 80 \cdot k = 13.000$

Langkah 2 – Hitung. $5.000 + 4.800 + 80k = 13.000 \Rightarrow 80k = 3.200 \Rightarrow k = 40$.

Cek ulang kolom lain: J: $100 \cdot 20 + 120 \cdot 10 + 80 \cdot 12 = 2.000 + 1.200 + 960 = 4.160$ ✓; GM: $1.500 + 3.000 + 640 = 5.140$ ✓.
Catatan: pada naskah sumber, total J dan GM tertulis 4.360 dan 4.960; angka itu tidak cocok dengan data matriks sehingga diperbaiki menjadi 4.160 dan 5.140. Kunci tidak berubah karena hanya kolom air yang diperlukan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis pilihan:

- 30 ml ✗ → total air menjadi $9.800 + 2.400 = 12.200$.
- 35 ml ✗ → 12.600.
- 40 ml ✓ → 13.000.
- 45 ml ✗ → 13.400.
- 50 ml ✗ → 13.800; pengecoh ini muncul bila mengira KA sama dengan WJ.

Jawaban: C.

No. 5 Kunci: E

Langkah 1 – Model SPLDV dari gambar. Seekor sapi butuh 10 kg rumput gajah dan 10 kg rumput gamal; seekor kambing butuh 2 kg rumput gajah dan 1 kg rumput gamal.

- Rumput gajah: $10x + 2y = 38 \rightarrow$ dibagi 2 $\rightarrow 5x + y = 19$
- Rumput gamal: $10x + y = 34$

Langkah 2 – Bentuk matriks. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix}$.

Langkah 3 – Invers matriks koefisien. $\det = 5 \cdot 1 - 1 \cdot 10 = -5$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Langkah 4 – Kalikan. $x = -\frac{19}{5} + \frac{34}{5} = 3$ dan $y = 2 \cdot 19 - 34 = 4$. Jadi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: 3 sapi dan 4 kambing.

Cek ulang: gajah $10 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 38$ ✓; gamal $10 \cdot 3 + 4 = 34$ ✓.

Analisis pilihan:

- A ✗: hasil $(15, 20)$ tidak memenuhi kebutuhan pakan.
- B ✗: perkaliannya sebenarnya menghasilkan $(40, 30)$, bukan $(4, 3)$, dan urutannya terbalik.
- C ✗: konstanta ditukar $(34, 38)$; hasil sebenarnya $(4{,}2;\ -4)$.
- D ✗: matriks $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$ belum dikalikan $\frac{1}{\det}$, sehingga hasilnya $(30, 40)$, bukan $(3, 4)$.
- E ✓: invers yang benar dan hasil yang benar.

Jawaban: E.

No. 6 Kunci: C, E

Konsep: susun matriks kapasitas (baris = hotel, kolom = tipe kamar) lalu kalikan dengan matriks harga (kolom), dalam ribu rupiah.

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 500 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.350 + 3.000 + 3.000 \\ 900 + 3.500 + 2.000 \\ 1.050 + 2.500 + 4.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.350 \\ 6.400 \\ 7.550 \end{bmatrix}$$

Jadi pendapatan Hotel A = Rp7.350.000, Hotel B = Rp6.400.000, Hotel C = Rp7.550.000.

Analisis tiap pernyataan:

1. ✗ A $(7.350) \neq$ C (7.550).
2. ✗ B (6.400) lebih **kecil** daripada A.
3. ✓ Hotel C paling besar.
4. ✗ Selisih A–B $= 950$, C–A $= 200$, C–B $= 1.150$; tidak sama.
5. ✓ Total $7.350 + 6.400 + 7.550 = 21.300$ ribu $=$ Rp21.300.000 $>$ Rp20.000.000.

Jebakan: Hotel A punya kamar terbanyak (18 kamar), tetapi Hotel C punya *Suite* terbanyak (harga tertinggi), sehingga pendapatannya paling besar. Banyak kamar ≠ besar pendapatan.

Jawaban: pernyataan 3 dan 5.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 7 Kunci: C, D, E

Langkah 1 – Tentukan model dari grafik. Titik $(0, 10)$, $(1, 70)$, $(2, 490)$: setiap tahun luasnya dikali $\frac{70}{10} = \frac{490}{70} = 7$. Jadi $L(t) = L_0 \cdot 7^t$, dengan L_0 luas awal.

Langkah 2 – Setelah 3 tahun. $L(3) = L_0 \cdot 7^3 = 343 L_0$, sehingga $L_0 = \frac{L(3)}{343}$.

Langkah 3 – Syarat $L_0 > 49$. $L(3) > 49 \cdot 343 = 16.807$ m².

Langkah 4 – Bandingkan.
- Danau A: $15.000 < 16.807 \rightarrow L_0 \approx 43{,}7$ ✗
- Danau B: $16.500 < 16.807 \rightarrow L_0 \approx 48{,}1$ ✗ (**jebakan:** paling dekat dengan batas)
- Danau C: $17.000 > 16.807 \rightarrow L_0 \approx 49{,}6$ ✓
- Danau D: $17.500 \rightarrow L_0 \approx 51{,}0$ ✓
- Danau E: $18.000 \rightarrow L_0 \approx 52{,}5$ ✓

Cek ulang: $49 \cdot 343 = 49 \cdot 7^3 = 7^5 = 16.807$ ✓.

Jebakan lain: memakai model $10 \cdot 7^t$ langsung (luas awal 10 m²) untuk semua danau; padahal yang sama hanya **faktor pertumbuhannya** (×7 per tahun).

Jawaban: Danau C, D, dan E.

No. 8 Kunci: D

Konsep: perkalian skalar dengan polinomial:
$k \cdot (a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T) = (ka_3)T^3 + (ka_2)T^2 + (ka_1)T$. **Setiap** koefisien dikalikan k.

Langkah 1. Total penambahan volume 10 drum $= 10 \cdot V(T)$.

Langkah 2.
$10(0{,}05T^3 + 0{,}4T^2 + 20T) = 0{,}5T^3 + 4T^2 + 200T$

Cek ulang dengan satu nilai: untuk $T = 10$, $V(10) = 50 + 40 + 200 = 290$ liter per drum, jadi 10 drum $= 2.900$. Pilihan D: $500 + 400 + 2.000 = 2.900$ ✓.

Analisis pilihan:
- A ✗: koma desimal diabaikan ($0{,}05$ dibaca 5 dan $0{,}4$ dibaca 4), lalu dikali 10. Akibatnya koefisien T^3 menjadi 1.000 kali, koefisien T^2 100 kali, dan hanya koefisien T yang benar 10 kali.
- B ✗: koefisien T^2 dan T benar, tetapi $0{,}05$ dibaca 5 sehingga koefisien T^3 menjadi 50 (1.000 kali, bukan 10 kali).
- C ✗: salah menggeser koma pada suku pertama: $10 \times 0{,}05 = 0{,}5$, bukan 5 (koefisien T^3 menjadi 100 kali).
- E ✗: suku $0{,}4T^2$ lupa dikali 10, padahal **setiap** koefisien harus dikali 10.

Cek cepat dengan $T = 10$: A memberi 56.000, B 52.400, C 7.400, E 2.540; hanya D yang memberi 2.900.

Jawaban: D.

No. 9 Kunci: 1S 2B 3B

Konsep: banyak unit x yang mungkin adalah penyelesaian $f(x) = 2.000$, yaitu akar polinomial $f(x) - 2.000 = 0$ yang bernilai positif.

Langkah 1 – Susun persamaan.
$x^3 - 70x^2 - 600x + 72.000 = 0$

Langkah 2 – Uji nilai yang ditanyakan.
- $x = 30$: $27.000 - 63.000 - 18.000 + 72.000 = 18.000 \neq 0 \rightarrow$ modalnya $f(30) = 20.000$ juta, bukan 2.000 juta.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

• $x = 40$: $64.000 - 112.000 - 24.000 + 72.000 = 0$ ✓
• $x = 60$: $216.000 - 252.000 - 36.000 + 72.000 = 0$ ✓

Langkah 3 – Faktorkan untuk memastikan. Bagi dengan $(x - 40)$ (Horner): hasil bagi $x^2 - 30x - 1.800 = (x - 60)(x + 30)$. Jadi akar-akarnya $40, 60$, dan -30. Nilai -30 ditolak karena banyak saham tidak mungkin negatif.

Kesimpulan:
1. 30 unit → **Salah** (tidak mungkin). **Jebakan:** angka 30 berasal dari akar -30 yang tandanya diabaikan.
2. 40 unit → **Benar** (mungkin).
3. 60 unit → **Benar** (mungkin).

Jawaban: Salah, Benar, Benar.

No. 10 Kunci: 1S 2B 3S

Konsep: pada $K(t) = a \cdot b^{t/p}$, nilai a adalah populasi awal dan setiap p satuan waktu populasi dikalikan b.

Pernyataan 1. $\dfrac{K(t+4)}{K(t)} = 2^{(t+4)/4 - t/4} = 2^1 = 2$. Setiap 4 tahun populasi menjadi **2 kali**, bukan 4 kali → **Salah**. (Angka 4 di depan adalah populasi awal, bukan faktor pertumbuhan.)

Pernyataan 2. $K(0) = 4 \cdot 2^0 = 4$ ribu ekor → **Benar**.

Pernyataan 3. 1 juta ekor $= 1.000$ ribu ekor.
• $K(20) = 4 \cdot 2^5 = 128$ ribu ekor, jauh di bawah 1.000 ribu.
• Waktu mencapai 1 juta: $4 \cdot 2^{t/4} = 1.000 \Rightarrow 2^{t/4} = 250 \Rightarrow \dfrac{t}{4} = {}^2\log 250 \approx 7{,}97 \Rightarrow t \approx 31{,}9$ tahun.
Jadi 1 juta baru tercapai sekitar 32 tahun → **Salah**.

Jebakan: lupa bahwa $K(t)$ dalam **ribu** ekor, sehingga mengira 1 juta $= 1.000.000$ dalam model.

Jawaban: Salah, Benar, Salah.

No. 11 Kunci: C

Langkah 1 – Koordinat titik. $A(0,0), B(6,0), D(1,4)$.

Langkah 2 – Titik C. Pada trapesium $ABCD$, $DC \parallel AB$ sehingga C setinggi D ($y = 4$). Karena sama kaki, kaki BC adalah cerminan AD terhadap sumbu simetri $x = 3$. D berjarak 1 satuan ke kanan dari A, maka C berjarak 1 satuan ke kiri dari B: $C(5,4)$.

Langkah 3 – Vektor $\vec{BC}$. $\vec{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, jadi $a = -1, b = 4$.

Langkah 4. $a^2 + 2b = 1 + 8 = 9$.

Cek ulang: $|\vec{BC}| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} = |\vec{AD}|$ ✓ dan $\vec{DC} = (4,0) \parallel \vec{AB}$ ✓.

Analisis pilihan:
• 5 ✗: lupa mengalikan b dengan 2 $(1 + 4)$.
• 7, 10, 13 ✗: berasal dari koordinat C yang keliru. Selalu cek $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$ dan $DC \parallel AB$.

Jawaban: C.

No. 12 Kunci: B, C, D

Konsep: karena kecepatan konstan dan lintasan lurus, jarak antarstasiun sebanding dengan waktu tempuhnya (perbandingan vektor pada satu garis).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1 – Panjang $\vec{AE}$. $\vec{AE} = (11-2, 6-3, 8-5) = (9, 3, 3)$

$|\vec{AE}| = \sqrt{81+9+9} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11} \approx 9{,}95$ km

Langkah 2 – Total waktu. $5+3+2+3 = 13$ menit, jadi setiap menit kereta menempuh $\dfrac{\sqrt{99}}{13} \approx 0{,}765$ km.

Langkah 3 – Jarak tiap pasangan.

- AB (5 menit): $\frac{5}{13}\sqrt{99} \approx 3{,}83$ km ✗
- BC (3 menit): $\approx 2{,}30$ km ✓
- CD (2 menit): $\approx 1{,}53$ km ✓
- DE (3 menit): $\approx 2{,}30$ km ✓
- CE (2 + 3 = 5 menit): $\approx 3{,}83$ km ✗

Cek tanpa desimal: jarak $< 3{,}5 \iff \frac{w}{13}\sqrt{99} < 3{,}5 \iff w^2 \cdot 99 < 3{,}5^2 \cdot 169 = 2.070{,}25 \iff w^2 < 20{,}9 \iff w \le 4$ menit. Jadi hanya pasangan dengan waktu ≤ 4 menit: BC, CD, DE ✓.

Jebakan: CE bukan stasiun bersebelahan; waktunya $2+3=5$ menit, bukan 3 menit.

Jawaban: BC, CD, dan DE.

No. 13 Kunci: E

Langkah 1 – Tentukan a dan b dari grafik. Maksimum $14{,}3$ (di $t=0$) dan minimum $10{,}3$ (di $t=6$).

- $a = \dfrac{14{,}3+10{,}3}{2} = 12{,}3$ (garis tengah)
- $b = \dfrac{14{,}3-10{,}3}{2} = 2$ (amplitudo; positif karena di $t=0$ grafik di puncak)

Model: $y = 12{,}3 + 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$.

Langkah 2 – Selesaikan $y = 12{,}3.\ 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = 0$

$\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = 3 + 6k$

Langkah 3 – Urutkan. $t = 3$ (pertama), $t = 9$ (kedua), $t = 15$ (ketiga).

Cek: $y(15) = 12{,}3 + 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = 12{,}3 + 0 = 12{,}3$ ✓.

Analisis pilihan: 3 jam dan 9 jam adalah saat pertama dan kedua; 12 jam adalah saat kedalaman maksimum; 10 jam tidak memenuhi ($\cos\frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2}, y = 13{,}3$).

Jebakan: mengira 12,3 m hanya tercapai sekali per periode. Garis tengah dilalui **dua kali** per periode (saat turun dan saat naik).

Jawaban: E.

No. 14 Kunci: B

Rumus panjang vektor: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Langkah 1 – Kuadratkan.

$(2m)^2 + (m+3)^2 + m^2 = 81$

Langkah 2 – Jabarkan.

$4m^2 + m^2 + 6m + 9 + m^2 = 81 \Rightarrow 6m^2 + 6m - 72 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 12 = 0.$

Langkah 3 – Faktorkan. $(m+4)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -4$ atau $m = 3$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cek ulang:

• $m = 3$: $\vec{AB} = (6, 6, 3)$, panjang $\sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$ ✓

• $m = -4$: $\vec{AB} = (-8, -1, -4)$, panjang $\sqrt{64 + 1 + 16} = 9$ ✓

Analisis pilihan: C muncul dari salah tanda saat memfaktorkan $((m - 4)(m + 3))$; A, D, E tidak memenuhi panjang 9 (mis. $m = 4$: $\sqrt{64 + 49 + 16} = \sqrt{129}$).

Jawaban: B.

No. 15 Kunci: A

Konsep: lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ berpusat di $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Lingkaran sepusat = pusatnya sama (jari-jari boleh berbeda).

Langkah 1 – Pusat dari gambar. Titik P berada di $(-3, 4)$; diameter 4 → jari-jari 2. Persamaan lingkaran pada gambar: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$, atau $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$.

Langkah 2 – Pusat setiap pilihan.

• A: $A = 6, B = -8 \rightarrow$ pusat $(-3, 4)$ ✓; $r^2 = 9 + 16 - 16 = 9, r = 3$ (sepusat, lebih besar).

• B: pusat $(3, 4)$ ✗ (tanda x terbalik)

• C: pusat $(-3, -4)$ ✗ (tanda y terbalik)

• D: pusat $(4, 3)$ ✗

• E: pusat $(-4, 3)$ ✗ (koordinat tertukar)

Cek: pilihan A dapat ditulis $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ ✓.

Jebakan: mencari persamaan dengan konstanta 21 (jari-jari 2). Pilihan B dan E memang memuat 21, tetapi pusatnya salah.

Jawaban: A.

No. 16 Kunci: B, D

Langkah 1 – Jari-jari. $r^2 = (3 - 2)^2 + (-1 + 3)^2 = 1 + 4 = 5$, jadi $r = \sqrt{5}$.

Langkah 2 – Gradien. $m_f = \dfrac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2$. Garis singgung tegak lurus $f \rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Langkah 3 – Letak titik singgung. Jari-jari ke titik singgung tegak lurus garis singgung, jadi **sejajar** garis f (arah $(1, 2)$). Panjang vektor $(1, 2)$ adalah $\sqrt{5} = r$. Maka titik singgungnya

$A \pm (1, 2) = (2 + 1, -3 + 2) = (3, -1) \quad$ dan $\quad (2 - 1, -3 - 2) = (1, -5)$

Cek dengan rumus garis singgung bergradien:

$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \pm \sqrt{5}\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}(x - 2) \pm \frac{5}{2}$.

• Garis $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ melalui $(3, -1)$ ✓; garis $y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$ melalui $(1, -5)$ ✓.

Analisis pilihan: $(3, 1), (-1, 5), (-3, -1)$ tidak terletak pada lingkaran (mis. $(3 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 17 \neq 5$). **Jebakan:** $(3, -1)$ adalah titik B yang sudah tergambar, dan memang salah satu titik singgung.

Jawaban: $(1, -5)$ **dan** $(3, -1)$.

No. 17 Kunci: E

Langkah 1 – Rumus komposisi. Pencerminan terhadap $y = x$: $(x, y) \rightarrow (y, x)$. Lalu translasi $(1, -1)$:

$x' = y + 1, \qquad y' = x - 1$

Sehingga $x = y' + 1$ dan $y = x' - 1$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 2 – Garis pertama. Substitusi ke $ax + y - 9 = 0$:
$a(y' + 1) + (x' - 1) - 9 = 0 \Rightarrow x' + ay' + (a - 10) = 0$
Disamakan dengan $x + 2y - 8 = 0$: $a = 2$ dan $a - 10 = -8$ ✓.

Langkah 3 – Garis kedua. Substitusi ke $x + by + 6 = 0$:
$(y' + 1) + b(x' - 1) + 6 = 0 \Rightarrow bx' + y' + (7 - b) = 0$
Disamakan dengan $2x - y - 9 = 0$ (kalikan -1: $-2x + y + 9 = 0$): $b = -2$ dan $7 - b = 9$ ✓.

Langkah 4. $2a - b = 4 - (-2) = 6$.

Cek ulang dengan titik: garis $2x + y - 9 = 0$ memuat $(0, 9)$ → dicerminkan $(9, 0)$ → ditranslasi $(10, -1)$; $10 + 2(-1) - 8 = 0$ ✓. Garis $x - 2y + 6 = 0$ memuat $(0, 3) \to (3, 0) \to (4, -1)$; $2 \cdot 4 - (-1) - 9 = 0$ ✓.

Jebakan: menyamakan koefisien tanpa memperhatikan bahwa persamaan garis boleh dikali konstanta (garis kedua perlu dikali -1). Pilihan 2 dan -2 muncul bila tanda b terbalik.

Jawaban: E.

No. 18 Kunci: A

Konsep: coba substitusi langsung lebih dulu. Jika penyebut tidak nol, nilai limit sama dengan nilai fungsinya.

Langkah 1 – Pembilang di $x = 3$. $27 - 27 + 6 + 1 = 7$.

Langkah 2 – Penyebut di $x = 3$. $5 + 9 - 81 = -67 \neq 0$.

Langkah 3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{5 + 3x - 9x^2} = \dfrac{7}{-67} = -\dfrac{7}{67}$.

Cek ulang: $9x^2 = 9 \cdot 9 = 81$, bukan $(9x)^2$.

Analisis pilihan:
- D ✗: lupa tanda negatif penyebut.
- B ✗: pembilang dihitung 6 (lupa $+1$).
- C ✗ dan E ✗: penyebut ditulis 76 (digit tertukar) dan tanda negatif hilang.

Jawaban: A.

No. 19 Kunci: B

Konsep: "porsi sangat banyak" berarti $p \to \infty$. Untuk fungsi rasional berderajat sama, limitnya adalah perbandingan koefisien pangkat tertinggi.

Langkah 1 – Bagi pembilang dan penyebut dengan p^2.

$$\lim_{p \to \infty} \frac{9 + \frac{2}{p} + \frac{10}{p^2}}{3 + \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2}} = \frac{9 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 3$$

Langkah 2. Keuntungan mendekati 3 juta rupiah = **Rp3.000.000,00**.

Cek numerik: $K(1.000) = \dfrac{9.002.010}{3.003.002} \approx 2{,}998$ ✓ (mendekati 3).

Analisis pilihan:
- Rp5.000.000 ✗: memakai $\frac{10}{2}$, yaitu nilai saat $p = 0$, bukan $p \to \infty$.
- Rp2.000.000 ✗ dan Rp10.000.000 ✗: hanya mengambil suku tetap penyebut atau pembilang.
- Rp9.000.000 ✗: hanya mengambil koefisien utama pembilang, lupa membagi dengan 3.

Jawaban: B.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 20 Kunci: D, E

Rumus rotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap $P(a,b)$:
$x' - a = -(y - b), \qquad y' - b = x - a$
Dengan $P(2,0)$: $x' = 2 - y$ dan $y' = x - 2$, sehingga $y = 2 - x'$ dan $x = y' + 2$.

Langkah 1 – Substitusi ke $3x + 2y = 6$.
$3(y' + 2) + 2(2 - x') = 6 \Rightarrow 3y' - 2x' + 10 = 6 \Rightarrow 2x' - 3y' = 4$
Jadi $l : 2x - 3y = 4$.

Langkah 2 – Uji setiap titik.
• $(-3,-2)$: $-6 + 6 = 0 \neq 4$ ✗
• $(-2,-1)$: $-4 + 3 = -1$ ✗
• $(1,2)$: $2 - 6 = -4$ ✗ **(jebakan:** tanda terbalik, titik ini memenuhi $2x - 3y = -4$, hasil rotasi searah jarum jam yang salah)
• $(2,0)$: $4 - 0 = 4$ ✓
• $(5,2)$: $10 - 6 = 4$ ✓

Cek ulang: pusat rotasi $(2,0)$ terletak pada garis asal ($3 \cdot 2 + 0 = 6$), sehingga tidak berpindah dan pasti terletak pada l ✓. Gradien asal $-\frac{3}{2}$, gradien $l = \frac{2}{3}$; hasil kalinya -1 (tegak lurus) sesuai rotasi 90° ✓.

Jawaban: $(2,0)$ **dan** $(5,2)$.

No. 21 Kunci: A, B, E

Konsep: banyak cat sebanding dengan luas daerah yang dicat.

Langkah 1 – Luas setiap warna.
• Biru: persegi – lingkaran besar ($r = 20$): $1.600 - 3{,}14 \cdot 400 = 1.600 - 1.256 = 344$ cm²
• Hitam: cincin $3{,}14(20^2 - 14^2) = 3{,}14 \cdot 204 = 640{,}56$ cm²
• Lingkaran dalam ($r = 14$): $3{,}14 \cdot 196 = 615{,}44$ cm²
• Merah: dua lengan 28×10 dikurangi tumpang tindih 10×10: $280 + 280 - 100 = 460$ cm² (pendekatan; karena ujung lengan mengikuti lengkung lingkaran, luas tepatnya sedikit lebih kecil, ±448 cm²)
• Putih: $615{,}44 - 460 \approx 155$ cm² (tepatnya ±167 cm²)

Langkah 2 – Bandingkan dengan hitam (640,56 cm²). Setengah hitam $= 320{,}28$ cm².
1. Setengah hitam + biru $= 664{,}28$ → lebih banyak ✓
2. Setengah hitam + merah ≈ 780 → lebih banyak ✓
3. Setengah hitam + putih ≈ 476 (tepatnya ±488) → lebih sedikit ✗
4. Biru + putih ≈ 499 (tepatnya ±511) → lebih sedikit ✗
5. Biru + merah ≈ 804 → lebih banyak ✓

Cek ulang: kesimpulan tidak berubah baik memakai pendekatan maupun luas tepat, karena selisihnya jauh dari batas 640,56.

Jebakan: mengira biru paling luas karena tampak di "pojok-pojok"; padahal luas biru hanya 344 cm², hampir separuh luas hitam.

Jawaban: pernyataan 1, 2, dan 5.

No. 22 Kunci: C

Konsep: translasi tidak mengubah jari-jari; dilatasi faktor k mengalikan jari-jari dengan $|k|$ dan memetakan pusat $(p,q) \to (kp, kq)$ (pusat dilatasi O).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1 – Faktor skala. L_3: pusat $(-4, 4)$, $r = 4$. L_2 berjari-jari 2 (sama dengan L_1). Jadi $|k| = \dfrac{4}{2} = 2$.

Langkah 2 – Pusat L_2. Dengan $k = 2$: pusat $L_2 = \left(\dfrac{-4}{2}, \dfrac{4}{2}\right) = (-2, 2)$.

Langkah 3 – Translasi. $T = (-2, 2) - (-5, 3) = (3, -1)$.

Cek ulang: $(-5, 3) \xrightarrow{T} (-2, 2) \xrightarrow{[O,2]} (-4, 4)$ ✓, jari-jari $2 \to 4$ ✓. (Faktor $k = -2$ memberi $T = (7, -5)$, tidak ada di pilihan.)

Analisis pilihan:
• A ✗ dan E ✗: faktor 8 muncul dari membandingkan $r^2 = 16$ dengan $r = 2$.
• B ✗: faktor 4 muncul dari membandingkan r^2: $\frac{16}{4}$. Faktor skala membandingkan **jari-jari**, bukan kuadratnya.
• D ✗: $T = (1, 1)$ diperoleh dari $(-4, 4) - (-5, 3)$, yaitu melupakan dilatasi.

Jawaban: C.

No. 23 Kunci: 1S 2S 3B

Langkah 1 – Jari-jari dari luas kaca merah. Persegi di dalam lingkaran berjari-jari r memiliki diagonal $2r$, sehingga luasnya $\dfrac{(2r)^2}{2} = 2r^2$. Empat potong kaca merah = lingkaran − persegi:

$$4 \times 456 = 3{,}14r^2 - 2r^2 = 1{,}14r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1.824}{1{,}14} = 1.600 \Rightarrow r = 40 \text{ cm}$$

Langkah 2 – Panjang kerangka.
• Keliling lingkaran: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 = 251{,}2$ cm
• Sisi persegi: $r\sqrt{2} = 40\sqrt{2} \approx 56$ cm, keliling $4 \times 56 = 224$ cm
• Dua diagonal persegi (= dua diameter): $2 \times 80 = 160$ cm
• Total $= 251{,}2 + 224 + 160 = 635{,}2$ cm $= 6{,}352$ m

Langkah 3 – Uji setiap pilihan (syarat: panjang ≥ 6,352 m dan sisa ≤ 1 m).
1. 2 logam A = 8 m → sisa $1{,}648$ m > 1 m → tidak pas → **Salah**.
2. 1 logam B = 5 m $< 6{,}352$ m → tidak cukup → **Salah**.
3. 1 logam C = 6,5 m → sisa $0{,}148$ m ≤ 1 m → pas → **Benar**.

Jebakan: lupa menghitung dua diagonal di tengah, sehingga total hanya $4{,}752$ m dan logam B dianggap pas.

Jawaban: Salah, Salah, Benar.

No. 24 Kunci: E

Langkah 1 – Nyatakan X dan Y dalam r dan θ. Misalkan jari-jari setengah lingkaran r, jadi $AB = 2r$. Garis tinggi dari C membagi sudut θ menjadi dua sudut $\frac{\theta}{2}$, sehingga tinggi segitiga

$$t = \frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{r^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

Luas setengah lingkaran $Y = \dfrac{1}{2}\pi r^2$.

Langkah 2 – Perbandingan.

$$\frac{X}{Y} = \frac{2}{\pi \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\pi}\cot\frac{\theta}{2}$$

Fungsi ini kontinu untuk $0 < \theta < \pi$, sehingga $\lim\limits_{\theta \to a} \dfrac{X}{Y} = \dfrac{2}{\pi}\cot\dfrac{a}{2}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis tiap pernyataan:

1. ✗ r^2 habis dibagi, jadi jari-jari (berapa pun panjang setengah lingkarannya) **tidak** memengaruhi limit.
2. ✗ Nilai limit bergantung pada a (sudut yang didekati).
3. ✗ $\frac{X}{Y}$ berubah bila θ berubah.
4. ✗ $\lim\limits_{\theta\to\pi/6}\dfrac{X}{Y}=\dfrac{2}{\pi}\cot\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{\pi}\approx 2{,}38$, bukan $\dfrac{2}{\pi}$. Nilai $\dfrac{2}{\pi}$ baru diperoleh bila $\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ (karena $\cot\dfrac{\pi}{4}=1$).
5. ✓ Jika $\theta\to\pi$, maka $\cot\dfrac{\theta}{2}\to\cot\dfrac{\pi}{2}=0$, jadi $\dfrac{X}{Y}\to 0$ (segitiga menjadi sangat pipih).

Catatan: naskah sumber menulis "Jawaban benar lebih dari satu", tetapi hasil perhitungan menunjukkan hanya pernyataan 5 yang benar (pernyataan 4 benar hanya jika sudutnya $\frac{\pi}{2}$).

Jawaban: pernyataan 5.

No. 25 Kunci: E

Rumus yang dipakai: $1-\cos 2A=2\sin^2 A$, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin au}{bu}=\dfrac{a}{b}$.

Langkah 1 – Substitusi $u=x-3$ ($u\to 0$). Maka $6x-18=6u$ dan

$$x-\frac{9}{x}=\frac{x^2-9}{x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x}=\frac{u(u+6)}{u+3}$$

Langkah 2 – Ubah pembilang. $1-\cos 6u=2\sin^2 3u$.

Langkah 3 – Susun limit.

$$\lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2 3u\cdot(u+3)}{u(u+6)\sin 6u}=\lim_{u\to 0}2\cdot\frac{\sin 3u}{u}\cdot\frac{\sin 3u}{\sin 6u}\cdot\frac{u+3}{u+6}$$

$$=2\cdot 3\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{2}$$

Cek numerik: $x=3{,}001\to$ nilai $\approx 1{,}4999$ ✓.

Analisis pilihan: $-\frac{3}{2}$ dan $-\frac{2}{3}$ muncul dari salah tanda $1-\cos$; $\frac{2}{3}$ dari membalik perbandingan; 0 dari menganggap pembilang "lebih cepat" nol tanpa menghitung.

Jawaban: E.

Simulasi 2 — Prediksi TKA 2026

No. 1 Kunci: D

Konsep: kolom pertama $K=PB$ berisi kebutuhan kain tiap sekolah: baris P (pesanan S dan L) dikalikan kolom kain pada B.

Langkah 1. Sekolah X: $50\cdot 1{,}2+30\cdot 1{,}5=60+45=105$; Y: $48+90=138$; Z: $24+30=54$.
Langkah 2. Total kain $105+138+54=297$ m.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: itu kebutuhan kain sekolah Y saja (baris kedua).
- B: itu jumlah kolom kedua (kancing), bukan kain.
- C: memakai 1,2 m untuk semua ukuran ($220\times 1{,}2$).
- E: memakai 1,5 m untuk semua ukuran ($220\times 1{,}5$).

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 2 Kunci: B, C, E

Konsep: hasil kali matriks penjualan dengan vektor harga memberi pendapatan; dengan vektor laba per gelas $h - m$ memberi laba. Sifat distributif: $Sh - Sm = S(h - m)$.

Analisis tiap pilihan:

• A ✗ — $Sh = \begin{bmatrix} 1.610 \\ 1.660 \\ 1.660 \end{bmatrix}$: pendapatan B dan C sama.

• B ✓ — $S(h - m) = S \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.020 \\ 1.060 \\ 1.040 \end{bmatrix}$.

• C ✓ — laba per gelas $h - m$, dikalikan banyak gelas: $Sh - Sm = S(h - m)$.

• D ✗ — Rp1.610.000 adalah pendapatan gerai A; labanya Rp1.020.000. *Jebakan:* menyamakan pendapatan dengan laba.

• E ✓ — $1.020 + 1.060 + 1.040 = 3.120$ ribu rupiah.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 3 Kunci: A

Konsep: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Bila $A^{-1} = A$, maka $A^2 = AA^{-1} = I$.

Langkah 1. $\det A = -9 + 8 = -1$, jadi $A^{-1} = -\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = A$.

Langkah 2. Maka $A^2 = I$ dan $A^{2026} = \left(A^2\right)^{1013} = I$.

Cek ulang: $A^2 = \begin{bmatrix} 9 - 8 & -6 + 6 \\ 12 - 12 & -8 + 9 \end{bmatrix} = I$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• B: $A^n = A$ hanya untuk n ganjil; 2026 genap.

• C: menganggap $\det A = -1$ berarti $A^2 = -I$; padahal $A^2 = I$.

• D: perpangkatan matriks bukan perkalian dengan skalar.

• E: menganggap pangkat besar membuat matriks menjadi nol.

No. 4 Kunci: B

Konsep: misalkan umur sekarang ayah a, ibu i, anak n: $a + i + n = 82$, $a = i + 4$, $i - 5 = 4(n - 5)$. "Lima tahun lalu" berlaku untuk **kedua** orang.

Langkah 1. Dari persamaan ketiga: $i = 4n - 15$, sehingga $a = 4n - 11$.

Langkah 2. Substitusi: $(4n - 11) + (4n - 15) + n = 82 \Rightarrow 9n = 108 \Rightarrow n = 12$.

Langkah 3. $i = 33$, $a = 37$; lima tahun lagi ayah berumur 42 tahun.

Cek ulang: $37 + 33 + 12 = 82$ ✓; lima tahun lalu ibu 28 dan anak 7, $28 = 4 \cdot 7$ ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: itu umur ayah sekarang.

• C: itu umur ibu lima tahun lagi.

• D: itu umur ibu sekarang.

• E: itu umur anak lima tahun lagi.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 5 Kunci: E

Konsep: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, jadi $P(1) = S(1)$ dan $P(2) = S(2)$; sisa oleh $(x+1)$ adalah $P(-1)$.

Langkah 1. $P(1) = 1 - 3 + a + b = 7 \Rightarrow a + b = 9$.
Langkah 2. $P(2) = 16 - 24 + 2a + b = 9 \Rightarrow 2a + b = 17$, jadi $a = 8, b = 1$.
Langkah 3. $P(-1) = 1 + 3 - 8 + 1 = -3$.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: memakai sisa lama $2x + 5$ di $x = -1$; sisa itu hanya berlaku di akar $x^2 - 3x + 2$.
- B: nilai a dan b tertukar ($a = 1, b = 8$).
- C: tanda $(-1)^3$ salah: $-3(-1)^3$ dihitung -3.
- D: itu $a + b$, bukan sisa.

No. 6 Kunci: C

Konsep: luas rumput $R(x)$ = luas lahan − luas kolam $= (2x+3)(x+1) - x^2$.

Langkah 1. $(2x+3)(x+1) = 2x^2 + 5x + 3$, jadi $R(x) = x^2 + 5x + 3$.
Langkah 2. $R(4) = 16 + 20 + 3 = 39$ m^2.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: itu luas seluruh lahan, 11×5.
- B: itu luas kolam.
- D: menjumlahkan luas lahan dan kolam.
- E: mengurangi dengan x, bukan x^2 (luas persegi bersisi x).

No. 7 Kunci: A, C, D

Konsep: teorema faktor: $f(c) = 0 \Leftrightarrow (x - c)$ faktor. Setelah satu akar ditemukan, bagi dengan Horner lalu faktorkan sisa kuadratnya.

Analisis tiap pilihan:
- A ✓ — $f(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$; dengan Horner, $f(x) = (x-3)(2x^2 + 3x - 2) = (x-3)(2x-1)(x+2)$.
- B ✗ — akar-akarnya 3, $\frac{1}{2}$, dan -2; $f(-3) = -54 - 27 + 33 + 6 = -42$. *Jebakan:* tanda akar dari faktor $(x-3)$.
- C ✓ — $3 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{2} = -\frac{-3}{2}$.
- D ✓ — di antara dua akar berurutan tandanya tetap; uji $f(1) = 2 - 3 - 11 + 6 = -6 < 0$.
- E ✗ — $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) = -3 = -\frac{d}{a}$.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 8 Kunci: 1B 2B 3S

Konsep: suku banyak dengan akar a, b, c dan koefisien utama 1 adalah $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$; sisa oleh $(x-a)$ adalah $f(a)$.

Pernyataan 1. $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$, jadi $f(0) = 1 \cdot (-2) \cdot (-4) = 8 \rightarrow$ **Benar**.
Pernyataan 2. 2 adalah akar, jadi $f(2) = 0 \rightarrow$ **Benar**.
Pernyataan 3. $f(3) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -4 < 0 \rightarrow$ **Salah**.

Jawaban: Benar, Benar, Salah.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 9 Kunci: B, C, E

Konsep: pada $N(t) = N_0 \cdot a^{t/T}$, nilai menjadi a kali setiap T satuan waktu; persamaan eksponen diselesaikan dengan menyamakan basis atau logaritma.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — menjadi 3 kali lipat setiap **2 jam** (pangkat $\frac{t}{2}$).
- B ✓ — $500 \cdot 3^2 = 4.500$.
- C ✓ — $3^{t/2} = 81 = 3^4$, jadi $t = 8$.
- D ✗ — $500 \cdot 3^{1/2} = 500\sqrt{3} \approx 866$. *Jebakan:* membagi kenaikan secara merata (linear).
- E ✓ — $3^{t/2} = \frac{N}{500} \Rightarrow \frac{t}{2} = \log_3 \frac{N}{500}$.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 10 Kunci: 1B 2B 3S

Konsep: $y = a^x + k$ dengan $a > 1$ selalu naik, melalui $(0, 1 + k)$, dan mempunyai asimtot datar $y = k$.

Pernyataan 1. $3^0 - 2 = -1$ → **Benar**.
Pernyataan 2. $3^x > 0$, sehingga $y > -2$ dan mendekati -2 untuk $x \to -\infty$ → **Benar**.
Pernyataan 3. basis $3 > 1$, jadi grafik selalu naik → **Salah**.

Jawaban: Benar, Benar, Salah.

No. 11 Kunci: B

Konsep: $T = 28$ berarti $\sin\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right) = \frac{1}{2}$, sehingga sudutnya $\frac{\pi}{6}$ atau $\frac{5\pi}{6}$ (dalam rentang yang mungkin).

Langkah 1. $\frac{\pi(t-9)}{12} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t - 9 = 2 \Rightarrow t = 11$.

Langkah 2. $\frac{\pi(t-9)}{12} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t - 9 = 10 \Rightarrow t = 19$.

Cek ulang: $T(19) = 26 + 4\sin\frac{5\pi}{6} = 28$ ✓; pada gambar garis $T = 28$ memotong kurva dua kali.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: hanya penyelesaian pertama; grafik memotong garis $T = 28$ dua kali.
- C: itu waktu suhu tertinggi (30 °C) dan terendah (22 °C).
- D: lupa menambahkan 9: itu nilai $t - 9$.
- E: penyelesaian kedua salah, ditulis $t - 9 = 2 + 12$.

No. 12 Kunci: D

Konsep: $AP : PB = 3 : 1$ dengan P di luar berarti $\vec{AP} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ (karena $AP - PB = AB$, jadi $AP = \frac{3}{2}AB$). Setara: $\vec{p} = \dfrac{3\vec{b} - \vec{a}}{3 - 1}$.

Langkah 1. $\vec{AB} = (2, 2, -2)$, jadi $\vec{AP} = (3, 3, -3)$.

Langkah 2. $P = A + \vec{AP} = (4, 2, -1)$.

Cek ulang: $AP = 3\sqrt{3}$ dan $PB = |(-1, -1, 1)| = \sqrt{3}$, perbandingannya $3 : 1$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: itu titik yang membagi AB **di dalam** dengan perbandingan $3 : 1$.
- B: perpanjangan diambil di pihak A.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- C: menambahkan $\vec{AB}$ sekali lagi dari B; itu perbandingan $2:1$.
- E: menganggap $AP = 3AB$.

No. 13 Kunci: A, B, D

Konsep: posisi benda berkecepatan tetap: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$; laju = panjang vektor kecepatan.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $|\vec{v}| = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = 1$.
- B ✓ — $A + 10\vec{v} = (2 + 6,\ 1 + 8)$.
- C ✗ — absis 5 dicapai saat $t = 5$, ketika ordinatnya $1 + 4 = 5$; titik $(5, 6)$ tidak dilewati.
- D ✓ — laju 1 m/s selama 5 detik.
- E ✗ — $\vec{v} = 0{,}2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, jadi searah; yang tegak lurus misalnya $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 14 Kunci: A

Konsep: vektor satuan searah $\vec{u}$ adalah $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, panjangnya 1.

Langkah 1. $\vec{AB} = B - A = (2, -3, 6)$.

Langkah 2. $|\vec{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, jadi vektor satuannya $\frac{1}{7}(2, -3, 6)$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: itu searah $\vec{BA}$ (berlawanan arah).
- C: dibagi kuadrat panjangnya; panjangnya $\frac{1}{7}$, bukan 1.
- D: belum dibagi panjangnya; panjang vektor ini 7.
- E: panjang dihitung $2 + 3 + 6$, bukan $\sqrt{4 + 9 + 36}$.

No. 15 Kunci: C

Konsep: lingkaran yang menyinggung kedua sumbu di kuadran I berpusat di (r, r) dengan jari-jari r: $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

Langkah 1. Melalui $(2, 1)$: $(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0 \Rightarrow r = 1$ atau $r = 5$.

Langkah 2. Untuk $r = 5$: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$.

Cek ulang: titik $(2, 1)$: $4 + 1 - 20 - 10 + 25 = 0$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: itu lingkaran yang lebih kecil ($r = 1$).
- B: tanda pusat terbalik; persamaan ini berpusat di kuadran III.
- D: konstanta $25 + 25 - 25 = 25$ terlupa; persamaan ini melalui O.
- E: lupa faktor 2 pada $-2ax$ dan $-2by$.

No. 16 Kunci: A, C, D

Konsep: garis singgung di titik (x_1, y_1) pada $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$: $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$; garis singgung tegak lurus jari-jari di titik singgung.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $(4 - 1)(x - 1) + (-1 + 2)(y + 2) = 10 \Rightarrow 3x + y = 11$.
- B ✗ — $\frac{1}{3}$ adalah gradien jari-jari $\overline{MP}$; garis singgung tegak lurus jari-jari, gradiennya -3.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- C ✓ — $x = 0 \Rightarrow y = 11$.
- D ✓ — titik singgung itu berseberangan dengan P terhadap pusat: $2(1,-2) - (4,-1) = (-2,-3)$.
- E ✗ — $\frac{|3-2-11|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$, sama dengan jari-jari (bukan r^2).

Jawaban: A, C, dan D.

No. 17 Kunci: A, C, E

Konsep: luas cincin $\pi(R^2 - r^2)$; bagian cincin bersudut α mempunyai luas $\frac{\alpha}{360^\circ}\pi(R^2 - r^2)$ dan keliling = busur luar + busur dalam + $2(R - r)$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $\pi(5^2 - 3^2) = 16\pi$.
- B ✗ — luas lingkaran berjari-jari 2 hanya 4π; luas cincin = $\pi(R^2 - r^2)$, bukan $\pi(R - r)^2$.
- C ✓ — $\frac{60}{360} \cdot 16\pi = \frac{8\pi}{3}$.
- D ✗ — busur luar dan dalam saja $\frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3}$; dua sisi lurus masing-masing 2 cm terlupa.
- E ✓ — busur luar $\frac{1}{6} \cdot 10\pi$, busur dalam $\frac{1}{6} \cdot 6\pi$, ditambah dua sisi lurus $5 - 3 = 2$ cm.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 18 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: satu putaran roda menempuh jarak sama dengan kelilingnya $2\pi r$; banyak putaran = jarak : keliling.

Pernyataan 1. $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 35 = 220$ → **Benar**.

Pernyataan 2. $10 \cdot 220 = 2.200$ cm = 22 m. *Jebakan:* memakai diameter sebagai keliling atau setengah keliling → **Salah**.

Pernyataan 3. $110.000 : 220 = 500$ → **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 19 Kunci: A, C, E

Konsep: rotasi 90° searah jarum jam dengan pusat O: $(x, y) \to (y, -x)$; berlawanan arah: $(x, y) \to (-y, x)$. Untuk bayangan garis, nyatakan x, y dalam x', y'.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — rotasi -90°: $(x, y) \to (y, -x)$, jadi $x = -y'$, $y = x'$; substitusi: $-2y' - x' + 4 = 0$.
- B ✗ — rotasi 90° membuat garis tegak lurus: gradien 2 menjadi $-\frac{1}{2}$.
- C ✓ — $(0, 4) \to (4, -0) = (4, 0)$, dan $4 + 0 - 4 = 0$ ✓.
- D ✗ — rotasi berlawanan arah memberi $x + 2y + 4 = 0$, garis yang berbeda (sejajar, di sisi lain O).
- E ✓ — rotasi dengan pusat O tidak mengubah jarak ke O: keduanya $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 20 Kunci: E

Konsep: dilatasi pusat O faktor k: $x' = kx, y' = ky$, jadi $x = \frac{x'}{k}$ dan $y = \frac{y'}{k}$ disubstitusikan.

Langkah 1. $\frac{y'}{2} = \left(\frac{x'}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x'}{2} + 3 = \frac{x'^2}{4} - x' + 3$.

Langkah 2. Dikali 2: $y' = \frac{1}{2}x'^2 - 2x' + 6$.

Cek ulang: puncak $(1, 2)$ berbayangan $(2, 4)$; pada hasil: $2 - 4 + 6 = 4$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: hanya mengalikan rumus dengan 2; koordinat x juga ikut diperbesar.
- B: membagi rumus dengan 2.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- C: substitusi $x = 2x'$ (seharusnya $x = \frac{x'}{2}$).
- D: y tidak ikut diganti dengan $\frac{y'}{2}$.

No. 21 Kunci: B

Konsep: susun rumus komposisi: cermin sumbu X $(x, y) \to (x, -y)$, lalu translasi: $(x', y') = (x + 1,\ -y + 3)$. Nyatakan x, y asal dalam x', y' dan substitusikan ke garis asal.

Langkah 1. $x = x' - 1, y = 3 - y'$.

Langkah 2. $a(x' - 1) + 2(3 - y') + b = 0 \Rightarrow ax' - 2y' + (6 - a + b) = 0$.

Langkah 3. Bandingkan dengan $3x - 2y + 10 = 0$: $a = 3$ dan $6 - 3 + b = 10$, jadi $b = 7$; $a + b = 10$.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: tanda konstanta salah, sehingga diperoleh $b = 1$.
- C: urutan transformasi dibalik (translasi dulu, baru pencerminan).
- D: memakai pencerminan terhadap sumbu Y.
- E: hanya nilai b.

No. 22 Kunci: A

Konsep: selalu coba substitusi dulu. Bila penyebut tidak nol, nilai limit fungsi rasional sama dengan nilai fungsinya.

Langkah 1. Pembilang di $x = 2$: $8 - 8 + 3 = 3$; penyebut: $4 + 2 - 1 = 5 \neq 0$.

Langkah 2. Limitnya $\dfrac{3}{5}$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: tanda pembilang salah dihitung.
- C: pembilang dan penyebut tertukar.
- D: penyebut dihitung $4 + 2 - 2$.
- E: mengira setiap limit pecahan harus difaktorkan; di sini substitusi langsung tidak menghasilkan $\frac{0}{0}$.

No. 23 Kunci: C

Konsep: $K(n) = \dfrac{n}{2 + n/5} = \dfrac{5n}{10 + n}$; derajat pembilang dan penyebut sama, jadi limitnya perbandingan koefisien utama.

Langkah 1. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{5n}{n + 10} = 5$.

Langkah 2. Untuk berkas besar, waktu 2 detik di awal tidak berarti; kecepatannya mendekati 5 MB per detik.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: memakai waktu memulai sambungan.
- B: hasilnya terbalik ($\frac{1}{5}$).
- D: mengalikan $2 \cdot 5$.
- E: mengira makin besar berkas makin cepat tanpa batas; waktu sambungan hanya membuat berkas kecil lebih lambat.

No. 24 Kunci: A, C, D

Konsep: fungsi kontinu cukup disubstitusi; untuk $\frac{0}{0}$ pakai $\frac{\tan\theta}{\theta} \to 1$ dan $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — limit dasar $\frac{\tan\theta}{\theta} \to 1$.
- B ✗ — $\tan\theta$ membesar tanpa batas: sorot hampir sejajar pantai sehingga titik sorotnya makin jauh.
- C ✓ — $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2\cos\theta} = \dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{\theta^2}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta} \to \dfrac{1}{2}\cdot 1$.
- D ✓ — fungsi kontinu di $\frac{\pi}{4}$: $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.
- E ✗ — $\dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{\theta\cos\theta} \to 0$; bentuk $1-\cos\theta$ setara dua faktor θ.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 25 Kunci: D

Konsep: misalkan $u = x - 1 \to 0$, sehingga $\pi x = \pi + \pi u$. Karena tangen berperiode π, $\tan(\pi + \pi u) = \tan(\pi u)$.

Langkah 1. $\dfrac{\tan(\pi x)}{x-1} = \dfrac{\tan(\pi u)}{u}$.

Langkah 2. $\lim_{u\to 0}\dfrac{\tan(\pi u)}{u} = \pi$.

Cek ulang: di $x = 1{,}0001$: $\frac{\tan(1{,}0001\pi)}{0{,}0001} \approx 3{,}1416$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: koefisien π pada sudut terlupa.
- B: menulis $\tan(\pi + v) = -\tan v$; tangen berperiode π, jadi $\tan(\pi + v) = \tan v$.
- C: menganggap $\tan\pi = 0$ berarti limitnya 0, padahal penyebut juga menuju 0.
- E: bentuk $\frac{0}{0}$ belum berarti limit tidak ada.

Simulasi 3 — Prediksi TKA 2026

No. 1 Kunci: A

Konsep: pB = total bahan (kg) yang diperlukan; dikalikan h menjadi total biaya. Perkalian matriks bersifat asosiatif: $(pB)h = p(Bh)$.

Langkah 1. $pB = [30\cdot 1{,}5 + 20\cdot 2 \quad 30\cdot 0{,}3 + 20\cdot 0{,}4] = [85 \quad 17]$ (kg minyak, kg soda).

Langkah 2. $pBh = 85\cdot 25 + 17\cdot 15 = 2.125 + 255 = 2.380$ ribu rupiah.

Cek ulang: $Bh = \begin{bmatrix}42\\56\end{bmatrix}$ (biaya per lusin), lalu $30\cdot 42 + 20\cdot 56 = 2.380$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: hanya biaya minyak kelapa ($85\cdot 25$).
- C: itu biaya satu lusin sabun batang ditambah satu lusin sabun cair (Bh dijumlahkan), belum dikali banyak produksi.
- D: banyak produksi sabun batang dan sabun cair tertukar.
- E: hanya biaya soda ($17\cdot 15$).

No. 2 Kunci: B, D, E

Konsep: hasil kali matriks hasil pertandingan dengan vektor poin memberi total poin setiap tim; mengganti aturan berarti mengganti vektor p.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — $Hp = \begin{bmatrix}14\\13\\15\end{bmatrix}$: tim B 13, tim A 14. *Jebakan:* tim B paling banyak seri.
- B ✓ — $5 \cdot 3 + 0 + 0 = 15$.
- C ✗ — dengan $p = (2, 1, 0)$: $Hp = (10, 10, 10)$, ketiga tim sama.
- D ✓ — baris tim × kolom aturan poin = total poin tim itu.
- E ✓ — $8 + 2 = 6 + 4 = 10 + 0 = 10$.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 3 Kunci: C

Konsep: dari $XA = B$, kalikan kedua ruas dari kanan dengan A^{-1}: $X = BA^{-1}$.

Langkah 1. $\det A = 4 - 3 = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}$.

Langkah 2. $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix}8-9 & -4+6\\2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$.

Cek ulang: $XA = \begin{bmatrix}-2+6 & -1+4\\4-3 & 2-2\end{bmatrix} = B$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: menghitung $A^{-1}B$; dari $XA = B$ invers dikalikan dari **kanan**: $X = BA^{-1}$.
- B: menghitung BA, bukan BA^{-1}.
- D: tanda invers salah (memakai $-A^{-1}$).
- E: "invers" dibuat tanpa menukar letak unsur diagonal samping.

No. 4 Kunci: E

Konsep: misalkan debit (liter/menit) keran A, B, C adalah a, b, c: $a + b = 14, b + c = 16, a + c = 18$.

Langkah 1. Jumlahkan ketiganya: $2(a + b + c) = 48$, jadi $a + b + c = 24$ liter/menit ($a = 8, b = 6, c = 10$).

Langkah 2. Waktu $= \dfrac{240}{24} = 10$ menit.

Cek ulang: $a + b = 14$ ✓, $b + c = 16$ ✓, $a + c = 18$ ✓.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: jumlah ketiga persamaan (48) tidak dibagi 2: tiap keran terhitung dua kali.
- B: hanya memakai keran C $(240 : 10)$.
- C: hanya memakai keran B $(240 : 6)$.
- D: hanya memakai keran B dan C $(240 : 16)$.

No. 5 Kunci: B

Konsep: $x^3 - x^2 - 2x = x(x - 2)(x + 1)$. Dari sisa yang diketahui: $f(2) = 6$, $f(-1) = 3$ (dari $x + 4$), $f(0) = 6$ dan $f(-1) = 3$ (dari $3x + 6$, konsisten).

Langkah 1. Sisa $S(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $S(0) = 6, S(2) = 6, S(-1) = 3$; jadi $c = 6$.

Langkah 2. $4a + 2b = 0$ dan $a - b = -3$: $b = -2a$, $3a = -3$, $a = -1, b = 2$.

Langkah 3. $S(x) = -x^2 + 2x + 6$.

Cek ulang: $S(-1) = -1 - 2 + 6 = 3$ ✓.

Jawaban: B.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: mengalikan kedua sisa; sisa pembagian oleh suku banyak berderajat 3 berderajat paling tinggi 2 dan ditentukan oleh nilai di akar pembagi.
• C: tanda a dan b terbalik.
• D: memakai salah satu sisa yang diketahui.
• E: dari $4a + 2b = 0$ ditulis $b = -a$, padahal $b = -2a$.

No. 6 Kunci: D

Konsep: laba = pendapatan − biaya, dengan pendapatan = banyak (ratus unit) × harga per ratus unit. 400 unit berarti $x = 4$.

Langkah 1. $L(x) = 30x - x^2 - 0{,}5x^3 + 2x^2 - 10x - 50 = -0{,}5x^3 + x^2 + 20x - 50$.
Langkah 2. $L(4) = -32 + 16 + 80 - 50 = 14$, yaitu laba Rp14 juta.

Cek ulang: $4H(4) = 104$ dan $B(4) = 32 - 32 + 40 + 50 = 90$; $104 - 90 = 14$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: menghitung $B(4) - 4H(4)$ (tanda terbalik).
• B: itu pendapatan $4 \cdot H(4)$, belum dikurangi biaya.
• C: lupa mengalikan $H(4)$ dengan banyak produksi: $26 - 90$.
• E: menjumlahkan pendapatan dan biaya.

No. 7 Kunci: A, C, D

Konsep: suku banyak berbentuk $x^4 + bx^2 + c$ difaktorkan seperti persamaan kuadrat dalam x^2; setiap faktor $x^2 - k$ $(k > 0)$ memberi dua akar $\pm\sqrt{k}$.

Analisis tiap pilihan:
• A ✓ — $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; akarnya ± 1 dan ± 2.
• B ✗ — $-1 - 1 + 2 - 2 = 0$. *Jebakan:* menjumlah akar-akar dari x^2, yaitu $1 + 4$.
• C ✓ — terlihat dari pemfaktoran di atas.
• D ✓ — $f(1{,}5) = 5{,}0625 - 11{,}25 + 4 < 0$; tanda tetap di antara dua akar berurutan.
• E ✗ — $f(0) = 4$.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 8 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: nilai suku banyak di suatu titik = sisa pembagian oleh $(t - a)$; akar suku banyak adalah nilai t yang membuatnya nol.

Pernyataan 1. $8 - 36 + 48 = 20 \rightarrow$ **Benar**.
Pernyataan 2. $h(4) = 64 - 144 + 96 = 16 \neq 0$; satu-satunya akar adalah $t = 0$ karena $t^2 - 9t + 24$ tidak mempunyai akar real → **Salah**.
Pernyataan 3. $h(1) = 1 - 9 + 24 = 16 \rightarrow$ **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 9 Kunci: A, B, D

Konsep: $-\log(ab) = -\log a - \log b$; perkalian konsentrasi dengan 10 mengubah pH sebesar 1, dengan tanda berlawanan.

Analisis tiap pilihan:
• A ✓ — $-\log 10^{-4} = 4$.
• B ✓ — $-(\log 2 + \log 10^{-3}) = 3 - \log 2$.
• C ✗ — pH lebih besar berarti $[\mathrm{H}^+]$ lebih kecil: pH 6 justru 1.000 kali kurang asam. *Jebakan:*

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

membandingkan angka pH secara langsung.

• D ✓ — $\frac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^2$.

• E ✗ — $-\log \frac{[\mathrm{H}^+]}{10} = \mathrm{pH} + 1$: pH **naik** 1.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 10 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: $y = 2^{x-1}$ adalah grafik $y = 2^x$ yang digeser 1 satuan ke kanan; titik $(0, 1)$ bergeser ke $(1, 1)$.

Pernyataan 1. $2^0 = 1 \rightarrow$ **Benar**.

Pernyataan 2. $2^{-1} = \frac{1}{2}$, jadi titik potongnya $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Jebakan:* mengira semua grafik eksponen melalui $(0, 1) \rightarrow$ **Salah**.

Pernyataan 3. $2^2 = 4 \rightarrow$ **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 11 Kunci: A

Konsep: $|A| \le c$ setara $-c \le A \le c$. Pada grafik: bagian kurva $y = |2x - 4|$ yang berada di bawah atau pada garis $y = 6$.

Langkah 1. $-6 \le 2x - 4 \le 6 \Rightarrow -2 \le 2x \le 10 \Rightarrow -1 \le x \le 5$.

Cek ulang: pada gambar kurva memotong garis $y = 6$ di $x = -1$ dan $x = 5$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• B: hanya memakai $2x - 4 \le 6$; batas kiri $2x - 4 \ge -6$ terlupa.

• C: tanda bilangan -4 terbalik saat dipindahkan.

• D: itu penyelesaian $|2x - 4| \ge 6$ (grafik di atas garis).

• E: dari $2x - 4 \le 6$ ditulis $2x \le 6$ (lupa menambah 4).

No. 12 Kunci: C

Konsep: titik P membagi AB di dalam dengan $AP : PB = m : n$: $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$ (bobot $\vec{a}$ adalah bagian di seberangnya).

Langkah 1. $\vec{p} = \dfrac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} = \dfrac{(-3, 12, 6) + (8, -2, 14)}{5} = (1, 2, 4)$.

Cek ulang: $\vec{AP} = (2, -2, 2)$ dan $\vec{PB} = (3, -3, 3)$, perbandingan panjangnya $2 : 3$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

• A: perbandingan dibalik, menjadi $AP : PB = 3 : 2$.

• B: itu titik tengah AB.

• D: memakai rumus pembagian di luar.

• E: menjumlahkan $\vec{a} + \vec{b}$ tanpa bobot dan tanpa membagi.

No. 13 Kunci: A, C, D

Konsep: resultan gaya = jumlah vektor per komponen; besar vektor $\sqrt{x^2 + y^2}$. Besar resultan umumnya tidak sama dengan jumlah besar gaya.

Analisis tiap pilihan:

• A ✓ — dijumlahkan per komponen.

• B ✗ — besar resultan $|(120, 0)| = 120$ N. *Jebakan:* menjumlahkan besar gaya $100 + 100$, padahal arahnya berbeda.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- C ✓ — $\sqrt{60^2 + 80^2} = 100$.
- D ✓ — komponen Y resultan 0 dan komponen X positif.
- E ✗ — resultan menjadi $(120, 160)$, besarnya 200 N.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 14 Kunci: E

Konsep: hitung vektornya dulu per komponen, baru panjangnya: $|\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$.

Langkah 1. $2\vec{u} - 3\vec{v} = (4 - 3,\ -6 - 3,\ 2 + 6) = (1, -9, 8)$.
Langkah 2. Panjangnya $\sqrt{1 + 81 + 64} = \sqrt{146}$.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: menghitung $2\vec{u} + 3\vec{v} = (7, -3, -4)$.
- B: itu panjang $\vec{u}$.
- C: menghitung $2|\vec{u}| - 3|\vec{v}|$; panjang selisih vektor tidak sama dengan selisih panjangnya.
- D: itu panjang $\vec{v}$.

No. 15 Kunci: B

Konsep: baca pusat (a, b) dan satu titik pada lingkaran dari petak; r = jarak keduanya; persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Langkah 1. Pusat $(-2, 1)$ dan titik $(1, 5)$: $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Langkah 2. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 + 1 - 25 = 0$, yaitu $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: tanda koordinat pusat terbalik.
- C: konstanta ditulis $-r^2$, padahal $a^2 + b^2 - r^2 = 4 + 1 - 25$.
- D: lupa mengurangkan r^2.
- E: lupa faktor 2 pada $-2ax$ dan $-2by$.

No. 16 Kunci: A, C, E

Konsep: kedudukan garis terhadap lingkaran ditentukan jarak pusat ke garis d: $d < r$ memotong, $d = r$ menyinggung, $d > r$ tidak memotong.

Analisis tiap pilihan:
- A ✓ — $r^2 = 9 + 1 - 5 = 5$.
- B ✗ — jarak pusat ke $x - y = 0$ adalah $\frac{|3+1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > \sqrt{5}$: garis tidak memotong lingkaran.
- C ✓ — $\frac{|3+1+k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow k = -4 \pm \sqrt{10}$; jumlahnya -8.
- D ✗ — garis ini melalui pusat $(3, -1)$, jadi memotong lingkaran di dua titik (tali busur terpanjang).
- E ✓ — $(4 - 3)(x - 3) + (1 + 1)(y + 1) = 5 \Rightarrow x + 2y = 6$; titik $(4, 1)$ memang pada lingkaran.

Jawaban: A, C, dan E.

No. 17 Kunci: B, C, E

Konsep: bangun gabungan dipecah menjadi bagian sederhana; keliling hanya menghitung tepi luar, luas menjumlahkan semua bagian.

Analisis tiap pilihan:
- A ✗ — sisi persegi berada di dalam logo, bukan tepi; kelilingnya hanya empat busur. *Jebakan:*

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

menambahkan keliling persegi.

- B ✓ — persegi 16 + empat setengah lingkaran berjari-jari 2: $4 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 4 = 8\pi$.
- C ✓ — empat setengah lingkaran = dua lingkaran penuh berdiameter 4: $2 \cdot 4\pi$.
- D ✗ — $16\pi \approx 50{,}3$, sedangkan $16 + 8\pi \approx 41{,}1$.
- E ✓ — $8\pi \approx 25{,}1 > 16$.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 18 Kunci: 1S 2B 3B

Konsep: setengah lingkaran berjari-jari r: luas $\frac{1}{2}\pi r^2$, keliling = πr + diameter $2r$.

Pernyataan 1. setengah keliling lingkaran: $\frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 14 = 22$ m. *Jebakan:* memakai keliling lingkaran penuh → **Salah**.

Pernyataan 2. $\frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 7^2 = 77$ → **Benar**.

Pernyataan 3. tepi lengkung 22 m + diameter 14 m → **Benar**.

Jawaban: Salah, Benar, Benar.

No. 19 Kunci: A, B, D

Konsep: rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat P: kurangi P, putar $(x, y) \to (-y, x)$, tambahkan P kembali.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — pusat rotasi tidak berpindah.
- B ✓ — $A - C = (-2, -2) \to (2, -2)$, lalu $C + (2, -2) = (5, 1)$.
- C ✗ — $(-1, 3)$ adalah hasil rotasi terhadap O. Terhadap C: $B - C = (0, -2) \to (2, 0)$, jadi $B' = (5, 3)$.
- D ✓ — $D - C = (-2, 0) \to (0, -2)$, jadi $D' = (3, 1) = B$.
- E ✗ — $A'B'C'D'$ menempati $3 \le x \le 5, 1 \le y \le 3$, sedangkan $ABCD$ menempati $1 \le x \le 3$; keduanya hanya bersinggungan pada sisi BC.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 20 Kunci: D

Konsep: dilatasi lingkaran: pusat M berpindah ke $P + k(M - P)$, jari-jari menjadi $|k|r$.

Langkah 1. $M - P = (3, -2)$, dikali 2 menjadi $(6, -4)$; pusat baru $(-1 + 6, 1 - 4) = (5, -3)$.
Langkah 2. Jari-jari $2 \cdot 3 = 6$: $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 36$.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: memakai pusat dilatasi O.
- B: r^2 dikali 2; jari-jari dikali 2, jadi r^2 dikali 4.
- C: jari-jari dianggap tetap.
- E: pusat dihitung $kX + P$, bukan $P + k(X - P)$.

No. 21 Kunci: A

Konsep: komposisi "cermin $y = -x$ lalu R_{90°" bermatriks $R_{90^\circ} M_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, yaitu pencerminan terhadap sumbu X.

Langkah 1. $(x, y) \to (x, -y)$, jadi $x = x'$ dan $y = -y'$.
Langkah 2. Substitusi: $3x' - y' = 6$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Cek ulang: titik $(2, 0)$: cermin $y = -x$ memberi $(0, -2)$, rotasi memberi $(2, 0)$; $6 - 0 = 6$ ✓. Titik $(0, 6)$: $(-6, 0) \to (0, -6)$; $0 + 6 = 6$ ✓.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: urutan transformasi dibalik (rotasi dulu): hasilnya setara pencerminan terhadap sumbu Y.
- C: rotasi terlupa (hanya pencerminan terhadap $y = -x$).
- D: pencerminan terlupa (hanya rotasi).
- E: mengira komposisinya sama dengan rotasi 180°.

No. 22 Kunci: C

Konsep: limit di titik sambung fungsi bercabang ada bila limit kiri = limit kanan.

Langkah 1. Limit kiri: $1^2 + 1 = 2$. Limit kanan: $a \cdot 1 - 1 = a - 1$.
Langkah 2. $a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: itu nilai limitnya $(1^2 + 1)$, bukan nilai a.
- B: menyamakan $ax - 1$ dengan 0 di $x = 1$.
- D: tanda salah saat memindahkan -1.
- E: limit kiri dan kanan dapat disamakan dengan memilih a yang tepat.

No. 23 Kunci: B

Konsep: limit fungsi rasional di tak hingga dengan derajat pembilang dan penyebut sama = perbandingan koefisien utama.

Langkah 1. $\lim_{t \to \infty} \dfrac{60t}{t + 5} = \dfrac{60}{1} = 60$.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: membagi 60 dengan 5.
- C: itu nilai $K(5)$, kecepatan setelah 5 minggu.
- D: menjumlahkan $60 + 5$.
- E: mengira latihan selalu menambah kecepatan tanpa batas; modelnya mendatar mendekati satu nilai.

No. 24 Kunci: A, C, D

Konsep: lebar persegi panjang $2 \cos x$ dan tingginya $\sin x$. Substitusi bila fungsinya kontinu dan penyebut tidak nol; bentuk $\frac{0}{0}$ memakai $\frac{\sin ax}{x} \to a$, bila perlu setelah menggeser sudut.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $\dfrac{\sin 2x}{x} \to 2$.
- B ✗ — $\sin \pi = 0$: persegi panjang menjadi pipih tegak.
- C ✓ — fungsi kontinu: $4 \cdot 1 + 0$; persegi panjang menjadi pipih sepanjang diameter (dua kali panjang 2).
- D ✓ — misalkan $u = \frac{\pi}{2} - x$: $\sin 2x = \sin(\pi - 2u) = \sin 2u$, dan $\dfrac{\sin 2u}{u} \to 2$.
- E ✗ — pembilang menuju 0 dan penyebut menuju 4, jadi limitnya 0.

Jawaban: A, C, dan D.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 25 **Kunci: D**

Konsep: misalkan $u = x - 2 \to 0$: $2x - 4 = 2u$ dan $x^2 - 4 = u(u+4)$. Pakai $1 - \cos 2u = 2\sin^2 u$.

Langkah 1. $\dfrac{2\sin^2 u}{u(u+4)\sin u} = \dfrac{2\sin u}{u} \cdot \dfrac{1}{u+4}$.

Langkah 2. Limitnya $2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Cek ulang: di $x = 2{,}001$ nilainya $\approx 0{,}4999$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: faktor $(x+2) \to 4$ dari $x^2 - 4$ terlupa.
- B: memakai $1 - \cos 2u = \sin^2 u$ (faktor 2 terlupa).
- C: menganggap pembilang $1 - \cos$ hanya setara satu faktor u.
- E: menulis $x^2 - 4 = (2-x)(x+2)$ (tanda salah).

Simulasi 4 — Prediksi TKA 2026

No. 1 **Kunci: E**

Konsep: unsur AM baris ke-i kolom ke-j = total belanja keluarga ke-i di minimarket ke-j.

Langkah 1. Keluarga 2 di X: $70 + 72 + 68 = 210$; di Y: $68 + 76 + 64 = 208$ (ribu rupiah).

Langkah 2. Di Y lebih hemat Rp2.000.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: selisihnya benar, tetapi minimarket yang lebih murah tertukar.
- B: memakai baris keluarga 1 untuk selisih.
- C: menganggap harga yang lebih mahal dan lebih murah saling menutup tanpa menghitung.
- D: itu hasil untuk keluarga 1 (baris pertama AM).

No. 2 **Kunci: A, C, D**

Konsep: transpos menukar baris menjadi kolom; dua matriks sama bila semua unsur seletak sama. Sifat: $\det A^T = \det A$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $A^T = \begin{bmatrix} x+y & 3 \\ 2 & x-y \end{bmatrix} = B$ memberi $x + y = 7$ dan $x - y = 3$, jadi $x = 5, y = 2$.
- B ✗ — unsur baris 1 kolom 2: A bernilai 2, B bernilai $z + 1 = 3$. Matriks dan transposnya sama hanya bila simetris.
- C ✓ — $z + 1 = 3$, jadi $z = 2$; $5 + 2 + 2 = 9$.
- D ✓ — $\det A = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 15$, dan $\det A^T = \det A$.
- E ✗ — setara dengan $A = B$, yang salah.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 3 **Kunci: B**

Konsep: $\det(kM) = k^n \det M$ untuk ordo n; $\det(MN) = \det M \cdot \det N$; $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$; $\det A^T = \det A$.

Langkah 1. $\det\left(2A^{-1}A^T\right) = 2^2 \cdot \det A^{-1} \cdot \det A^T = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 4$.

Jawaban: B.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: menganggap $\det(2M) = 2\det M$; untuk ordo $2 \times 2, \det(2M) = 2^2 \det M$.
- C: menganggap $\det A^T = \frac{1}{3}$.
- D: menganggap $\det A^{-1} = 3$.
- E: menjumlahkan sifat secara keliru: $2 \cdot 3$.

No. 4 Kunci: D

Konsep: misalkan a, b, c kg pakan A, B, C: $2a + b + 3c = 11, a + 2b + c = 8, a + b + 2c = 7$.

Langkah 1. Persamaan kedua – ketiga: $b - c = 1$, jadi $b = c + 1$.
Langkah 2. Persamaan ketiga: $a = 7 - b - 2c = 6 - 3c$. Substitusi ke persamaan pertama: $12 - 6c + c + 1 + 3c = 11 \Rightarrow c = 1$.
Langkah 3. $b = 2, a = 3$.

Cek ulang: protein $6 + 2 + 3 = 11$ ✓, lemak $3 + 4 + 1 = 8$ ✓, serat $3 + 2 + 2 = 7$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: itu banyak pakan B.
- B: itu banyak pakan C.
- C: itu jumlah seluruh pakan.
- E: determinan matriks koefisiennya $2 \neq 0$, jadi penyelesaiannya tunggal.

No. 5 Kunci: A

Konsep: bentuk pembagian: $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) + (2x - 3)$. Pembagi baru $(x - 1)(x - 2)$, jadi sisa $px + q$ ditentukan oleh $f(1)$ dan $f(2)$.

Langkah 1. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 7$; $f(1) = -7$ dan $f(2) = 1$.
Langkah 2. $p + q = -7$ dan $2p + q = 1$: $p = 8, q = -15$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- B: memakai sisa pembagian oleh $x^2 - 4$; pembaginya berbeda.
- C: tanda kedua koefisien terbalik.
- D: salah menghitung $f(2) = -1$.
- E: itu $f(x)$ sendiri; sisa harus berderajat paling tinggi 1.

No. 6 Kunci: B

Konsep: jumlahkan suku banyak dengan mengumpulkan suku sejenis: $(U_1 + U_2)(x) = x^3 - x + 8$, lalu substitusi.

Langkah 1. $(U_1 + U_2)(3) = 27 - 3 + 8 = 32$.

Cek ulang: $U_1(3) = 27 - 18 + 5 = 14$ dan $U_2(3) = 18 - 3 + 3 = 18$; jumlahnya 32 ✓.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: hanya keuntungan cabang 1.
- C: hanya keuntungan cabang 2.
- D: menghitung $U_1 - U_2$.
- E: saat menjumlah, $-2x^2 + 2x^2$ ditulis $4x^2$.

No. 7 Kunci: A, C, D

Konsep: titik potong dengan sumbu X adalah $(x, 0)$ dengan $f(x) = 0$. Suku banyak empat suku sering dapat difaktorkan dengan pengelompokan.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Analisis tiap pilihan:
• A ✓ — $f(-3) = -27 - 18 + 27 + 18 = 0$.
• B ✗ — $f(-2) = -8 - 8 + 18 + 18 = 20 \neq 0$. *Jebakan:* tanda akar dari faktor $(x - 2)$.
• C ✓ — $f(x) = x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$.
• D ✓ — $f(3) = 27 - 18 - 27 + 18 = 0$.
• E ✗ — itu titik potong dengan sumbu Y.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 8 Kunci: 1B 2B 3S

Konsep: akar suku banyak memisahkan daerah bertanda positif dan negatif; tanda di antara dua akar diuji dengan satu nilai.

Pernyataan 1. $L(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ → **Benar**.
Pernyataan 2. $64 - 96 + 44 - 6 = 6$ → **Benar**.
Pernyataan 3. $L(2{,}5) = 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}5) < 0$, jadi rugi → **Salah**.

Jawaban: Benar, Benar, Salah.

No. 9 Kunci: B, D, E

Konsep: model eksponen berkurang dengan faktor tetap $0{,}9$; pertidaksamaan eksponen diselesaikan dengan logaritma, dan arah tanda dibalik bila membagi dengan bilangan negatif.

Analisis tiap pilihan:
• A ✗ — yang tetap adalah **perbandingannya** (90% dari sisa), sehingga pengurangannya makin kecil: 10, lalu 9, lalu 8,1, dan seterusnya.
• B ✓ — $100 \cdot 0{,}81 = 81$.
• C ✗ — $100 \cdot 0{,}9^{10} \approx 34{,}9\%$; model eksponen tidak pernah 0.
• D ✓ — $0{,}9^n < 0{,}5 \Leftrightarrow n \log 0{,}9 < \log 0{,}5$; karena $\log 0{,}9 < 0$, arah tanda berbalik saat membagi.
• E ✓ — $0{,}9^6 \approx 0{,}531$ dan $0{,}9^7 \approx 0{,}478$.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 10 Kunci: 1B 2S 3B

Konsep: $y = \log_a x$ berarti $a^y = x$. Untuk $x > 1$, makin besar basisnya, makin kecil nilai logaritmanya.

Pernyataan 1. $\log_a 1 = 0$ untuk setiap basis a → **Benar**.
Pernyataan 2. misalnya di $x = 16$: $\log_4 16 = 2 < 4 = \log_2 16$. Basis lebih besar membuat grafik lebih landai → **Salah**.
Pernyataan 3. $2^4 = 16$ → **Benar**.

Jawaban: Benar, Salah, Benar.

No. 11 Kunci: C

Konsep: $h > 1{,}75 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) > \frac{1}{2}$, yaitu sudutnya di antara $\frac{\pi}{6}$ dan $\frac{5\pi}{6}$ dalam satu putaran.

Langkah 1. $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi t}{2} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} < t < \frac{5}{3}$.
Langkah 2. Lamanya $\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ detik.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
• A: menganggapnya seperempat periode tanpa menghitung.
• B: itu lamanya tinggi air di atas garis tengah 1,5 m.
• D: hanya menghitung dari $\frac{\pi}{6}$ sampai puncak $\frac{\pi}{2}$; bagian saat air turun terlupa.
• E: itu lamanya tinggi air **di bawah** 1,75 m.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

No. 12 **Kunci: A**

Konsep: $\vec{DC} = C - D$, jadi $C = D + \vec{DC}$.

Langkah 1. $\vec{AB} = (4, 2, 2)$, sehingga $\vec{DC} = (2, 1, 1)$.
Langkah 2. $C = (0 + 2,\ 1 + 1,\ 3 + 1) = (2, 2, 4)$.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- B: memakai $\vec{DC} = \vec{AB}$, sehingga $ABCD$ menjadi jajargenjang.
- C: arah $\vec{DC}$ dibalik.
- D: itu titik tengah AB.
- E: itu vektor $\frac{1}{2}\vec{AB}$, belum ditambahkan ke posisi D.

No. 13 **Kunci: A, B, D**

Konsep: $\vec{P}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v}$: $\vec{P}_0$ posisi awal, $\vec{v}$ kecepatan; laju $|\vec{v}|$, jarak dari posisi awal $t|\vec{v}|$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $\left|\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right| = 5$.
- B ✓ — $3 + 4t = 11$ memberi $t = 2$, dan $-2 + 3 \cdot 2 = 4$ ✓.
- C ✗ — $\vec{P}(1) = (7, 1)$, jaraknya ke O $\sqrt{50} \approx 7{,}07$ km; 5 km adalah jarak dari posisi awal.
- D ✓ — $3 \cdot 5 = 15$.
- E ✗ — arahnya $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$; komponen tertukar memberi arah lain.

Jawaban: A, B, dan D.

No. 14 **Kunci: D**

Konsep: titik tengah: $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q})$; panjang $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Langkah 1. $\vec{m} = \frac{1}{2}(6, 2, 2) = (3, 1, 1)$.

Langkah 2. $|\vec{OM}| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: $\vec{p} + \vec{q} = (6, 2, 2)$ tidak dibagi 2.
- B: itu setengah panjang PQ, bukan panjang $\vec{OM}$.
- C: itu panjang $\vec{OP}$.
- E: menjumlahkan komponen $3 + 1 + 1$.

No. 15 **Kunci: E**

Konsep: lingkaran berpusat (p, q) yang menyinggung sumbu Y berjari-jari $|p|$. Bentuk umum: $a = -2p, b = -2q, c = p^2 + q^2 - r^2$.

Langkah 1. $r = 3$; $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$.
Langkah 2. $a + b + c = -6 + 4 + 4 = 2$.

Jawaban: E.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: tanda koordinat pusat terbalik ($a = 6, b = -4$).
- B: memakai $r = 2$ (menyinggung sumbu X), padahal yang disinggung sumbu Y, jadi $r = |3|$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- C: menulis $c = -r^2$; seharusnya $c = a'^2 + b'^2 - r^2$ dengan pusat (a', b').
- D: lupa mengurangkan r^2: $c = 9 + 4$.

No. 16 Kunci: A, C, D

Konsep: garis $y = mx + n$ menyinggung $x^2 + y^2 = r^2$ bila jaraknya ke O sama dengan r: $\frac{|n|}{\sqrt{1+m^2}} = r$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — garis singgung bergradien m pada $x^2 + y^2 = r^2$: $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} = 3x \pm \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$.
- B ✗ — faktor $\sqrt{1+m^2}$ terlupa; jarak O ke garis ini hanya $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1 < \sqrt{10}$.
- C ✓ — $9 + 1 = 10$ ✓ dan $3(-3) + 10 = 1$ ✓; jari-jari ke titik itu bergradien $-\frac{1}{3}$, tegak lurus garis.
- D ✓ — jarak dua garis sejajar $= \frac{|10-(-10)|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$, sama dengan diameter.
- E ✗ — garis ini melalui pusat O, jadi memotong lingkaran di dua titik.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 17 Kunci: B, C, E

Konsep: tembereng = juring dikurangi segitiga di dalamnya; kelilingnya = busur + tali busur.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — 6π adalah luas juring; tembereng = juring − segitiga. *Jebakan:* lupa mengurangkan segitiga.
- B ✓ — segitiga OAB sama kaki bersudut puncak 60°, jadi sama sisi: tali busur = jari-jari.
- C ✓ — juring $\frac{60}{360} \cdot 36\pi = 6\pi$; segitiga sama sisi $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}$.
- D ✗ — 2π hanya panjang busurnya; tali busur 6 cm terlupa.
- E ✓ — busur $\frac{60}{360} \cdot 12\pi = 2\pi$ + tali busur 6.

Jawaban: B, C, dan E.

No. 18 Kunci: 1B 2B 3S

Konsep: lingkaran berjari-jari r: keliling $2\pi r$, luas πr^2; bagian keliling sebanding dengan bagian putaran.

Pernyataan 1. $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 14 = 88$ → **Benar**.

Pernyataan 2. $\frac{3}{4} \cdot 88 = 66$ → **Benar**.

Pernyataan 3. $\frac{22}{7} \cdot 14^2 = 616$ m²; 308 m² adalah setengahnya → **Salah**.

Jawaban: Benar, Benar, Salah.

No. 19 Kunci: B, D, E

Konsep: rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat (a, b): $(x, y) \to (a - (y - b),\ b + (x - a))$. Rotasi 90° membuat garis tegak lurus semula.

Analisis tiap pilihan:

- A ✗ — itu hasil rotasi terhadap O; pusat P menggeser bayangan.
- B ✓ — $(x, y) \to (1 - y,\ x - 1)$, jadi $y = 1 - x'$ dan $x = y' + 1$; substitusi: $1 - x' = 2y' + 2$.
- C ✗ — $0 + 0 + 1 \neq 0$. Titik O sendiri berpindah karena bukan pusat rotasi.
- D ✓ — gradien 2 dan $-\frac{1}{2}$, hasil kalinya -1.
- E ✓ — $O - P = (-1, 0) \to (0, -1)$, lalu $P + (0, -1) = (1, -1)$; dan $1 - 2 + 1 = 0$ ✓.

Jawaban: B, D, dan E.

No. 20 Kunci: C

Konsep: dilatasi pusat P faktor k: $\vec{PA'} = k\,\vec{PA}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Langkah 1. $\vec{PA} = (3, -3)$ dan $\vec{PA'} = (-6, 6)$.
Langkah 2. $(-6, 6) = k(3, -3)$, jadi $k = -2$.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: tanda salah; A' berada di pihak yang berlawanan dengan A terhadap P.
- B: perbandingan dibalik ($\vec{PA}$ dibagi $\vec{PA'}$).
- D: memakai pusat O dan hanya membandingkan absis $-5 : 4$.
- E: membagi $\vec{AA'}$ dengan $\vec{PA}$.

No. 21 Kunci: D

Konsep: "T dilanjutkan pencerminan $y = x$" bermatriks $M = M_{y=x}T$. Titik asal diperoleh dari $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Langkah 1. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Langkah 2. $x + y = 5$ dan $2x - y = 1$: dijumlahkan $3x = 6, x = 2, y = 3$.

Cek ulang: $T(2, 3) = (1, 5)$, dicerminkan terhadap $y = x$ menjadi $(5, 1)$ ✓.

Jawaban: D.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: koordinat x dan y tertukar pada jawaban akhir.
- B: urutan transformasi dibalik (matriks $TM_{y=x}$).
- C: mengalikan matriks komposisi dengan $(5, 1)$, padahal yang diperlukan inversnya.
- E: tanda komponen kedua salah.

No. 22 Kunci: B

Konsep: substitusi memberi $\frac{0}{0}$; faktorkan pembilang dan penyebut, lalu coret faktor $(x + 2)$.

Langkah 1. $\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x-3}$ untuk $x \neq -2$.

Langkah 2. Limitnya $\dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$.

Jawaban: B.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- A: tanda penyebut $x - 3$ di $x = -2$ salah.
- C: mencoret x^2 lalu mensubstitusi; yang boleh dicoret hanya **faktor** yang sama.
- D: menganggap $\frac{0}{0} = 0$.
- E: bentuk $\frac{0}{0}$ belum berarti limit tidak ada.

No. 23 Kunci: A

Konsep: limit di tak hingga fungsi rasional berderajat sama = perbandingan koefisien utama.

Langkah 1. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{20t + 5}{t + 4} = \dfrac{20}{1} = 20$ m.

Jawaban: A.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):
- B: memakai konstanta pembilang.
- C: itu tinggi saat ditanam, $H(0) = \frac{5}{4}$.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

- D: menjumlahkan $20 + 4$.
- E: model ini mendatar; derajat pembilang dan penyebut sama.

No. 24 Kunci: A, C, D

Konsep: tinggi segitiga $\tan x$ (alas setengahnya 1), kaki $\frac{1}{\cos x}$. Untuk bentuk $\frac{0}{0}$ pakai $\frac{\tan x}{x} \to 1$ dan $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

Analisis tiap pilihan:

- A ✓ — $\dfrac{\tan x}{x} \to 1$.
- B ✗ — $\tan x$ membesar tanpa batas: puncak segitiga makin tinggi.
- C ✓ — $2 + \frac{2}{1} = 4$: segitiga menjadi pipih, kedua kaki mendekati 1.
- D ✓ — $K - 4 = \dfrac{2(1-\cos x)}{\cos x} = \dfrac{4\sin^2(x/2)}{\cos x}$, dan $\dfrac{4\sin^2(x/2)}{x^2} \to 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.
- E ✗ — $\dfrac{4\sin^2(x/2)}{x\cos x} \to 0$; bentuk $1 - \cos x$ setara dua faktor x.

Jawaban: A, C, dan D.

No. 25 Kunci: C

Konsep: misalkan $u = x - 1 \to 0$: $x^2 - 1 = u(u+2)$, $2x - 2 = 2u$, dan $1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$.

Langkah 1. $\dfrac{u(u+2)\tan 2u}{2\sin^2(u/2)} = (u+2) \cdot \dfrac{\tan 2u}{u} \cdot \dfrac{u^2}{2\sin^2(u/2)}$.

Langkah 2. Limitnya $2 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Cek ulang: di $x = 1{,}001$ nilainya $\approx 8{,}00$ ✓.

Jawaban: C.

Mengapa pilihan lain salah (Jebakan):

- A: faktor $(x+1) \to 2$ dari $x^2 - 1$ terlupa.
- B: memakai $1 - \cos u = 2\sin^2 u$ (sudut tidak dibagi dua).
- D: memakai $1 - \cos u \approx \frac{u^2}{4}$.
- E: menganggap pembilang "lebih kecil" sehingga limitnya 0; padahal pembilang dan penyebut sama-sama setara u^2.

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Penutup

Kamu sudah sampai di halaman terakhir. Itu bukan hal kecil. Sebelum menutup buku ini, simpan lima strategi yang paling sering menentukan benar atau salahnya jawaban di TKA Matematika Tingkat Lanjut.

1. **Beri label sebelum menghitung.** Matriks pesanan, bahan, dan harga baru bermakna bila baris dan kolomnya berlabel. Label juga menentukan urutan perkalian, termasuk urutan komposisi transformasi.
2. **Substitusi dulu.** Pada limit, polinomial, dan persamaan lingkaran, mengganti nilai ke dalam rumus sering langsung memberi jawaban atau menunjukkan bentuk apa yang sedang kamu hadapi.
3. **Buat sketsa.** Lingkaran dengan garis singgungnya, bayangan hasil rotasi, dan daerah penyelesaian program linear jauh lebih mudah diperiksa di atas gambar kasar daripada di kepala.
4. **Periksa syarat dari konteks.** Banyak barang harus bilangan bulat tidak negatif. Waktu dimulai dari nol. Pernyataan "pas" atau "mungkin" punya arti yang ditetapkan soal.
5. **Nilai setiap pernyataan secara terpisah.** Pada soal "jawaban benar lebih dari satu" dan Benar/Salah, setiap pernyataan adalah soal kecil yang berdiri sendiri. Tuliskan alasan singkat untuk masing-masing.

Sepekan sebelum ujian. Jangan memulai materi baru. Kerjakan ulang soal yang pernah kamu salah, terutama yang tercatat di tabel skormu. Kerjakan satu simulasi TKA dengan waktu penuh untuk membiasakan irama 60 menit. Pada hari-hari terakhir, kurangi jam belajar dan cukupkan tidur. Pikiran yang segar lebih teliti daripada pikiran yang lelah. Siapkan perlengkapan ujian sehari sebelumnya.

Teruslah berlatih. Kuis setiap bab dan latihan di buku ini juga tersedia di LMS Next Level Study melalui kode QR di setiap bab. Di sana kamu dapat mengerjakannya ulang dan melihat perkembanganmu.

Matematika mengajarkan satu hal yang berguna jauh setelah ujian selesai: masalah yang rumit dapat diurai menjadi langkah-langkah kecil yang bisa dikerjakan. Kamu sudah membuktikannya di setiap halaman buku ini. Pegang janjimu untuk terus belajar, persembahkan usahamu bagi orang-orang yang kamu sayangi, dan suatu hari abdikan ilmumu untuk negeri ini.

Terima kasih telah belajar bersama buku ini. Selamat berjuang.

Handaka Lumu

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Lampiran

Lampiran 1. Rumus ringkas

Rumus di bawah ini **bukan untuk dihafal tanpa makna**. Setiap baris menunjuk sub bab tempat rumus itu dijelaskan, diturunkan, dan dipakai dalam contoh. Bila lupa cara memakainya, kembalilah ke sub bab tersebut.

Aljabar

Rumus	Kegunaan	Sub bab
$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$, c_{ij} = baris i × kolom j	perkalian matriks; label kolom A = label baris B	1.1
$\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc$	determinan 2×2; $\det=0$ berarti tidak punya invers	1.2
$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$	invers 2×2: tukar, ubah tanda, bagi	1.2
$\det(AB)=\det A\cdot\det B$, $\det(kA)=k^n\det A$, $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$	sifat determinan (n = ordo)	1.2
$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$; $XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}$	menyelesaikan SPL bentuk matriks	1.3
$x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D}$	aturan Cramer	1.3
$Z=ax+by$ optimum di titik pojok; garis selidik $ax+by=k$	program linear	1.4
$f(x)=P(x)H(x)+S(x)$, derajat S < derajat P	pembagian polinomial	1.5
sisa pembagian oleh $(x-a)$ adalah $f(a)$	teorema sisa	1.5
$(x-a)$ faktor $f(x)\Leftrightarrow f(a)=0$	teorema faktor	1.6
ax^3+bx^2+cx+d: $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$	rumus Vieta (lihat tabel lengkap di 1.6)	1.6
penyebut ≠ 0, bilangan di bawah akar ≥ 0	syarat domain	1.7
$P(t)=P_0\cdot a^{t/k}$	model pertumbuhan/peluruhan: tiap k satuan waktu dikali a	1.8
${}^a\log b=c\iff a^c=b$	logaritma sebagai kebalikan eksponen	1.8
$y=a\sin(bx+c)+d$: amplitudo $\lvert a\rvert$, periode $\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$, sumbu tengah $y=d$	fungsi trigonometri	1.9
$\lvert x\rvert\le k\iff -k\le x\le k$	pertidaksamaan nilai mutlak	1.9

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Geometri dan Pengukuran

Rumus	Kegunaan	Sub bab
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	vektor dari dua titik dan panjangnya	2.1
$\vec{p} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$	titik P membagi AB dengan perbandingan $m : n$ (dalam)	2.1
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$	hasil kali skalar dan sudut	2.2
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	lingkaran berpusat (a, b)	2.3
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$: pusat $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$, $r^2 = \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$	bentuk umum lingkaran	2.3
jarak pusat ke garis $= \frac{\lvert ap+bq+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	kedudukan garis terhadap lingkaran	2.3
$(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2$	garis singgung di titik (x_1, y_1) pada lingkaran	2.4
$y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$	garis singgung bergradien m	2.4
busur $= \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi r$, juring $= \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot \pi r^2$	bagian lingkaran	2.5
tembereng = juring − segitiga	luas tembereng	2.5
rotasi 90° berlawanan arah jarum jam terhadap O: $(x, y) \to (-y, x)$	rotasi (tabel lengkap di 2.6)	2.6
dilatasi $[P, k]$: $\overrightarrow{PA'} = k\,\overrightarrow{PA}$	dilatasi terhadap pusat P	2.6
komposisi "T_1 lalu T_2" bermatriks M_2M_1	urutan perkalian kanan ke kiri	2.7
luas bayangan $= \lvert\det M\rvert \times$ luas asal	luas setelah transformasi matriks	2.7

Kalkulus: limit

Rumus	Kegunaan	Sub bab
substitusi dulu; bentuk $\frac{0}{0}$ → faktorkan atau kali sekawan	limit aljabar di suatu titik	3.1
$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n+\dots}{bx^m+\dots}$: 0 bila $n<m$, $\frac{a}{b}$ bila $n=m$, tak hingga bila $n>m$	limit fungsi rasional di tak hingga	3.2
$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+px+q}\right) = \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$	selisih akar di tak hingga	3.2
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$	limit trigonometri dasar	3.3
$1-\cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$	mengubah bentuk $1-\cos$	3.3
untuk $x\to a \neq 0$: misalkan $u = x-a$	membawa limit ke bentuk menuju 0	3.3

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Lampiran 2. Glosarium

Istilah	Arti dalam buku ini
Asimtot	garis yang didekati grafik fungsi tetapi tidak harus pernah dicapai
Bentuk tak tentu	bentuk seperti $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ yang nilainya belum dapat ditentukan tanpa menyederhanakan fungsi
Daerah asal (domain)	semua nilai x yang boleh dimasukkan ke fungsi
Daerah hasil (range)	semua nilai fungsi yang benar-benar dihasilkan
Daerah penyelesaian	himpunan titik yang memenuhi semua kendala program linear
Determinan	bilangan dari matriks persegi yang menentukan ada tidaknya invers
Dilatasi	transformasi yang memperbesar atau memperkecil bangun terhadap satu pusat
Fungsi objektif	fungsi yang dimaksimumkan atau diminimumkan pada program linear
Garis selidik	garis $ax + by = k$ yang digeser untuk menemukan nilai optimum
Garis singgung	garis yang menyentuh lingkaran tepat di satu titik
Hasil kali skalar	hasil perkalian dua vektor yang berupa bilangan, $\vec{a} \cdot \vec{b}$
Invers matriks	matriks A^{-1} dengan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Juring	daerah lingkaran yang dibatasi dua jari-jari dan satu busur
Kendala	batasan dalam bentuk pertidaksamaan linear
Komposisi transformasi	dua transformasi atau lebih yang dilakukan berurutan
Matriks identitas	matriks persegi dengan 1 pada diagonal utama dan 0 di tempat lain
Ordo	ukuran matriks: banyak baris × banyak kolom
Pengecoh	pilihan jawaban yang salah tetapi dirancang tampak masuk akal
Polinomial (suku banyak)	bentuk $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$; di TKA berderajat paling tinggi 4
Refleksi	pencerminan terhadap garis atau titik
Rotasi	perputaran terhadap satu titik pusat sebesar sudut tertentu
Sekawan	bentuk akar lawan tanda, misalnya $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ untuk $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, dipakai untuk merasionalkan
Sisa pembagian	bagian $S(x)$ pada $f(x) = P(x)H(x) + S(x)$
SPL	sistem persamaan linear
Tembereng	daerah antara busur dan tali busur
Titik pojok	titik sudut daerah penyelesaian, perpotongan dua garis batas
Translasi	pergeseran setiap titik sejauh dan searah yang sama

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Vektor posisi	vektor dari titik asal O ke suatu titik
Vektor satuan	vektor yang panjangnya 1

Lampiran 3. Sumber data nyata di soal

Soal asli TKA 2025 Matematika Tingkat Lanjut tidak memakai data statistik. Karena itu, kuis akhir bab, latihan sub bab, dan Simulasi 2–4 di buku ini juga tidak memakainya: profil soalnya disusun mengikuti soal asli. Semua cerita, tokoh, harga, dan angka pada soal-soal itu disusun untuk latihan dan tidak dimaksudkan sebagai data nyata. Rumus sains yang muncul di beberapa soal, yaitu taraf intensitas bunyi $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ dan $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, adalah rumus baku dan selalu dituliskan lengkap di soalnya.

Lampiran 4. Catatan edisi

- **Edisi 1 (2026/2027), gratis untuk pelajar Indonesia.** Buku ini dibagikan gratis sebagai dedikasi Next Level Study Indonesia untuk bangsa: boleh diperbanyak dan dibagikan untuk belajar, tetapi tidak untuk diperjualbelikan. Soal asli TKA 2025 dimuat apa adanya dengan keterangan sumber. Pembahasan beberapa soal di Bank Soal diperbaiki sebelum buku ini disusun: rumus yang rusak pada pembahasan SA-13 dan analisis pilihan pada pembahasan SA-7.
- **Revisi 16 Oktober 2026.** Materi setiap sub bab diperluas dan diberi gambar. Kuis akhir bab, soal latihan sub bab, dan Simulasi 2–4 diganti paket baru (Kuis Akhir Bab 1–3, Prediksi 07–12) yang mengikuti profil soal asli TKA 2025: bentuk soal, tingkat kesulitan, jenis stimulus, dan sebaran topiknya. Soal yang sama dipakai di Bank Soal dan LMS NLS.
- Untuk soal SA-24, petunjuk di lembar asli menyebut "jawaban benar lebih dari satu", sedangkan hasil perhitungan hanya membenarkan satu pernyataan. Buku ini mengikuti hasil perhitungan dan menjelaskannya di sub bab 3.3.
- Lembar jawaban tersedia di setiap Simulasi TKA dan boleh difotokopi untuk latihan ulang.
- Bila kamu menemukan kesalahan, laporkan kepada pengajar NLS agar diperbaiki pada edisi berikutnya.

Daftar sumber gambar

Gambar materi yang diambil dari sumber berlisensi terbuka dipakai sesuai lisensinya dengan menyebut pembuatnya; gambar lain digambar oleh tim Next Level Study Indonesia.

Gambar	Judul	Pembuat	Lisensi	Sumber
Gambar 1.1	Ordo dan letak unsur matriks	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.2	Dari tabel ke matriks	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.3	Baris kali kolom	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.4	Label dan satuan dalam perkalian matriks	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Gambar	Judul	Pembuat	Lisensi	Sumber
Gambar 1.5	Determinan matriks 2×2	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.6	Determinan sebagai luas jajargenjang	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.7	Aturan Sarrus	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.8	Minor dan kofaktor	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.9	Alur menyelesaikan SPL berkonteks dengan matriks	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.10	Penyelesaian SPL sebagai titik potong dua garis	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.11	Aturan Cramer	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.12	Tiga kemungkinan penyelesaian SPL dua variabel	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.13	Garis batas dan uji titik	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.14	Daerah penyelesaian Contoh 2	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.15	Daerah arsiran Contoh 3	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.16	Garis selidik	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.17	Daerah tak terbatas	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.18	Titik pojok pecahan dan titik bulat di sekitarnya	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.19	Pembagian bilangan dan pembagian polinomial	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.20	Skema Horner	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.21	Skema Horner–Kino	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.22	Teorema sisa dibaca pada grafik	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.23	Tiga akar polinomial berderajat 3	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.24	Polinomial berderajat 4 dengan empat akar	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.25	Akar kembar menyinggung sumbu X	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.26	Dua kotak bervolume sama	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.27	Grafik volume dan domain konteks	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Gambar	Judul	Pembuat	Lisensi	Sumber
Gambar 1.28	Domain, kodomain, dan range	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.29	Syarat akar dari bentuk kuadrat	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.30	Asimtot datar boleh dipotong	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.31	Grafik fungsi rasional dan asimtotnya	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.32	Grafik polinom yang menyinggung sumbu X	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.33	Grafik fungsi akar	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.34	Biaya per siswa	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.35	Model pertumbuhan bakteri	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.36	Model linear dan model eksponen	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.37	Grafik eksponen tumbuh dan luruh	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.38	Grafik eksponen dan logaritma saling bercermin	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.39	Kurva peluruhan	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.40	Nilai mutlak sebagai jarak	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.41	Grafik V	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.42	Dua bentuk nilai mutlak	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.43	Lingkaran satuan	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.44	Model kedalaman air dermaga	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 1.45	Grafik sinus dari dua titik	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.1	Vektor posisi dan vektor antara dua titik	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.2	Panjang vektor di ruang	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.3	Jajargenjang dalam bahasa vektor	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.4	Trapesium sama kaki dan jebakan jajargenjang	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.5	Titik pembagi di dalam dan di luar	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Gambar	Judul	Pembuat	Lisensi	Sumber
Gambar 2.6	Lintasan kereta gantung	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.7	Penurunan rumus hasil kali skalar	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.8	Tanda hasil kali skalar dan jenis sudut	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.9	Proyeksi skalar dan proyeksi vektor	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.10	Balok berkoordinat	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.11	Persamaan lingkaran dari rumus jarak	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.12	Lingkaran melalui tiga titik	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.13	Kedudukan titik terhadap lingkaran	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.14	Kedudukan garis terhadap lingkaran	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.15	Jari-jari tegak lurus garis singgung	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.16	Dua garis singgung bergradien sama	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.17	Titik singgung dari pusat dan vektor satuan	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.18	Dua garis singgung dari titik di luar lingkaran	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.19	Ruas singgung persekutuan luar	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.20	Bagian-bagian lingkaran	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.21	Kipas lipat sebagai juring cincin	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.22	Tembereng sebagai juring dikurangi segitiga	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.23	Stiker persegi bermotif lingkaran	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.24	Kerangka teralis jendela	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.25	Translasi segitiga	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.26	Dilatasi dengan faktor positif dan negatif	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.27	Refleksi terhadap sumbu X, sumbu Y, dan garis y = x	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.28	Rotasi 90° terhadap titik asal	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Gambar	Judul	Pembuat	Lisensi	Sumber
Gambar 2.29	Parabola ditranslasi dan jebakan substitusi maju	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.30	Rotasi garis dengan pusat bukan O	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.31	Kolom matriks sebagai bayangan vektor satuan	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.32	Bagan komposisi transformasi	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.33	Urutan komposisi mengubah hasil	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.34	Determinan sebagai faktor luas	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 2.35	Segitiga taman dan bayangannya	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.1	Limit pada grafik berlubang	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.2	Limit kiri dan limit kanan berbeda	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.3	Limit tak hingga di dekat asimtot tegak	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.4	Bagan langkah menghitung limit aljabar	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.5	Biaya rata-rata mendekati asimtot datar	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.6	Tiga kasus limit fungsi rasional di tak hingga	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.7	Model banyak ikan nila	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.8	Selisih dua akar mendekati bilangan tetap	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.9	Dua menara pemancar dan sebuah mobil di jalan	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.10	Arti satu radian	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.11	Bukti limit dasar dengan luas	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.12	Grafik sin x per x	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.13	Logo berbentuk rumah	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—
Gambar 3.14	Kaki jangka dengan sudut kecil	Tim Next Level Study Indonesia	digambar sendiri	—

Tabel silang sub bab dan soal

Sub bab	Soal

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab	Soal
1.1 · Matriks: operasi dan maknanya dalam konteks	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 4; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 6; Bedah Prediksi 07 no. 2; Latihan 1.1 no. 1; Latihan 1.1 no. 2; Latihan 1.1 no. 3; Latihan 1.1 no. 4; Latihan 1.1 no. 5; Kuis Bab 1 no. 1; Kuis Bab 1 no. 2; Kuis Bab 1 no. 3; Simulasi 1 no. 4; Simulasi 1 no. 6; Simulasi 2 no. 1; Simulasi 2 no. 2; Simulasi 3 no. 1; Simulasi 3 no. 2; Simulasi 4 no. 1; Simulasi 4 no. 2
1.2 · Determinan dan invers matriks 2×2 dan 3×3	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 1; Bedah Prediksi 07 no. 3; Latihan 1.2 no. 1; Latihan 1.2 no. 2; Kuis Bab 1 no. 4; Kuis Bab 1 no. 5; Kuis Bab 1 no. 6; Simulasi 1 no. 1; Simulasi 2 no. 3; Simulasi 3 no. 3; Simulasi 4 no. 3
1.3 · Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan matriks	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 5; Bedah Prediksi 07 no. 4; Latihan 1.3 no. 1; Latihan 1.3 no. 2; Kuis Bab 1 no. 7; Kuis Bab 1 no. 8; Kuis Bab 1 no. 9; Simulasi 1 no. 5; Simulasi 2 no. 4; Simulasi 3 no. 4; Simulasi 4 no. 4
1.4 · Program linear	Bedah Prediksi 08 no. 5; Latihan 1.4 no. 1; Latihan 1.4 no. 2; Kuis Bab 1 no. 10; Kuis Bab 1 no. 11
1.5 · Pembagian polinomial dan teorema sisa	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 2; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 8; Bedah Prediksi 07 no. 6; Latihan 1.5 no. 1; Latihan 1.5 no. 2; Latihan 1.5 no. 3; Latihan 1.5 no. 4; Latihan 1.5 no. 5; Kuis Bab 1 no. 12; Kuis Bab 1 no. 13; Kuis Bab 1 no. 14; Simulasi 1 no. 2; Simulasi 1 no. 8; Simulasi 2 no. 5; Simulasi 2 no. 6; Simulasi 3 no. 5; Simulasi 3 no. 6; Simulasi 4 no. 5; Simulasi 4 no. 6
1.6 · Faktor, akar, dan titik potong polinomial	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 3; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 9; Bedah Prediksi 08 no. 8; Latihan 1.6 no. 1; Latihan 1.6 no. 2; Kuis Bab 1 no. 15; Kuis Bab 1 no. 16; Kuis Bab 1 no. 17; Simulasi 1 no. 3; Simulasi 1 no. 9; Simulasi 2 no. 7; Simulasi 2 no. 8; Simulasi 3 no. 7; Simulasi 3 no. 8; Simulasi 4 no. 7; Simulasi 4 no. 8
1.7 · Domain, range, dan grafik fungsi polinom, rasional, dan akar	Bedah Prediksi 09 no. 9; Latihan 1.7 no. 1; Latihan 1.7 no. 2; Kuis Bab 1 no. 18; Kuis Bab 1 no. 19
1.8 · Fungsi eksponen dan logaritma dalam konteks	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 10; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 7; Bedah Prediksi 07 no. 10; Latihan 1.8 no. 1; Latihan 1.8 no. 2; Latihan 1.8 no. 3; Latihan 1.8 no. 4; Latihan 1.8 no. 5; Kuis Bab 1 no. 20; Kuis Bab 1 no. 21; Kuis Bab 1 no. 22; Simulasi 1 no. 7; Simulasi 1 no. 10; Simulasi 2 no. 9; Simulasi 2 no. 10; Simulasi 3 no. 9; Simulasi 3 no. 10; Simulasi 4 no. 9; Simulasi 4 no. 10
1.9 · Fungsi nilai mutlak dan fungsi trigonometri	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 13; Bedah Prediksi 09 no. 12; Latihan 1.9 no. 1; Latihan 1.9 no. 2; Kuis Bab 1 no. 23; Kuis Bab 1 no. 24; Kuis Bab 1 no. 25; Simulasi 1 no. 13; Simulasi 2 no. 11; Simulasi 3 no. 11; Simulasi 4 no. 11

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab	Soal
2.1 · Vektor di bidang dan ruang: panjang, operasi, perbandingan	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 14; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 11; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 12; Bedah Prediksi 09 no. 14; Latihan 2.1 no. 1; Latihan 2.1 no. 2; Latihan 2.1 no. 3; Latihan 2.1 no. 4; Latihan 2.1 no. 5; Kuis Bab 2 no. 1; Kuis Bab 2 no. 2; Kuis Bab 2 no. 3; Kuis Bab 2 no. 4; Kuis Bab 2 no. 5; Simulasi 1 no. 11; Simulasi 1 no. 12; Simulasi 1 no. 14; Simulasi 2 no. 12; Simulasi 2 no. 13; Simulasi 2 no. 14; Simulasi 3 no. 12; Simulasi 3 no. 13; Simulasi 3 no. 14; Simulasi 4 no. 12; Simulasi 4 no. 13; Simulasi 4 no. 14
2.2 · Hasil kali skalar dan sudut dua vektor	Bedah Prediksi 07 no. 15; Latihan 2.2 no. 1; Latihan 2.2 no. 2; Kuis Bab 2 no. 6; Kuis Bab 2 no. 7; Kuis Bab 2 no. 8
2.3 · Persamaan lingkaran dan kedudukan titik/garis	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 15; Bedah Prediksi 08 no. 16; Latihan 2.3 no. 1; Latihan 2.3 no. 2; Kuis Bab 2 no. 9; Kuis Bab 2 no. 10; Kuis Bab 2 no. 11; Simulasi 1 no. 15; Simulasi 2 no. 15; Simulasi 3 no. 15; Simulasi 4 no. 15
2.4 · Garis singgung lingkaran	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 16; Bedah Prediksi 09 no. 17; Latihan 2.4 no. 1; Latihan 2.4 no. 2; Kuis Bab 2 no. 12; Kuis Bab 2 no. 13; Kuis Bab 2 no. 14; Simulasi 1 no. 16; Simulasi 2 no. 16; Simulasi 3 no. 16; Simulasi 4 no. 16
2.5 · Luas dan keliling bagian lingkaran	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 21; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 23; Bedah Prediksi 08 no. 18; Latihan 2.5 no. 1; Latihan 2.5 no. 2; Kuis Bab 2 no. 15; Kuis Bab 2 no. 16; Kuis Bab 2 no. 17; Kuis Bab 2 no. 18; Simulasi 1 no. 21; Simulasi 1 no. 23; Simulasi 2 no. 17; Simulasi 2 no. 18; Simulasi 3 no. 17; Simulasi 3 no. 18; Simulasi 4 no. 17; Simulasi 4 no. 18
2.6 · Translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 22; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 20; Bedah Prediksi 07 no. 19; Latihan 2.6 no. 1; Latihan 2.6 no. 2; Latihan 2.6 no. 3; Latihan 2.6 no. 4; Latihan 2.6 no. 5; Kuis Bab 2 no. 19; Kuis Bab 2 no. 20; Kuis Bab 2 no. 21; Kuis Bab 2 no. 22; Simulasi 1 no. 20; Simulasi 1 no. 22; Simulasi 2 no. 19; Simulasi 2 no. 20; Simulasi 3 no. 19; Simulasi 3 no. 20; Simulasi 4 no. 19; Simulasi 4 no. 20
2.7 · Matriks transformasi dan komposisi	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 17; Bedah Prediksi 07 no. 21; Latihan 2.7 no. 1; Latihan 2.7 no. 2; Kuis Bab 2 no. 23; Kuis Bab 2 no. 24; Kuis Bab 2 no. 25; Simulasi 1 no. 17; Simulasi 2 no. 21; Simulasi 3 no. 21; Simulasi 4 no. 21
3.1 · Limit fungsi aljabar di suatu titik	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 18; Bedah Prediksi 09 no. 22; Latihan 3.1 no. 1; Latihan 3.1 no. 2; Kuis Bab 3 no. 1; Kuis Bab 3 no. 2; Kuis Bab 3 no. 3; Kuis Bab 3 no. 4; Kuis Bab 3 no. 5; Kuis Bab 3 no. 6; Kuis Bab 3 no. 7; Kuis Bab 3 no. 8; Simulasi 1 no. 18; Simulasi 2 no. 22; Simulasi 3 no. 22; Simulasi 4 no. 22
3.2 · Limit di tak hingga dalam konteks	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 19; Bedah Prediksi 07 no. 23; Latihan 3.2 no. 1; Latihan 3.2 no. 2; Kuis Bab 3 no. 9; Kuis Bab 3 no. 10; Kuis Bab 3 no. 11; Kuis Bab 3 no. 12; Kuis Bab 3 no. 13; Kuis Bab 3 no. 14; Kuis Bab 3 no. 15; Simulasi 1 no. 19; Simulasi 2 no. 23; Simulasi 3 no. 23; Simulasi 4 no. 23

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

Sub bab	Soal
3.3 · Limit fungsi trigonometri	Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 24; Bedah Soal Asli TKA 2025 no. 25; Bedah Prediksi 08 no. 24; Latihan 3.3 no. 1; Latihan 3.3 no. 2; Latihan 3.3 no. 3; Latihan 3.3 no. 4; Latihan 3.3 no. 5; Kuis Bab 3 no. 16; Kuis Bab 3 no. 17; Kuis Bab 3 no. 18; Kuis Bab 3 no. 19; Kuis Bab 3 no. 20; Kuis Bab 3 no. 21; Kuis Bab 3 no. 22; Kuis Bab 3 no. 23; Kuis Bab 3 no. 24; Kuis Bab 3 no. 25; Simulasi 1 no. 24; Simulasi 1 no. 25; Simulasi 2 no. 24; Simulasi 2 no. 25; Simulasi 3 no. 24; Simulasi 3 no. 25; Simulasi 4 no. 24; Simulasi 4 no. 25

Gratis dari Next Level Study Indonesia · next-level-study.com/library · tidak untuk diperjualbelikan

NEXT LEVEL STUDY INDONESIA

Era Baru Pendidikan

TKA Matematika Tingkat Lanjut

Tetaplah menari, sekalipun lagu pengiringmu telah hilang. Sebab di luar sana, selalu ada seseorang yang menemukan bahagianya karena kamu tidak berhenti melangkah.

— HANDAKA LUMU

Buku ini menjelaskan secara rinci apa saja yang perlu kamu persiapkan untuk TKA Matematika Tingkat Lanjut: materi yang diuji, strategi menjawab, dan latihan yang terarah.

Belajar lebih jauh di LMS NLS

next-level-study.com/belajar/lms-player.html?course=buku-mattl

GRATIS · TIDAK UNTUK DIPERJUALBELIKAN

MATTL · Edisi 1 · Gratis untuk pelajar Indonesia · 2026/2027